This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

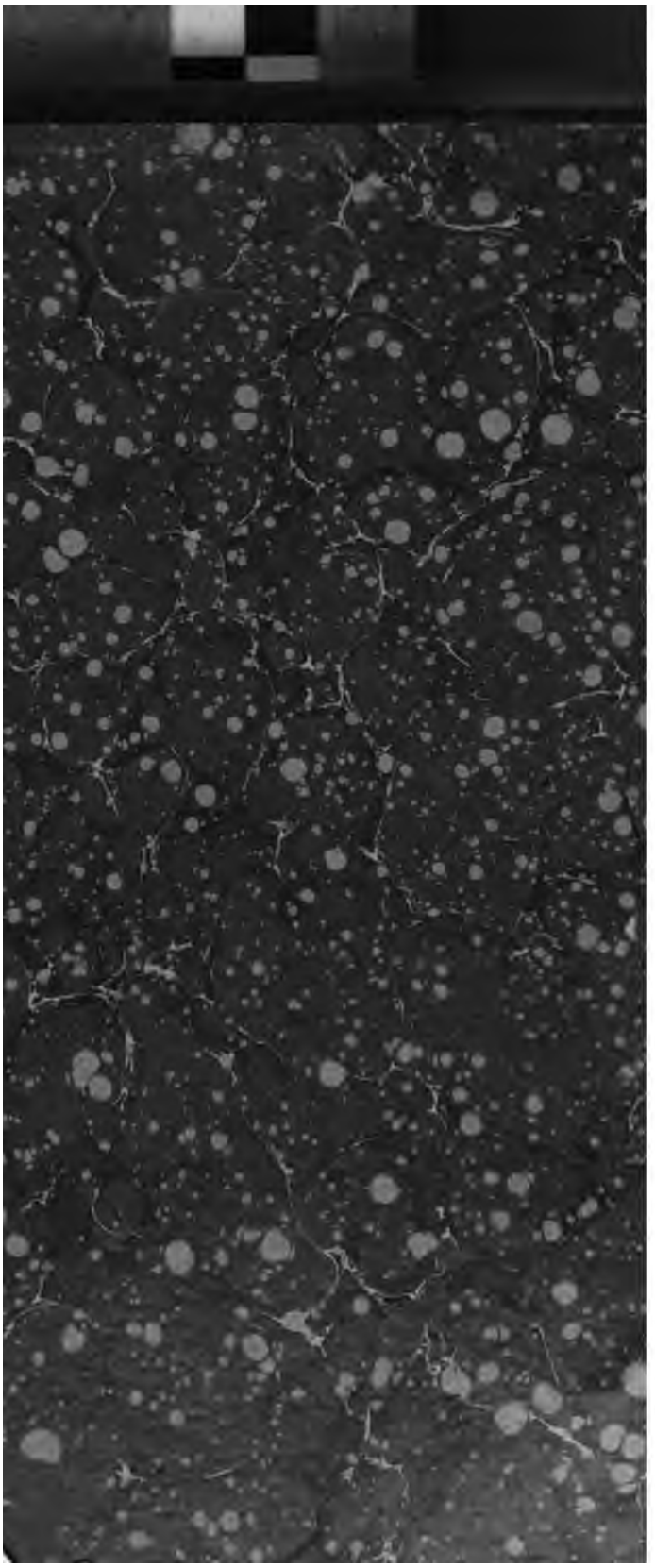
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

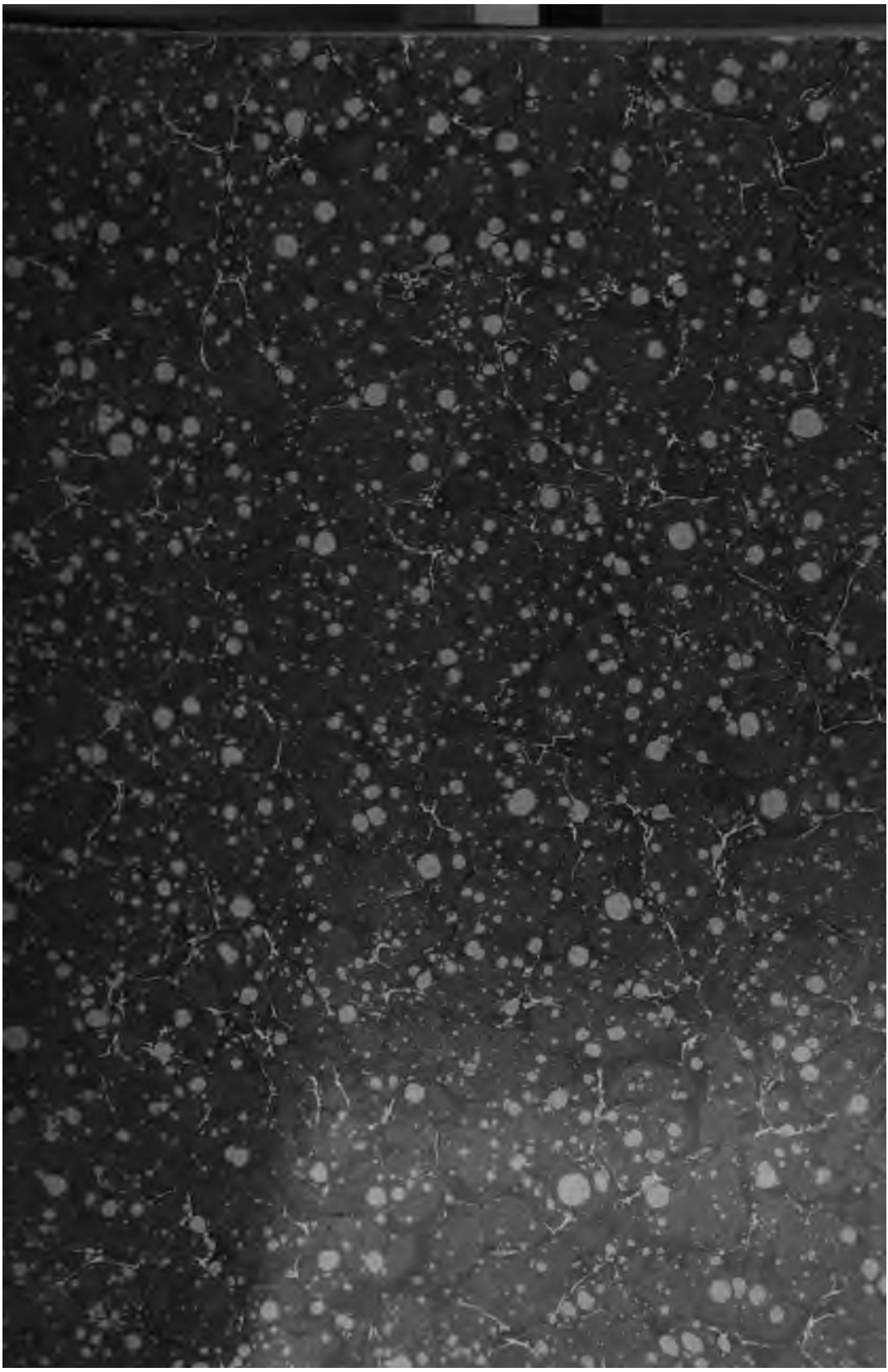
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`





L 71-1000

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

61. Band. 1. Heft.

Mit 3 Figuren im Text

Ausgegeben am 5. September 1905.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1905.

☛ *Generalregister zu den Mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre.* [XI u. 202 S.] gr. 8. geh. n. Mk. 7.—

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra.** 2 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
I. Teil. [XXXVIII u. 864 S.] geh. ℳ 17.—, in Halbfranz geb. ℳ 20.—
II. Teil. [X u. S. 865—1807.] geh. ℳ 10.—, in Halbfranz geb. ℳ 22.—

II. **Analysis.** 2 Teile, red. von H. Burkhardt und W. Wirtinger.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1898. ℳ 4.80; 2/3. [216 S.] 1900. ℳ 7.60; 4. [192 S.] ℳ 4.80. 5. [192 S.] 1904. ℳ 6.—
II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. ℳ 5.20.

III. **Geometrie.** 3 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.
II. Teil. Heft: 2. [96 S.] 1904. ℳ 2.80.
III. Teil. Heft: 1. [152 S.] 1905. ℳ 5.40.
——— Heft: 2/3. [256 S.] 1907. ℳ 8.80.

IV. **Mechanik.** 2 Teile, red. von F. Klein u. C. H. Müller.
I. Teil. 1. Abt. Heft: 1. [121 S.] 1901. ℳ 3.40; 2. [158 S.] 1902. ℳ 4.80. 3. [136 S.] 1903. ℳ 4.60.
——— II. Abt. Heft: 1. [179 S.] 1904. ℳ 4.40.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [131 S.] 1903. ℳ 3.80.

V. **Physik.** 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.
II. Teil. Heft: 1. [200 S.] 1904. ℳ 6.—

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie und Geophysik,** red. von Ph. Furtwängler und E. Wiechert.
VI. 2: **Astronomie,** red. von K. Schwarzschild.

In Vorbereitung:

VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen** behandelnd, sowie **Generalregister.**

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, professeur à l'université de Nancy. En sept tomes. Tome I: vol. 1, fasc. 1. [160 pag.] gr. 8. 1904. n. ℳ 4.—

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. gr. 8.
XVIII. Heft. Mit 94 Figuren im Text. [II u. 196 S.] 1904. geh. n. ℳ 6.—
Inhalt: J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles.
Conrad H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert.
Sigm. Lindé, Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unzulässigkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems".
——— XIX. Heft. Mit 39 Figuren im Text und einer Tafel am Schluß. [XI u. 188 S.] 1904. geh. n. ℳ 6.—
Inhalt: S. G. Lehmann's Ausführliche, analytische Geometrie und Anwendung der imaginären Größen auf einige Linienpaare. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Privatdozent an der Universität Leipzig.

Abraham, Dr. M., **Theorie der Elektrizität.** I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. Zweite, umgearbeitete Auflage von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 443 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 12.— II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. geh. ℳ 10.—

Ahrens, Dr. W., **Scherz und Ernst in der Mathematik.** Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Auerbach, Dr. **Felix,** Professor an der Universität Jena, **die Grundbegriffe der modernen Naturlehre.** Mit 79 Fig. im Text. [158 S.] 8. 1902. geb. n. ℳ 1.25.

Bachmann, Paul, Zahlentheorie. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. Fünfter Teil: Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. [XXII u. 548 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 16.—, geb. n. ℳ 17.—

Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von Josef Kürschák und Franz Schaffarzik, Mitgliedern der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. XX. Band. [X u. 410 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 8.—

Bolyai de Bolya, Wolfgang, tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Editio secunda. Tomus II: Elementa geometriae et appendices. Mandato Academiae Scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adiectis ediderunt Josephus Kürschák, Maximus Réthy, Béla Teleszky et Zeno Gruber, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. 2 parts. 4. 1904. Pars I: Textus. [LXIII u. 457 S.] Pars II: Figurae. [VIII u. 88 lithogr. Tafeln.] In Halbkalbleder geb. n. ℳ 40.—

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

61. Band.

Mit 38 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhalt des einundsechzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Bernstein, Felix, in Halle a./S. Untersuchungen aus der Mengenlehre. (Mit 3 Figuren im Text) 117

Blumenthal, Otto, in Aachen. Über die Zerlegung unendlicher Vektorfelder. (Mit 2 Figuren im Text) 235

Dehn, M., in Münster i./W. Die Eulersche Formel im Zusammenhang mit dem Inhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie. (Mit 4 Figuren im Text) 561

Dodd, E. L., of New Haven (Connecticut). On iterated limits of multiple sequences 95

Faber, Georg, in Karlsruhe. Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher 289

Fejér, Leopold, in Kolozsvár. Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik . . 422

———— Berichtigung zu diesem Aufsatze 560

Gordan, Paul, in Erlangen. Die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems 453

Herglotz, G., in Göttingen. Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen 551

Hessenberg, Gerhard, in Grunewald bei Berlin. Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. (Mit 7 Figuren im Text) 161

——— Begründung der elliptischen Geometrie. (Mit 10 Figuren im Text) . 173

Hurwitz, A., in Zürich. Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln 325

Juel, C., in Kopenhagen. Über einen neuen Beweis der Kleinschen Relation zwischen den Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve 77

Kepinski, S., in Lemberg. Über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. (Mit 1 Figur im Text) 397

Klein, Felix, in Göttingen. Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades 50

———— Berichtigung zu diesem Aufsatze 560

———— Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Sechster Bericht 72

———— Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen 369

König, Julius, in Budapest. Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem 156

85206

Seite

Kriloff, A., in St Petersburg. Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben 211

Kürschák, Josef, in Budapest. Zur Theorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen 109

Landau, Edmund, in Berlin. Über einen Satz von Tschebyschef 527

Lebesgue, Henri, à Rennes. Recherches sur la Convergence des Séries de Fourier 251

Liebmann, H., in Leipzig. Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie. (Mit 4 Figuren im Text) 185

Lietzmann, W., in Schoeneberg bei Berlin. Zur Theorie der n^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. II. Über n^{te} Normenreste 372

Mason, Max, in New Haven Connecticut. Beweis eines Lemmas der Variationsrechnung 450

Meyer, Eugen, in Charlottenburg. Über die in einem Reyeschen Komplexe enthaltenen Regelscharen 200

Netto, E., in Gießen. Ein Problem der Elimination 88

Noether, M., in Erlangen. George Salmon 1

Prasad, G., in Allahabad (Indien). Über die Hilbertschen Sätze in der Theorie der Flächen konstanter Gaußscher Krümmung 203

Riesz, Friedrich, in Lócse (Ungarn). Über mehrfache Ordnungstypen. I . . 406

Schoenflies, A., in Königsberg i./Pr. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Young. (Mit 1 Figur im Text) 287

Severi, Francesco, a Parma. Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie 20

Simon, Max, in Straßburg i./E. Über Dreieckskonstruktionen in der Nichteuklidischen Geometrie. (Mit 2 Figuren im Text) 587

Staude, Otto, in Rostock. Das Hauptachsenproblem der Flächen 2. Ordnung 392

Young, W. H., in Cambridge, England. Zur Theorie der nirgends dichten Punktmengen in der Ebene. (Mit 3 Figuren im Text) 281

Zemplén, G., in Budapest. Kriterien für die physikalische Bedeutung der unstetigen Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. (Mit 1 Figur im Text) 437

George Salmon.

Von

M. Noether in Erlangen.

Aus dem Kreise der Männer, die um die Mitte des vorigen Jahrhunderts die algebraische Formentheorie geschaffen und der algebraischen Geometrie einen neuen Inhalt gegeben haben, ist Salmon als letzter und höchstbetagter geschieden; und obwohl seit Dezennien in ihm der Mathematiker hinter den Theologen zurückgetreten ist, wirkt er heute noch durch seine Werke lebendiger und unmittelbarer auf die Kenntnis und damit den Fortschritt der Wissenschaft ein als seine großen Mitforscher. Auch *seine* Leistungen in diesen Blättern zu würdigen, erscheint als eine Pflicht der Annalen.*)

George Salmon ist am 25. Sept. 1819 in Dublin geboren. Abgesehen von der Schulerziehung in Cork verläuft sein ganzes übriges Leben am Trinity College von Dublin, welches die dortige Universität überhaupt umfaßt. An dieser seiner Studienuniversität graduierte er schon 1839 in Mathematik als „first senior moderator" und erhielt 1840 den Mudden-Preis, 1841 eine der mit ansehnlichen Berechtigungen verbundenen Fellow-Stellen des Collegs; bald hatte er auch als Tutor eine größere Zahl Studierender anzuleiten und zu unterrichten, wie auch an den Prüfungen teilzunehmen. Bis 1866 sollte diese Tätigkeit dauern, neben der er seit 1858 noch als „Donegal-Lecturer" für Studierende des Ingenieurfaches den Infinitesimalkalkül lehren konnte. Zugleich aber hatte sich Salmon der Theologie zugewandt: er erwarb deren Grade und veröffentlichte 1861 eine erste Reihe von an der College-Kapelle gehaltenen Predigten. In diesen

*) Die wenigen mir bekannt gewordenen Lebensdaten entnehme ich einem Artikel der Zeitschrift Nature, Nr. 1788 vom 4. Febr. 1904. Eine Würdigung Salmons gibt Sir R. Ball in den Proc. of the Lond. Math. Soc. (2), I, von Juni 1904, aber nur vom Standpunkte der angewandten Mathematik. Ein Schriftenverzeichnis enthält der Catalogue of scient. pap. der R. Soc. von London, Bd. V, 1871; für Zusätze vgl. Poggendorffs Handwörterbuch, 2. Aufl., Bd III, 1898.

scheinbar so wohl ausgefüllten Zeitraum nun fällt, 1843 beginnend, die ganze mathematisch-produktive Tätigkeit Salmons, seine Forschungen und die Abfassung der vier großen Kompendien: 1848 der „Conic sections", 1852 der „Higher plane curves", 1859 der „Modern higher Algebra", 1862 der „Analytic Geometry of three dimensions" — eine Tätigkeit, die ihm 1863 die Mitgliedschaft der R. Society von London, dann auch anderer größerer Akademien, und die Ehrenpromotionen von Cambridge und Oxford, 1868 die Royal Medal der R. Society, 1890 auch ihre Copley-Medal bringen sollte.

Im Jahr 1866 zum „Regius professor of Divinity" gewählt, widmete Salmon von da an seine Tätigkeit der Theologie, von 1888 an in hervorragendster Stelle der Verwaltung der Universität. In der ersteren Stellung war seine Wirksamkeit für die protestantische Kirche Irlands sehr angesehen, er veröffentlichte noch zwei weitere Serien von College-Predigten und mehrere theologische Werke, von denen insbesondere eine „Introduction to the New Testament" (1885) viele Auflagen erlebt hat. Die Angelegenheiten der Universität werden durch einen Board geleitet, der aus sieben nach der Anciennität eintretenden Fellows des College zusammengesetzt ist, und an dessen Spitze ein von der Krone ernannter Provost steht; die Befugnis dieses Ausschusses erstreckt sich nicht nur auf die Vermögensverwaltung, sondern er besetzt aus seiner Mitte eine Reihe von Ämtern und schließt — jetzt in Verbindung mit einem Rat — auch die ganze übrige Verwaltung in sich, eingeschlossen die Regelung des Studiengangs und die Wahl der Professoren. Da Salmon 1866 seine Fellow-Stelle niedergelegt hatte, konnte er nicht nach Anciennität in den Ausschuß einrücken; aber 1888 wurde ihm, als Nachfolger der bedeutenden Physiker und Mathematiker H. Lloyd und J. H. Jellett, das verantwortungsvolle und arbeitsreiche Amt des „Provost of Trinity College" übertragen. Diese Stellung behielt er bis an sein Ende bei, länger als irgend einer seiner Vorgänger durch hundert Jahre zurück und der angesehenste in ihrer ganzen Reihe. Mit unbeugsamer Hand regierte er die Universität und wußte auch von ihr, selbst von ihren theologischen Anstalten, jede von außerhalb kommende Einflußnahme abzuhalten; Maßregeln konfessioneller Duldung förderte er zwar, in strengem Konservativismus widerstand er aber jeder Umänderung der Verwaltung. Mitten aus voller Amtstätigkeit verschied Salmon am 22. Januar 1904. Seine Rüstigkeit hatte er einem tätigen, regelmäßigen, vielfachen Interessen gewidmeten Leben, einem heiteren, auch der Kunst und der Geselligkeit zugewandten Sinn, häufigen Reisen, besonders in die Schweizer Berge, zu danken. Von einigen Zügen seines Wesens, von seiner Jovialität, von seiner humoristischen Ader, von seiner Fähigkeit zu wahren Freundschaftsgefühlen, gibt uns seine

Würdigung Cayleys (Nature 1883) Zeugnis; wie denn in Salmon über den Verwaltungsbeamten, den Theologen, den Mathematiker noch der Mensch mit ausgesprochener Persönlichkeit hinausragt. —

Zur Zeit, als Salmon in die Dubliner Universität eintrat, standen dort die mathematischen Wissenschaften in lebhafter Pflege. Neben Humphry Lloyd und William Rowan Hamilton, der eben seine mechanischen Prinzipien veröffentlicht hatte und 1843 seine ersten Mitteilungen über Quaternionen machte, wirkte James MacCullagh (1809—1847), von 1836—1843 Inhaber des mathematischen Lehrstuhls. Obwohl dessen Interesse in erster Linie der theoretischen Optik zugewandt war, wirkte doch grade seine geometrische Tätigkeit so anregend, daß sich eine vollständige *irisch-geometrische Schule* um ihn bildete, die eine Reihe von Jahren hindurch vor allem metrische und infinitesimale Probleme der Kurven und Flächen 2^{ten} Grades förderte. Einige Theorien des Meisters der Schule selbst: so Sätze über die Fokaleigenschaften — gleichzeitig mit den Chaslesschen publiziert —, neue Erzeugungen von Flächen 2^{ten} Grades, das „MacCullaghsche Trägheitsellipsoid", sind feste Bestandteile der Wissenschaft geworden. Unter den Schülern war einer der begabtesten Salmons Freund und Mitarbeiter Charles Graves (1812—1899; von 1862 an Bischof von Limerick), 1843—1862 Nachfolger MacCullaghs; er hatte 1841 Chasles' Abhandlungen von 1830—1831 (Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles) über die Kegel und sphärischen Kegelschnitte ins Englische übertragen, vermehrt mit eigenen Theoremen, und damit jener Schule die neueren Begriffe der französischen Geometer zugeführt. Andere Angehörige jener Schule sind R. Townsend, A. S. Hart, M. Roberts, J. Casey, etc., lauter Namen, die aus Salmons Büchern wohlvertraut sind. Sie suchte für ihre Bestrebungen ein spezielleres Publikationsorgan, als es die Schriften der irischen Akademie oder der lokale University Calendar waren; und so verwandelte sich das bisher auf die mehr algebraische Richtung von Cambridge beschränkte Cambridge Mathematical Journal, dessen vier Bände noch keinen Mitarbeiter von Dublin aufweisen, 1846 in das Cambridge and Dublin Mathematical Journal. Bald sollte sich zeigen, wie das leicht zugängliche Organ die Energie der jungen Forscher anregte, ihren Horizont in geometrischer und algebraischer Richtung erweiterte und ihre Kräfte zur Entfaltung brachte.

Als ein vollständiges Textbuch dieser irischen Schule, soweit es die Geometrie der Kegelschnitte anlangt, kann Salmons Werk von 1848 über die Kegelschnitte*) bezeichnet werden; nur ist es schon erfüllt mit dem

*) A treatise on conic sections, containing an account of some of the most important modern algebraic and geometric methods. 1848. Erschienen um die

frischen Hauche eines neuen Geistes. In seinen elementaren Teilen ist es wesentlich aus dem Stoff herausgewachsen, welcher von MacCullagh und seinen Schülern in den Dublin Examination Papers niedergelegt war: zahlreiche Aufgaben und Sätze hatten dem Kreis junger Kräfte Gelegenheit gegeben, sich im Erfinden einfacher geometrischer und algebraischer Beweismethoden zu üben. Die Gefahr, daß ein so einseitig betriebenes Lehrmittel zu Beschränktheit und Erstarrung führe, war zwar in der Frische der Entwicklungszeit nicht groß; doch Salmon selbst beschwor sie dadurch, daß er sich aus der französischen Literatur, insbesondere aus dem Werke Poncelets von 1822, die allgemeinen Prinzipien — das der Dualität im Ponceletschen Sinne der reziproken Polaren, das Rechnen mit abgekürzten Gleichungsformen und die Dreieckskoordinaten, ein Einordnen von vielem Metrischen unter das Projektive, die projektiven und metrischen Umformungen von Poncelet, die Doppelverhältnis-Geometrie von Chasles — zu eigen machte und den ganzen, vom Elementarsten bis zu den höchsten Theorien reichenden Stoff in seinen letzteren Teilen eben nach jenen neueren übersichtlichen Methoden ordnete. Offenbar liegt überall eine die eigene Tätigkeit der Schüler anregende Lehrtätigkeit zugrunde.

Dem Buche selbst ging keine einzige Veröffentlichung Salmons über ebene Geometrie voraus. Höchstens kann man die Note „On the properties of surfaces of the second degree which correspond to the theorems of Pascal and Brianchon on conic sections“ (Philos. Mag. (3), XXIV, p. 49—51, datiert vom 5. Okt. 1843) anführen, insofern sie schon den Brianchonschen Satz als speziellen Fall eines solchen über drei Kegelschnitte, die mit einem gegebenen Kegelschnitt in doppelter Berührung sind, ableitet. Daß dieselbe Ableitung schon 1828 von Plücker (Anal. geom. Entwicklungen, I, Nr. 385) gegeben war, weiß Salmon nicht, wie er denn diesen Vorgänger vor 1848 überhaupt nicht kennt; und so liefert die leichte Handhabung symbolischer Gleichungsformen, die Salmon hierbei zeigt, ein Zeugnis für sein selbständiges Denken. Eine kurze Note von Nov. 1847 („On the number of normals which can be drawn from a given point to a given surface“, Cambr. a. Dubl. Math. J. III) mag hier noch genannt werden, insofern sie die projektiven Erweiterungsprinzipien Poncelets zuerst auf das Normalenproblem anwendet.

Salmons früheste Arbeit bezieht sich auf Flächen 2^{ten} Grades und schließt ganz direkt an MacCullagh an. Dieser hatte schon von 1837 an in den Proc. of the R. Irish Acad. die auf alle Flächen 2^{ten} Grades anwendbare sog. „modulare“ Erzeugungsweise gegeben: zu jedem Punkte F einer Fokalkurve der Fläche gehört nämlich eine Direktrixgerade d, wobei

Wende 1847/48, 2^{te} Ausgabe 1850, 3^{te} 1855, etc. (Die Ausgabe von 1855 liegt der ersten deutschen Bearbeitung von 1860 zugrunde.)

MacCullagh die Kurve so wählt, daß die beiden Schnittpunkte der Fläche mit d konjugiert-komplex sind; dann steht der Abstand irgend eines Punktes der Fläche von F in konstantem Verhältnis zu dem Abstand von d, letzterer gemessen parallel zu einer reellen Kreisschnittebene. Neben diesen für eine Rotationsfläche schon 1836 auch von Chasles (Liouv. J. I) gegebenen Fall stellt sich nun der von Salmon (Dubl. Exam. Papers von Okt. 1842, Univ. Calendar für 1843) behandelte, eigentlich näher liegende Fall, daß die beiden Schnittpunkte mit d reell sind: dann steht das Quadrat des Abstands irgend eines Punktes der Fläche von F zum Produkt der Abstände von den zwei durch d gehenden Ebenen mit reellen Kreisschnitten in konstantem Verhältnis. Salmon nennt diese Erzeugungsweise „umbilikal", weil die hier zu benutzende Fokalkurve die reellen Nabelpunkte der Fläche enthält; sie nimmt immer solche Fokalkurven, die nicht zur modularen Erzeugung dienen, und findet beim einschaligen Hyperboloid nicht statt. Auch diese Erzeugungsweise wurde zu gleicher Zeit von andrer Seite (Amiot in C. R. von Dez. 1842 und April 1843, wie auch Liouv. J. VIII, 1843) gegeben; und Salmon selbst hat seinen Weg, eine zweimalige Anwendung der Polarreziprozität bezüglich einer unendlich kleinen Kugel, erst Juni 1847 (Proc. R. Irish Acad. III) kurz mitgeteilt. Wie leicht man von hier, indem man einen Fokalpunkt als unendlich kleine Kugel auffaßt, die mit der Fläche in doppelter Berührung ist – auch schon von Chasles C. R. April 1843 angedeutet —, zu einer großen Menge allgemeiner Eigenschaften der Flächen 2^{ten} Grades gelangt, hat besonders Townsend nachgewiesen (Cambr. a. Dubl. Math. J. III, Febr. 1847).*)

Noch im Jahre 1847 war Salmon von den algebraisch-geometrischen Betrachtungsweisen, welche in Cambridge eingesetzt, und noch mehr von Plücker (1834, 1839) und Hesse (1844), auf welche Cayley seit 1845 hingewiesen hatte, ganz unbeeinflußt. In den „Conic sections" von 1848 erscheint nicht einmal der Begriff „Determinante", die höheren Methoden werden nur als rein geometrische den Koordinatenmethoden gegenüber aufgefaßt, und erst der deutschen Ausgabe ist es vorbehalten geblieben, sie mit den linearen Transformationen in Beziehung zu setzen. Ohne Fühlung mit den invariantentheoretischen Gedanken Booles und Cayleys arbeitet Salmon zunächst ganz aus sich heraus an bedeutenden *algebraisch-geometrischen Problemen*, in deren Verlauf er erst zu dem entscheidendsten

*) Eine Übersicht über die Geschichte dieser Entwicklungen findet sich in E. Kötters „Die Entwicklung der synthetischen Geometrie", Kap. XXXV (Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, V_2), unter Richtigstellung mancher Angaben von Salmon-Fiedlers Raumgeometrie.

Ereignis seines Lebens, zu wissenschaftlicher Berührung und zu gemeinsamer Arbeit mit Cayley, kommen sollte. Diese höheren selbstgesteckten und auf eigenen Wegen verfolgten Ziele heben jetzt auch Salmon in der Literatur des Cambr. and Dubl. Math. J. scharf über die Bestrebungen der übrigen irischen Schule empor.

Der Mittelpunkt aller algebraisch-geometrischen Bestrebungen Salmons, sein Ausgangs- und Zielpunkt ist das *Problem der Reziprokalflächen**). Er faßt den Begriff nicht in dem Gergonne-Plücker-Cayleyschen allgemeinen Sinn der Dualität, sondern mit Poncelet im Sinn der reziproken Polaren. Schon früher — nach einer Angabe in den „Higher plane curves" von 1852 bereits 1840—42, was wohl zu früh datiert ist — hatte er sich mit dem Ponceletschen Paradoxon über die Gradzahlen einer Kurve und ihrer Reziprokalkurve beschäftigt und an Gleichungen von Kurven 3^{ter} Ordnung die Wirkung von Doppel- oder Rückkehrpunkt auf die Erniedrigung der Reziprokalkurve zu studieren begonnen; und 1846 steht er etwa auf Plückers Standpunkt von 1834, indem er die Zahl der Wendepunkte einer allgemeinen Kurve n^{ter} Ordnung kennt, nicht aber dessen Relationen von 1839 oder Cayleys Erweiterung derselben auf Raumkurven (Liouv. J. 1845). Aber kühn stellt er sich sogleich die Aufgabe, die Klasse einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung, also die Klasse ihrer Tangentenkegel, zu bestimmen, dadurch daß er die Doppel- und Rückkehrkanten eines solchen Kegels ermitteln will. Dies führt Salmon auf eine ganze Reihe neuer Begriffe und neuer algebraischer Eliminationsaufgaben.

Schon die erste Note (1) (siehe unten Anmerkung) führt die Frage nach den Doppelkanten des Tangentenkegels der Fläche $f(x, y, z) = 0$ auf

---

*) Die hier anzuführenden Arbeiten sind:

(1) On the degree of a surface reciprocal to a given one.
(Cambr. a. Dubl. M. J., II (1847), p. 65—73, vom 25. Nov. 1846.)

(2) Note on the parabolic points of surfaces.
(Ibid. II, p. 74—75, vom 14. Dez. 1846.)

(3) On the condition that a plane should touch a surface along a curve line.
(Ibid. III (1848), p. 44—46, etwa aus Nov. 1847.)

(4) On the cone circumscribing a surface of the m^{th} order.
(Ibid. IV (1849), p. 188—191, vom 26. März 1849.)

(5) On the triple tangent planes to a surface of the third order.
(Ibid. IV (1849), p. 252—260, vom 15. Okt. 1849.)

(6) On reciprocal surfaces.
(Proc. R. Irish Acad. VI (1853—54), p. 273—275. Sitzung vom 30. Nov. 1855.)

(7) On the degree of the surface reciprocal to a given one.
(Transact. R. Irish Acad. XXIII (1859), p. 461—488, mit zwei aus 1857 datierten Postskripten; publiziert 1857.)

(7') Letter to the editor.
(Quart. J. II, p. 167, vom 13. April 1857.)

die Frage nach dem Gewicht der Bedingungen zurück, welche aussagen, daß die beiden Gleichungen $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ zwei gemeinsame Wurzeln z besitzen, gibt aber zunächst nur das Resultat an. Sie gibt die Zahl der Rückkehrkanten aus $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, und sie verwendet weiter die Polarentheorie zur Untersuchung des Einflusses eines konischen oder gewöhnlicher biplanarer und uniplanarer Punkte der Fläche auf deren Klasse; ja sie behandelt schon, wie auch Note (4), den Einfluß einer Doppelkurve und ihrer Kuspidalpunkte, freilich zunächst nur induktiv aus speziellen Fällen. Auch Note (2) ist trotz ihrer Kürze für Salmon wichtig: er macht die Gleichung formal homogen; er bestimmt die Wendepunkte einer Kurve mittels des Ortes der Punkte, deren Polarkegelschnitte einen Doppelpunkt haben, und gibt das Verhalten dieser Ortskurve in Doppel- und Rückkehrpunkten der Grundkurve richtig an — ungefähr gleichzeitig mit Cayley (Cr. J. Bd. 34, 1847), aber ohne Beweis; und er bestimmt auf dieselbe Weise die parabolische Kurve einer Fläche, immer durch Differentiationen und Elimination nach der einen homogen-machenden Variabeln. Die Eigenschaft, daß in einem parabolischen Punkt einer Fläche die Tangentenebene bei Weitergehen in einer bestimmten Richtung stationär bleibt, wird erst in Note (3) aufgestellt und durch spezielle Koordinatenwahl bewiesen.

Nunmehr aber wurde Salmon durch Cayley auf eine nähere Betrachtung der *Flächen 3ter Ordnung*, als Beispiel zur Reziprokaltheorie, hingewiesen. Cayley hatte die Existenz von Geraden auf einer solchen Fläche ermittelt, und Salmon leitete 1849 (in (5)) aus der Anzahl der Doppeltangentenebenen des der Fläche umschriebenen Kegels die Anzahl ihrer Geraden ab, deren Konfiguration dann Cayley studierte. Salmon hinwiederum hat man den Satz zu verdanken, daß diese Geraden die parabolische Kurve je in zwei Punkten berühren; und ebenso die Modifikationen in der Zahl der Geraden und der dreifachen Tangentenebenen, welche durch Doppelpunkte der Fläche 3ter Ordnung bewirkt werden. Vor allem aber gelangt Salmon hier schon, durch Aneignung des Joachimsthalschen Verfahrens aus Cayleys großer Arbeit im 34ten Band des Crelleschen Journals, zu der Fläche, welche die Geraden, und allgemeiner zu der Fläche S der Ordnung $11n - 24$, welche aus einer Fläche n^{ter} Ordnung die Kurve 4-punktiger Berührung mit Geraden ausschneidet, nebst Bestimmung des Grades der abwickelbaren Fläche dieser Geraden.

So vorbereitet ging nun Salmon sogleich an die Ausdehnung und wirkliche Ausführung der Reziprokaltheorie für Flächen n^{ter} Ordnung, schob aber die Veröffentlichung weit hinaus (Note (6) und Aufsatz (7)). Insofern es sich dabei um das gegenseitige Verhalten in Schnittstellen der

verschiedenen besonderen Kurven der Reziprokalfläche: ihrer Doppelkurve, ihrer Rückkehrkurve handelt, holte er sich Aufschluß aus der Reziprokaltheorie der Flächen 3ter Ordnung. Zu untersuchen waren für eine Fläche n^{ter} Ordnung f_n die drei Kegel mit Spitze in einem Punkte O: der Tangentenkegel, der Kegel über der Doppelkurve von f_n und der über der Rückkehrkurve von f_n, die Schnitte mit der zweiten Polaren von O, die Fläche $(n-2)(n-3)^{ter}$ Ordnung, welche für den ersten Kegel die Doppelkanten liefert, usw. Als methodisches Mittel diente ihm eine Erweiterung des Joachimsthalschen Verfahrens der Darstellung einer Geraden auf Darstellung einer Ebene, wodurch man also bei Untersuchung singulärer Tangentenebenen von f_n zu ternären Eliminationsproblemen geführt wird. Freilich erledigt Salmon die so entstehenden schwierigen Aufgaben nicht algebraisch: er begnügt sich, auf geometrischem Wege die Existenz abzusondernder Faktoren der Eliminationsresultanten nachzuweisen und so zu Gradabzählungen zu gelangen; oder er bestimmt einzelne numerische Koeffizienten seiner Formeln durch Induktion, von der sogar oft nur das Resultat angegeben wird, und durch Verifikation an einigen Anwendungen auf abwickelbare und Regelflächen.

Übrigens hat auch Schläfli in einem Aufsatz über Flächen 3ter Ordnung (Quart. J. II, vom Febr. 1857) dasselbe Feld der Reziprokaltheorie für die *allgemeine* Fläche f_n mit der erweiterten Joachimsthalschen Methode bearbeitet und war für die abwickelbare Fläche der Doppeltangentenebenen von f_n direkt auf alle Anzahlen gekommen, nur daß bei ihm der Rang A und die Zahl t' der dreifachen Tangentenebenen noch in einer Kombination vereinigt auftraten, während Salmon indirekt auch t' bestimmte (siehe 2te Nachschrift zu (7)). Über Salmons Methoden und Resultate in der Reziprokaltheorie erheblich hinauszukommen, ist auch dem Algebraiker Cayley nicht gelungen, abgesehen davon, daß dem Salmonschen Formelsystem die Gleichung für die Erhaltung des Flächengeschlechts hinzugefügt wurde.*)

Unter den algebraischen Problemen, die sich Salmon in der Reziprokaltheorie entgegenstellten, war das früheste die Frage nach der *Ordnung eines Systems von Bedingungen*, so die Frage nach der Anzahl der Schnittpunkte, welche im Schnitt dreier Flächen eine gegebene, den drei Flächen auch teilweise vielfach angehörige Kurve absorbiert (Note (1) von Anm. S. 6). Die *Anwendung von Eliminationsbegriffen auf Abzählungen***) ge-

*) Vgl. meinen Aufsatz über Cayley, diese Annalen Bd. 46 (s. Seite 471).

**) Hierzu gehören:

(8) Note on a result of elimination.
(Cambr. a. Dubl. M. J. III, p. 169—173, vom 25. Apr. 1848.)

hört nun zu den glänzendsten Leistungen Salmons, und sie war es, die ihn zuerst mit Cayley zusammengeführt hat.

Nachdem Cayley sich mit der Anzahl der unabhängigen Bedingungen eines Gleichungssystems und mit der Darstellung der Resultante in Quotientenform beschäftigt hatte (Cambr. a. Dubl. M. J. II und III), kommt Salmon 1848 (Note (8)), bei der algebraischen Aufstellung der Doppelkurve der rationalen abwickelbaren Fläche 4^{ter} Klasse, auf ein System von 5 Flächen, das zur Definition einer Raumkurve 4^{ter} Ordnung dient: auf ein „System der Ordnung 4", nach einem von Cayley (in einer Note, ibid. IV, die gleichzeitig mit der Salmons hätte erscheinen sollen) gebrauchten Ausdruck. Cayley ordnet diesen Fall einer allgemeinen Theorie unter, die von dem Verschwinden einer Matrix von k Zeilen und $k+1$ Kolonnen, mit in den Variablen linearen Elementen, handelt. In eingehender Weise ist dann Salmon 1857 (10) auf diese Theorie zurückgekommen: er dehnt sie auf Matrizes aus, deren Elemente von höherer als erster Ordnung und von gegebenen Gewichten sind; durch den Schluß von n auf $n+1$ werden allgemeine Funktionalformeln für Ordnung und Gewicht des abhängigen Systems von Bedingungen gewonnen, und speziell werden so die Probleme gelöst, daß drei Gleichungen eine gemeinsame Wurzel oder daß eine Gleichung eine dreifache oder zwei Doppelwurzeln besitze. Mit ihrer wichtigsten Anwendung: der Bestimmung der Doppelpunkte einer durch eine symmetrische Determinante dargestellten Fläche, ist diese ganze Theorie in Salmons Raumgeometrie übergegangen.

Noch 1866 hat sich Salmon abzählenden Untersuchungen dieser Art zugewandt, als er sich ((11) und (12)) zum Ziel setzte, die Anzahl der Flächen 2^{ter} Ordnung zu bestimmen, die neun gegebenen Punkt-, Geraden- und Ebenen-Bedingungen genügen. Er versucht, für das durch 5 Punkte bestimmte Flächensystem die Vielfachheit der auszuscheidenden zerfallenden Lösungen algebraisch zu diskutieren, und gelangt, indem er damals schon die Parameter dieses Systems als Koordinaten in einem Raum von vier Dimensionen geometrisch deutet, zur Frage nach dem Gesamtschnitt von vier dreidimensionalen Gebilden dieses Raumes, bestehend aus Flächen, Kurven und isolierten Punkten. Die induktiv gefundenen und nur bei

(9) On the conditions that an equation should have equal roots.
(Cambr. a. Dubl. M. J. V (1850), p. 159—165, von März 1850.)

(10) On the order of certain systems of equations.
(Quarterly J. I (1857), p. 246—257.)

(11) On some points in the theory of elimination.
(Ibid. VII (1866), p. 327—337.)

(12) Number of surfaces of second degree which can be described to satisfy nine conditions.
(Ibid. VIII (1867), p. 1—7.)

vollständigen Schnittgebilden genügenden Zahlenresultate können nicht auf allgemeine Gültigkeit Anspruch machen; und so stimmen auch — wie Salmon selbst bemerkt — für einige Bedingungsfälle die Zahlen nicht mit den von Chasles gleichzeitig in den Comptes Rendus der Pariser Akademie veröffentlichten überein.

Als eine Art von Umkehrung dieser Richtung der Eliminationstheorie kann eine weitere Gedankenrichtung bezeichnet werden, die für die Algebra von großer Bedeutung werden sollte: die nach dem *Basisbegriff eines Systems von Bedingungen*. Auch sie ist aus dem Zusammenwirken von Cayley und Salmon hervorgegangen.*) Cayley hatte den Begriff implizit verwandt, indem er bei einem besonderen Anlaß („On the developable derived from an equation of the 5th order", Cambr. a. Dubl. M. J. V) die Bedingung, daß eine Gleichung 5ten Grades zwei gleiche Wurzeln habe, sukzessive mit Hilfe der Bedingungen, daß sie drei und vier gleiche Wurzeln habe, auf übersichtliche Formen reduzierte. Hierdurch veranlaßt entwickelt nun Salmon in der diesem Aufsatz angehängten Note (9) den zugrunde liegenden Basisbegriff explizit und prinzipiell: es sei „evident", daß, wenn $P = 0$, $Q = 0, \cdots$, die Bedingungen sind, daß eine Gleichung $f = 0$ k gleiche Wurzeln habe, dann jede der Bedingungen, deren System ausdrücke, daß $f = 0$ $k - h$ gleiche Wurzeln habe, von der Form $AP + BQ + \cdots = 0$ sein müsse, weil sie durch $P = 0$, $Q = 0, \cdots$, erfüllt werde. Salmon gibt auch eine Reihe von Anwendungen, z. B. die quadratischen und die kubischen Relationen für n oder $n - 1$ gleiche Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades, und Cayley verallgemeinert später die Untersuchung (Quart. J. 18); indessen sind diese Ableitungen in „Lessons on higher Algebra" weggelassen, wohl weil sie direkt aus den Matrizesausdrücken leichter gewonnen werden können.

Man kann von diesen Entwicklungen Salmons nur sagen, daß sie in noch unbestimmter Weise eine Richtungslinie angeben, deren Verfolg der Zukunft vorbehalten blieb. Übrigens hat schon Cayley den Begriff etwas modifiziert („Note sur la théorie des Hyperdéterminants", Crelles J., Bd. 42, 1851, und seine Abhandllung von 1869): wenn irgend ein Eliminationsresultat „vollständig" definiert wird durch ein System von Bedingungen $P = 0$, $Q = 0, \cdots$, so müsse jedes andere Eliminationsresultat desselben Gleichungssystems in der Form $AP + BQ + \cdots = 0$ darstellbar sein; und darauf beruht auch seine in Salmons Raumgeometrie von 1874 enthaltene Angabe, daß zur Repräsentation einer Raumkurve immer eine Basis von Flächen angenommen werden könne. Sylvester hat sich an der

*) Vgl. hier meine Aufsätze über Cayley (Bd. 46) und Sylvester (Bd. 50 dieser Annalen).

Entwicklung dieser Begriffe, wenigstens für binäre Formen, nur insofern beteiligt (Cambr. a. Dubl. M. J. V), als er von den Identitäten der Art $AP + BQ + \cdots \equiv 0$ spricht.

Salmons Arbeiten über *Raumkurven* gehören ebenfalls im wesentlichen der abzählenden Richtung an. Schon in seiner Note (1) von 1846 war er für Raumkurven selbständig auf den 1845 von Cayley gegebenen Begriff der „Linien durch zwei Punkte, die durch einen gegebenen Punkt gehen" gekommen; nur hat er auch die Linien durch zwei getrennte Punkte von denen durch einen Doppelpunkt unterschieden und bei der ersteren Art in seiner Abhandlung „On the classification of curves of double curvature" (Cambr. a. Dubl. M. J. V (1850), p. 23—46, vom 21. Juli 1849) die Bezeichnung „scheinbare Doppelpunkte" eingeführt.*) Diese Abhandlung selbst schließt nicht nur an die schon oben erwähnte Untersuchung Cayleys von 1845 an, der ganze Inhalt ist, nach Salmons eigener Erklärung, in Ziel und Resultaten aus gemeinsamer Arbeit der beiden Forscher gewonnen. Sie ist eine erste Grundlage für die Klassifikation der Raumkurven niedrigerer Ordnung geworden; und sie erreicht dieses Ziel, indem sie die Kurven als Schnitte von Flächen möglichst niedriger Ordnungen diskutiert und aus den Zahlen dieser Schnittflächen die Kurvenzahlen zu erschließen sucht. Salmon benutzt hierbei nur einfachste Sätze; die Zahl der Schnittpunkte einer Fläche n^{ter} mit einer Kurve m^{ter} Ordnung; unbestimmte Abzählungen über die Konstantenzahl der die Raumkurve enthaltenden Flächen n^{ter} Ordnung; die Tatsache, daß eine Berührung zweier Flächen die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte einer Schnittkurve nicht verändert; die Anzahl der Schnittpunkte zweier Kurven eines zerfallenden Schnittes — letzteres in der Raumgeometrie algebraisch mit Hilfe einer besonderen Ortsfläche erledigt. Besonders werden so die Raumkurven 4^{ter} und 5^{ter} Ordnung erhalten, wobei als das interessanteste neue Ergebnis die rationale Raumkurve 4^{ter} Ordnung — 2^{ter} Spezies, nach Cremona — erscheint, deren dualistisches Gegenbild freilich schon von Cayley angedeutet war. Auch die Konstantenzahl $4m$ findet sich für die rationalen Raumkurven m^{ter} Ordnung. Wenn Salmon aber sagt: „there is evidently no difficulty in enumerating in like manner the different possible species of curves of higher degrees", so stellt er sich hierbei irrtümlicherweise vor, daß man jede Raumkurve sukzessive durch zerfallende Flächen schnitte auf Raumkurven niedrigerer Ordnungen zurückführen könne.

Was die Abhandlung noch auszeichnet, ist, daß nicht nur, wie bei Cayley, allgemeine Kegel über der Raumkurve und allgemeine ebene

*) Hiernach ist eine Stelle in meinem Aufsatz über Cayley, Math. Ann. Bd. 46, p. 471, Z. 15—16 zu berichtigen.

Schnitte ihrer abwickelbaren Fläche auf ihre Singularitätenzahlen behandelt werden, sondern auch Kegel und Schnitte von spezieller Lage. Für einige hierbei noch nicht völlig erledigte Anzahlbestimmungen haben aber erst die Theorie der Reziprokalflächen und andere geometrische Untersuchungen (Zeuthen, etc.) Aufklärung gebracht.

Eine verwandte Untersuchungsrichtung Salmons ist die über *Regelflächen*. Nachdem Cayley die allgemeinen Eigenschaften der Regelflächen festgelegt hatte (Cambr. a. Dubl. M. J. VII), bestimmt Salmon („On a class of ruled surfaces", ibid VIII, p. 45—47, vom 7. Sept. 1852) die Natur derjenigen Regelflächen, welche durch eine an drei gegebenen Leitkurven gleitende Gerade erzeugt werden. Ihre Fortsetzung findet die Theorie der Regel- und abwickelbaren Flächen erst in Salmons Aufsatz über Reziprokalflächen und in Cayleys Arbeiten von 1863 und 1871.

Vom Jahr 1850 an setzt bei Salmon auch die *formentheoretisch-algebraische Richtung der Geometrie**) ein. Eine erste Periode beginnt

*) Dazu ist anzuführen:

(13) Lettre de M. G. Salmon de Dublin à l'éditeur de ce Journal [Sur les points d'inflexion des courbes de troisième degré].
(Crelles Journ., Bd. 39, p. 365—366, vom 11. Febr. 1850.)

(14) Théorèmes sur les courbes de troisième degré.
(Ibid., Bd. 42, p. 274—276, vom 24. Juli 1851.)

(15) Sur la formation de l'équation de la courbe réciproque à une courbe donnée.
(Ibid., Bd. 42, p. 277—278, von Aug. 1851.)

(16) A treatise on the higher plane curves, intended as a sequel to a treatise on conic sections. 1852. (In deutscher Bearbeitung, nach der zweiten von Cayley unterstützten Ausgabe von 1873, zuerst 1873.)

(17) Exercises in the hyperdeterminant calculus.
(Cambr. a. Dubl. M. J. IX (1854), p. 19—33, vom 23. Sept. 1853.)

(18) On the contact of right lines with surfaces.
(Quart. J. I (1857), p. 329—344.)

(19) On curves of the third order.
(Philos. Transact. of the R. Soc. of London, vol. 148, p. 535—542; überreicht am 1. Juni 1858.)

(20) Double tangents to plane curves.
(Philos. Magaz. (4), XVI (1858); 1 Seite, vom 10. Sept. 1858.)

(21) Lessons introductory to the modern higher algebra. 1859. 2te Aufl. 1866, etc. (Das Werk widmet der Verfasser Cayley und Sylvester, als „Versuch, einige ihrer Entdeckungen besser bekannt zu machen, in Anerkennung seiner Verpflichtung, nicht nur ihren publizierten Schriften, sondern auch ihrer Korrespondenz gegenüber". Deutsch, unter dem Namen „Algebra der linearen Transformationen", 1863.)

(22) On the determination of the points of contact of double tangents to an algebraic curve.
(Quart. J. III (1860), p. 317—322, von Ende 1859.)

hier mit der Theorie der Kurven 3ter Ordnung und ist durch ein eingehendes Studium der allgemeinen Polarentheorie ausgefüllt; sie wird schon 1852 durch das Werk (16) über die höheren ebenen Kurven gekennzeichnet.

Sätze von A. S. Hart (cf. (13), (14), (16)) waren es, die Salmon zur *Theorie der Kurven 3ter Ordnung* führten; und 1851 gelangt er (in (14)), durch Erweiterung eines metrischen Satzes, zu einer der bedeutendsten Entdeckungen in dieser Theorie: zu dem Theorem von der Konstanz des Doppelverhältnisses für die vier von irgend einem Punkte der Kurve aus an sie gezogenen Tangenten. Er beweist es dann einfach mittels des Pascalschen Satzes, angewandt auf die quadratische Polare eines Punktes der Kurve, unter Übergang zu einem benachbarten Punkte. Sein Blick wurde hierbei auf die Arbeiten Hesses (1844) und Aronholds (1850) gelenkt, und er deutet auch einen, auf Aronholds Invarianten S und T, die er explizite ausrechnet, gestützten Beweis an. Indes war damals, vor den Entwicklungen Cayleys — von 1856 an — und Aronholds 1858, der allgemeine Charakter der Formentheorie noch wenig ausgeprägt; Salmon begnügt sich in seinem Buche von 1852, das erst Determinanten und Elimination zu lehren hatte, mit primitiven Mitteln, wie speziellen Koordinaten und symmetrischen Funktionen, und von dem algebraischen Abschnitte über Kurven dritter Ordnung muß er selbst aussprechen: „This section is derived from a memoir of M. Aronhold, Cr. J. 39 (1850). M. Aronholds paper being preliminary to a promised and larger one, contains chiefly theorems without proofs; and I must confess that the proofs and developments which I have accordingly been obliged to supply savour rather of brute force than of science.“ Trotzdem gewinnt er schon in diesem Buche durch eine geschickte Anwendung des Joachimsthalschen Verfahrens auf Kurven 3ter Ordnung den schönen Satz: daß der Tangentialpunkt eines Punktes der Kurve als Schnitt der Tangente dieses Punktes mit der linearen Polare desselben bezüglich der Hesseschen Kurve der Kurve 3ter Ordnung erhalten wird.

Aber Salmon konnte sich nun den Methoden Cayleys in der *Formentheorie* nicht länger verschließen; und so wird er, von 1853 an, zu einer näheren Beschäftigung mit invarianten Bildungen an sich geführt, die in dem Lehrbuch (21) von 1859 über die Algebra der linearen Transfor-

---

(23) On quaternary cubics.
(Proceed. of the R. Soc. of London, X (1859—60), p. 513—514, vom 14. Juni 1860; Philos. Transact. of the R. Soc. of London, vol. 150 (1860), p. 229—239).

(24) A treatise on the analytic geometry of three dimensions. 1862. 3te Aufl., mit Unterstützung von Cayley, 1874; etc. (Erste deutsche Bearbeitung: erster Teil 1863, zweiter Teil 1865.)

mationen gipfelt. Er liefert zuerst (17) nur einige Beispiele zum symbolischen Kalkül: über binäre Formen, über die Kovarianten 2^{ten} Grades für die Kurve 4^{ter} Ordnung, über die Cayley-Hessesche Methode der Doppeltangenten einer Kurve. Als eine geschickte Behandlung von Identitäten erscheint die Untersuchung (19); sie geht von einer invariantentheoretischen Auffassung einer von Cayley (ibid.) gegebenen Gleichung aus — in der Form

$$3(S\Pi - \Sigma P) \equiv H'U - U'H,$$

wo U eine ternäre Form 3^{ten} Grades; H deren Hessesche Form; S, P die quadratische, bezw. lineare Polare eines Punktes x' in bezug auf U; Σ, Π dasselbe in bezug auf H; H', U' die Werte von H, U für $x \equiv x'$ vorstellen —, und entwickelt daraus nicht nur Salmons oben erwähnten Satz über den Tangentialpunkt eines Punktes x' von U, sondern auch die Gleichung des Kegelschnitts durch fünf konsekutive Punkte von U, Plückers Konstruktion eines Punktes, in welchem ein Kegelschnitt 6-punktig berühren kann, und die 9-punktig berührenden Kurven 3^{ter} Ordnung. Nach einer Mitteilung Cayleys in den Philos. Transact. von 1857 sind auch dessen Resultate über die Cayleysche Kurve („Pippian") zum Teil der Korrespondenz mit Salmon zu verdanken. Das Buch von 1859 selbst ist einer Darlegung der Methoden von Cayley und Sylvester gewidmet, doch beschränkt sich Salmon dabei nicht auf die symbolischen Methoden. Er verschmäht bei den Formen niedrigeren Grades auch die Behandlung in kanonischer Darstellung nicht und leitet aus solcher Darstellung der ternären kubischen Form schon die windschiefe Kovariante, 9^{ter} Ordnung in den Variablen, von Brioschi (1863) und die entsprechende Kontravariante Hermites (1864) ab. Von neuen allgemeinen Berechnungen finden sich nur einige für binäre Formen 5^{ten} Grades, so der schiefen Invariante Hermites, deren Verschwinden schon gedeutet wird; für Formen 6^{ten} Grades erst in der zweiten Auflage des Buches.

Ein noch innigeres Zusammenwirken des geometrischen Denkens mit der formentheoretischen Richtung kommt in drei weiteren wichtigen Problemen zur Geltung, mit welchen sich Salmon noch beschäftigt: in der Frage nach den eine Fläche singulär berührenden Geraden, in einer neuen Methode für die algebraische Bestimmung der Doppeltangenten einer Kurve n^{ter} Ordnung, in Berechnungen der Invarianten für die kubische quaternäre Form.

Im Jahr 1857 (18) nahm Salmon die *algebraischen Flächenprobleme* wieder auf, die ihn schon 1849 (5) bei den Flächen 3^{ter} Ordnung beschäftigt hatten. Er bestimmt für eine Reihe von Fragen über singulär berührende Geraden mit Hilfe der Joachimsthalschen Methode jeweils die zugehörigen Polarengleichungen und daraus mit Hilfe seiner zu diesem

Zwecke angestellten abzählenden Betrachtungen (10) die Endzahlen der Probleme. Insbesondere gelangt er aber auch, bei den Linien, die drei Bedingungen erfüllen, zu der Gleichung der schon oben angeführten Fläche S. Freilich in noch komplizierter Gestalt; aber das Prinzip der Elimination aus einer kubischen, einer quadratischen und zwei linearen Formen in vier homogenen Variablen — nämlich die symmetrischen Funktionen der den letzteren drei Formen genügenden Wertsysteme in die erstere Form einzusetzen — ist von Clebsch (Cr. J. 58, 1860) aufgenommen und dabei jene Gleichung unter Verwendung geränderter Determinanten, durch eine „wundervolle Analysis", wie sich Salmon in seiner Raumgeometrie ausdrückt, in eine verbesserte Form übergeführt worden: dieselbe Form, auf die gleichzeitig in (23) auch Salmon selbst auf direkterem Wege gekommen ist. Auch bezüglich der in (18) enthaltenen Geradenprobleme mit drei und vier Bedingungen sind Salmons Andeutungen von Clebsch (ibid. und Cr. J. 63) verfolgt und seine Zahlenresultate von Cremona und Sturm bestätigt worden. Ferner aber ist Salmon in dieser Arbeit nicht nur zur Bestimmung des Grads der Berührungsinvariante zweier Kurven oder dreier Flächen gelangt, sondern die Gleichung für S gab ihm auch Veranlassung zu formentheoretischen Versuchen, bezüglich Überschiebungen einer Form über Potenzen ihrer Hesseschen — Versuchen, die ihn nun zur Lösung des *Doppeltangentenproblems* für eine ebene Kurve führen sollten.

Aus Salmons Darstellung des Tangentialpunktes einer Kurve 3^{ter} Ordnung hatte Cayley (cf. Philos. Transact. Bd. 149, 1859) die Vermutung gezogen, daß auch bei einer Kurve n^{ter} Ordnung die $n-2$ weiteren Schnittpunkte einer Tangente analog durch eine Kurve $(n-2)^{ter}$ Ordnung ausgeschnitten werden könnten — wonach man durch Diskriminantenbildung leicht zur Bildung der Gleichung der Kurve kommen würde, welche die Berührungspunkte der Doppeltangenten ausscheidet. Salmon gelang es nun, die Bildungsweise der Gleichung einer solchen Kurve $(n-2)^{ter}$ Ordnung aufzufinden (20), (22), freilich durch einen Schluß aus ihrer noch möglichen Mannigfaltigkeit und den ihm bekannten Ordnungszahlen: er setzt sie linear zusammen aus den Polaren $(n-2)^{ter}$ Ordnung des Berührungspunktes x' in bezug auf die Hesseschen Kurven, sowohl der ursprünglichen Kurve, als ihrer sukzessiven Polaren nach x'. Die Koeffizienten bestimmt er durch spezielle Koordinatenannahmen nur bei den Kurven 4^{ter} und 5^{ter} Ordnung, unter induktiver Verallgemeinerung auf Kurven n^{ter} Ordnung. Ein auf Invariantenprinzipien beruhender Beweis dieser allgemeinen Formeln findet sich aber erst bei Cayley (in der o. z. Arbeit), eine Durchführung des Verfahrens bei Dersch (diese Annalen, Bd. 7).

Die letzte mathematische Arbeit dieser Richtung ist der *Invarianten-*

theorie der quaternären kubischen Formen gewidmet (23). Hier handelt es sich wieder um eine Untersuchung an einer kanonischen Form: an der von Sylvester (1851) gefundenen Darstellung durch eine Summe von Kuben von fünf Variablen, zwischen denen eine identische lineare Relation besteht. Schon Sylvester hatte so die Hessesche Kovariante berechnet; Salmon aber bildet nun den komplizierten algebraischen Apparat nach allen Seiten virtuos aus, natürlich mit Ausnahme des Systembegriffs im Sinn der rational-ganzen Darstellung. Aus kontravarianten Bildungen in fünf Ebenenkoordinaten, an deren Stelle Differentialsymbole eingeführt werden, werden Kovarianten und Invarianten abgeleitet, insbesondere das System der fünf fundamentalen Invarianten der Grade 8 bis 40 und als deren Funktionen die Diskriminante und das Quadrat der schiefen Invariante vom Grade 100. Es wird weiter ein System von vier Kovarianten ersten Grades für eine typische Darstellung — in Analogie mit Hermites Darstellung der binären Formen 5^{ten} Grades — gefunden, und es werden die einfachsten linearen Kontravarianten konstruiert. Die Berechnung der Kovariante S haben wir schon angeführt. In den symbolischen Ausdrücken der fünf Invarianten für die allgemeine kubische Form begegnet sich dann Salmon wieder mit Clebsch, der um dieselbe Zeit (Cr. J. 58, März 1860) daraus die Pentaëdergleichung herstellt.

Bezüglich der übrigen Forschertätigkeit Salmons haben wir nur noch auf wenige Einzelheiten hinzuweisen, die in den Büchern und zugehörigen kleinen Aufsätzen niedergelegt sind.

Eine ganze Reihe geometrisch-algebraischer Untersuchungen ist dem *Büschel von Kurven oder Flächen 2^{ten} Grades* gewidmet, teils für allgemein projektive, teils für metrische Probleme.*) Es handelt sich dabei hauptsächlich um Interpretation der Koeffizienten der nach dem Parameter entwickelten Diskriminante des Büschels und von Invariantenrelationen zwischen diesen Koeffizienten, von denen bis dahin erst wenige durch Hesse und Smith gedeutet waren. So finden sich: die Gleichung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte in Linienkoordinaten; die des Staudtschen Kegelschnitts, welcher die acht Tangenten dieser Punkte berührt, mit seiner Bedeutung als Enveloppe; Betrachtungen über ein- und umgeschriebene Polygone im Anschluß an Cayley, aber mit Salmon eigentümlicher Zurückführung auf Dreiecke; eine große Menge von Örtern überhaupt. Die Spezialisierung eines der Kegelschnitte in einen Kreis oder einer der Flächen 2^{ten} Grades in eine Kugel liefert ihm den Satz

*) Siehe besonders Quart. J. I und II (1857); Philos. Magaz. (4) XIII (1857); Nouv. Ann. de Math. XVII (1858), sowie die „Kegelschnitte" und den ersten Teil der Raumgeometrie: „Flächen zweiten Grades".

von Faure, die Parallelkurven der Ellipse, die Gleichung der Zentrafläche einer Fläche 2^{ten} Grades. Auch die bei Salmon zuerst auftretende Darstellung des Orthogonalkreises dreier Kreise als Jacobische Kurve dieser Kreise, sowie seine durch besondere Koordinaten bewirkte leichte Behandlung von sphärischen Figuren möchten wir nicht unerwähnt lassen. Endlich sei aus den „Höheren ebenen Kurven" von 1852 für die Kurven 3^{ter} Ordnung und die 4^{ter} Ordnung mit drei Doppelpunkten auf übersichtliche gestaltliche Betrachtungen, für die allgemeinen Kurven 4^{ter} Ordnung auf die frühe Einsicht in die Verhältnisse der Doppeltangenten — so die Angabe der richtigen Anzahl der Kegelschnitte, die je durch die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten gehen — hingewiesen.

In der Würdigung Cayleys (diese Ann. Bd. 46) ist ausgesprochen worden, daß die Beziehung zwischen ihm und Salmon vielfach der Wissenschaft zu gut gekommen sei und besonders in den Büchern Salmons zur Verbreitung der algebraischen Ideen Cayleys und Sylvesters gedient habe. Die mathematische Tätigkeit Salmons fällt wesentlich in den Zeitraum, in dem Cayley als Jurist, aber mathematisch produktiv, in London lebte; und doch ging aus der wissenschaftlichen Beziehung zwischen beiden Forschern, die anfänglich nur brieflich gepflegt wurde, nach und nach eine enge Freundschaft hervor: in der ganzen Periode haben sie sich immer in die Hände gearbeitet. Freilich hat Salmon nicht, wie es Cayley in dem Bereich der algebraischen Formen getan, ein gänzlich neues Forschungsgebiet eröffnet und den Nachkommen zur Durcharbeitung hinterlassen; er hat sich sogar, äußerlich betrachtet, nur mit einigen wenigen Problemen beschäftigt. Aber auch diese Beschäftigung war richtunggebend und pfadfindend innerhalb des *algebraisch-geometrischen Gebiets*, und einige Wege hat sie selbstständig gebahnt, die sogar von Cayley und von Clebsch mit Erfolg eingeschlagen werden konnten. Im ganzen wird man aber von der gemeinsamen Tätigkeit zu sagen haben, daß Cayley der Führende, Salmon der anregende Begleiter war. Die Durchführung der Gedanken war nicht Salmons Sache, und von irgend welcher Systematik in der Ausführung einer Methode war er weit entfernt. Dagegen ist sein Gedankengang original und voll geometrisch-intuitiven Geistes, er bringt es mehrmals zu algebraischen Ansätzen, die aus dem Geiste der Formentheorie herausgeholt sind. Dabei steht er ganz auf dem Boden der englischen induktiven Richtung, seine Arbeit charakterisiert sich durch eine innige Verbindung dieser formentheoretischen Ansätze mit den abzählenden Problemen, und er erscheint als reiner *Empirist*, fast noch mehr als Cayley. Und obwohl auch seine Noten eine völlige Gleichgültigkeit gegen die äußere Form zeigen, ist diese Forschertätigkeit Salmons

doch, zusammengenommen mit der Cayleys, ein wesentliches Glied in der Entwicklung und Handhabung der Methoden der Polarentheorie geworden, und sie bildet eine vermittelnde Stufe zwischen den Arbeiten von Plücker-Hesse und denen von Clebsch.

Wenn so Salmon, der *Forscher*, eine feste Stellung in den ersten Stadien der algebraisch-geometrischen Wissenschaft hat, so ist doch von Salmon, dem *Lehrer*, ein sehr viel mächtigerer Strom ausgegangen, der das ganze Reich dieser Wissenschaft befruchtet hat. Ich spreche von seinen vier in allen Ländern verbreiteten Büchern.

In dem Vorwort zur ersten Auflage der Higher plane curves erklärt Salmon als leitende Idee: „Es ist in jedem Teile der Mathematik zu verlangen, daß elementare Bücher mit dem Fortschritt der Wissenschaft Schritt halten. Eine neue Provinz kann kaum als der Analysis gewonnen angesehen werden, bevor durch das eroberte Gebiet Wege gelegt sind. Es ist wünschenswert, daß jeder neue Studierende, der sich irgendwo Originalforschungen zu widmen gedenkt, seine Kräfte so rasch wie möglich auf die unentdeckten Teile der Wissenschaft lenken kann, und daß seine Fähigkeiten nicht im Auffinden bekannter Wahrheiten verschwendet noch seine Zeit vergeudet wird, wenn er ohne Führer durch die Wildnis der Zeitschriften jagen muß."

In diesem Sinne sind seine Werke zugleich als Lehrbücher und als Handbücher zu betrachten. Sie dienen nicht nur dem angehenden Forscher, sondern sie begleiten auch den gereiften Gelehrten durch seine Lebensarbeit hindurch. Sie führen zusammenhängend in die verschiedenartigen Begriffe und Methoden ein, welche die algebraisch-geometrische Forschung nach und nach ausgebildet hat, und sie sind zugleich reich genug in Darlegung der Einzelresultate, um als Kompendien auf die mannigfaltigsten Fragen aus dem Gebiet Rede zu stehen. Natürlich hat ihnen ihr Verfasser diese Eigenschaft nur im Keim mitgeben können, mit vielen Lücken und auch Schwächen; aber wie kräftig der Trieb war, wie sie geradezu nach Weiterführung und Anpassung verlangten, das zeigen die vielen mit der Wissenschaft in Fühlung gebliebenen Auflagen, deren sich in England seit Anfang der siebziger Jahre A. Cayley, in Deutschland seit Anfang der sechziger Jahre W. Fiedler annahm. Diese Anlage zu stetigem Fortschritt verdanken sie gerade dem Umstand, daß sie in scheinbar systemloser englischer Art, in Wirklichkeit im besten Sinne kompilatorisch aus eigner und fremder Arbeit gehalten sind. Aus der systematischeren deutschen Art sind wohl, neben Werken, die wesentlich der Darlegung eigener Forschung dienen, ausgezeichnete Lehrbücher der algebraischen Geometrie entstanden; aber da auch sie vorzugsweise spezielle Methoden verfolgen oder da ihr eigenartiges Gepräge sich gegenüber einer Fortführung von

andrer Hand als spröde erweist, müssen sie auf die Dauer stabilisiert bleiben und können nicht den Grundstock für entwicklungsfähige allseitige Kompendien abgeben.

Wenn in Salmons Büchern, soweit sie von ihm selbst besorgt sind, eine einseitige Hervorkehrung besonderer Methoden, ja auch eine gründliche Durcharbeitung und Beherrschung aller Einzelheiten, in den höheren geometrischen Teilen insbesondere auch eine genaue Kenntnis älterer und gleichzeitiger Autoren noch zurücktreten, so erhalten sie dafür ihre innere Kraft aus der Massenbeherrschung und aus dem energischen Durchdenken des Stoffes auf Grund aller neueren Anschauungen, vor allem derjenigen der englischen algebraischen Schule. Sie sind zu einer Zeit verfaßt, in welcher die Grundgedanken der heutigen Methoden erst in die Erscheinung zu treten begonnen hatten; und Salmon war der Erste, der es unternahm, ihnen allen Gestalt zu geben. Man durchläuft in den aufeinanderfolgenden Auflagen eine Reihe von Stadien der Wissenschaft, von ihrer Kindheit bis heute, von den elementaren Ausgangspunkten aus bis zu den projektiven Grundlagen hin, von dem Gesichtspunkt, der über die Inversion nicht hinausreicht, bis zu dem modernen der allgemeinen Transformationstheorien: je zahlreicher, inhaltsvoller und prinzipieller die Methoden werden, um so mehr stützen sie sich gegenseitig, um so mehr beleuchten sie einander. Und bei allen Fortführungen und Umarbeitungen ist etwas von dem frischen Reiz übrig geblieben, der den Werken in ihrem Ursprung aus dem jugendlich aufstrebenden Wissenschaftszweige eingepflanzt worden ist.

Wir können von den Büchern Salmons nicht scheiden, ohne auszusprechen, wie viel wir in Deutschland dem Manne verbunden sind, der einen Teil seiner Lebensarbeit darauf verwandt hat, sie in ihrer deutschen Bearbeitung auf der Höhe der Wissenschaft zu halten und auch den Leistungen fremder Autoren, wenigstens in Auszügen und historischen Noten, gerecht zu werden: Wilhelm Fiedlers Name ist für uns untrennbar geworden von dem Salmons, seine Bearbeitungen haben in Deutschland die Kenntnis der Geometrie verbreitet und unsere Forschung erziehen helfen. Solange diese Werke weiterhin der fortschreitenden Forschung offene Pforten gewähren werden, so lange wird auch ihr Ansehen unverwelkt dastehen.

Erlangen, im April 1905.

Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie*).

Di

Francesco Severi a Parma.

I.

Le superficie algebriche, considerate dal punto di vista fecondo delle trasformazioni birazionali, si distribuiscono in due grandi famiglie, secondo che i *generi*, *geometrico* e *aritmetico*, sono uguali tra loro, oppure il primo è maggiore del secondo. Quelle della prima famiglia diconsi *regolari*, e quelle della seconda *irregolari*.

Senza riandare alla definizione dei generi, si può presentare questa suddivisione sotto una forma alquanto diversa, ricordando un criterio di regolarità, dovuto al sig. Castelnuovo**).

Una superficie algebrica irriducibile, d'ordine m,

$$F(xyz) = 0, \tag{1}$$

dotata di singolarità ordinarie, cioè di una linea doppia con un numero finito di punti tripli***), è regolare o irregolare secondo che le superficie d'ordine $m-3$, *aggiunte* ad F (cioè passanti per la sua linea doppia), segano o no sopra un piano qualunque dello spazio, non tangente ad F, tutte quante le curve d'ordine $m-3$, aggiunte alla sezione di F con questo piano.

Così ad es. son regolari le superficie dello spazio ordinario prive di punti multipli, le superficie razionali, le superficie che hanno per linea

*) Un estratto dei risultati principali contenuti in questa Memoria, è già stato pubblicato sotto lo stesso titolo, tra i Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (t. 13, serie 5ª, 1904).

**) Ved. la Memoria, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (Annali di Matematica, (2), t. XXV. (1897) n° 28.

***) Nella geometria delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, tale ipotesi non è restrittiva, perchè, com' è ben noto, ogni superficie algebrica si può trasformare birazionalmente in un' altra dotata di sole singolarità ordinarie (Noether, Del Pezzo, Segre, Levi B.).

doppia la completa intersezione di due altre*), ecc; mentre sono irregolari le rigate irrazionali, le superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva di genere > 0; ecc, ecc.

Lo studio di alcune particolari classi di superficie irregolari, ha fatto presentire da tempo un legame intimo tra l'irregolarità di una superficie, e l'esistenza su questa di sistemi continui di curve (algebriche), non contenuti in sistemi lineari; nonchè di quegli integrali di differenziali totali, che il sig. Picard ha felicemente introdotti nella teoria delle funzioni algebriche di due variabili**).

Ma prima di parlare dei contributi che sono stati portati finora in quest' ordine di questioni, e di ciò che ad essi aggiunge il presente lavoro, stimo opportuno di richiamare brevemente alcune definizioni ed alcuni teoremi, concernenti gl'*integrali di Picard*, affinchè il lettore abbia dinanzi a sè un quadro possibilmente completo***).

Se R, S son due funzioni razionali appartenenti alla superficie (1), affinchè il differenziale

$$R dx + S dy$$

sia esatto, cioè possa riguardarsi come differenziale totale di una funzione (generalmente polidroma) appartenente al campo di razionalità definito dalla (1), occorre e basta che sia soddisfatta la *condizione d'integrabilità*

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dS}{dx}, \tag{2}$$

quando, beninteso, nel fare le derivazioni, si riguardi z come funzione algebrica di x, y. Supposta soddisfatta la condizione d'integrabilità, dicesi che l'integrale

$$J = \int R dx + S dy \tag{3}$$

presenta una *singolarità polare* od un *polo* in un punto $(x_0 y_0 z_0)$ di F, quando scegliendo una curva qualunque della superficie, uscente da $(x_0 y_0 z_0)$, e rappresentata nell' intorno di questo punto dalle formole

$$x = x_0 + x(t), \quad y = y_0 + y(t), \quad z = z_0 + z(t), \tag{4}$$

ove $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son funzioni analitiche olomorfe nell' intorno di $t = 0$ e che si annullano in $t = 0$, l'integrale

$$\int f(t) dt,$$

*) Notiamo incidentalmente che quest'affermazione segue, in base al criterio di regolarità di Castelnuovo, dal teorema dimostrato al n° 14 della mia Nota, *Su alcune questioni di postulazione* (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. XVII, 1903).

**) Cfr. ad es. Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, t. I, 1897: t. II, 1900—1904). Da questo libro trarrò, talora con qualche piccola variante, le definizioni richiamate più sotto.

***) Per altri risultati posteriori a quelli contenuti nel presente lavoro, veggasi la nota aggiunta alla fine della Memoria (16 luglio 1905).

che si ottiene da J mediante la sostituzione (4), presenta in $t = 0$ una singolarità polare.

L'integrale J dicesi *di 2ª specie*, quando su tutta la F presenta al più singolarità polari. In particolare dicesi *di 1ª specie*, quando conservasi finito in *ogni* punto di F.

Gl'integrali di 2ª specie possono essere *trascendenti* e *algebrici:* in quest' ultimo caso riduconsi a funzioni razionali. Un integrale di 1ª specie, che non sia costante su tutta la superficie, non è mai algebrico. Nel seguito, quando non si avverta esplicitamente il contrario, parlando degli integrali di 1ª o di 2ª specie, intenderemo sempre che sieno trascendenti.

Come nello studio degli integrali abeliani si presenta opportuna la rappresentazione della funzione algebrica di una variabile, sopra una superficie di Riemann, così nello studio degli integrali di Picard giova figurarsi la varietà reale chiusa V, a quattro dimensioni, i cui punti rappresentano le soluzioni complesse dell'equazione (1).

In forza della condizione (2), l'integrale J, preso tra due punti qualunque di V, ha un valore che non s'altera deformando con continuità il cammino d'integrazione; cosicchè, chiamando *periodo* il valore dell' integrale lungo un *ciclo lineare* di V, cioè lungo un cammino chiuso tracciato su V con un determinato verso, per una deformazione continua del ciclo, il periodo non s'altera.

Da ciò deriva una notevole relazione tra i periodi di un integrale di differenziale totale ed i cicli lineari di V. Per enunciarla brevemente, converrà premettere alcune definizioni.

Due cicli si diranno *equivalenti* (*omologhi* secondo Poincaré) quando, senza uscire da V, si posson ridurre l'uno all' altro per deformazione continua.

Se σ è un ciclo, col simbolo $k\sigma$, ove k è un intero positivo o negativo, s'intende il ciclo σ percorso k volte nel verso di σ o nel verso contrario, secondo che k è positivo o negativo.

Il ciclo $k\sigma$ si può concepire come un'elica di passo infinitesimo, la quale gira k volte nel verso debito, ed ha i due estremi saldati tra loro.

Si chiamerà *somma dei due cicli* σ_1, σ_2, e s'indichera con $\sigma_1 + \sigma_2$, un terzo ciclo che, per deformazione continua, si possa ridurre all' insieme dei due dati (percorsi ciascuno col proprio verso), e di una linea, percorsa una volta in un senso ed una volta nell' altro, la quale congiunga un punto di σ_1 con un punto di σ_2.

Da queste definizioni discende un significato preciso per la *combinazione lineare*

$$k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + \cdots + k_r\sigma_r,$$

ove $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ son cicli, e $k_1, \cdots, k_r$ son interi, positivi o negativi.

Più *cicli* diconsi *dipendenti*, quando un multiplo conveniente di uno di essi, è equivalente ad una combinazione lineare dei rimanenti.

Diconsi *indipendenti* nel caso contrario.

Si dimostra che il numero dei cicli indipendenti di V, non riducibili a punti per deformazione continua, raggiunge un massimo finito, che si suole indicare con $p_1 - 1$. In altri termini, si possono fissare entro V $p_1 - 1$ cicli indipendenti, per modo che ogni altro ciclo risulti dipendente da questi. Il numero p_1 dicesi *ordine di connessione lineare* della varietà V, o della superficie F, di cui V è l'immagine reale.

Se $p_1 = 1$, ogni ciclo di V può ridursi ad un punto per deformazione continua.

I periodi non nulli di un integrale di 2ª specie appartenente ad F, provengono tutti da cicli lineari di V, che non possono ridursi a punti per deformazione continua*); ed anzi i *periodi distinti* (cioè non legati da nessuna relazione lineare a coefficienti interi) di un integrale di 2ª specie generico, son tanti quanti i cicli indipendenti di V.

Ma il sig. Picard ha fatto un altro passo innanzi veramente importante, dimostrando che: se più *integrali di 2ª specie* diconsi *algebricamente distinti* allorquando una loro combinazione lineare qualunque, a coefficienti costanti, non riducesi mai ad una funzione razionale, il numero degli integrali distinti appartenenti alla superficie, è uguale al numero dei loro periodi, cioè a $p_1 - 1$.

Questa proposizione ne rammenta un' altra, del tutto analoga, relativa agl' integrali abeliani di 2ª specie, appartenenti ad una curva. Tuttavia un divario profondo si riscontra fra gl'integrali abeliani e gl'integrali di Picard. Invero, sopra una curva priva di punti multipli, esistono integrali trascendenti di 2ª specie, mentre non esistono integrali di Picard trascendenti della 2ª specie, sopra una superficie priva di punti multipli**).

Per le curve basta la *irrazionalità* per assicurare l'esistenza di integrali abeliani di 1ª e 2ª specie; mentre tale condizione non basta per assicurare, sopra una superficie, l'esistenza di integrali di Picard delle due specie.

Si presenta dunque come essenziale, nella teoria delle superficie algebriche, la questione di assegnare le condizioni d'esistenza di tali integrali: e si presenta tanto più difficile e tanto più attraente, in quanto ad una gran parte delle induzioni, manca il fondamento dell'analogia!

Ecco ora qual' è lo stato attuale della questione.

Il sig. Humbert ha dapprima dimostrato che una superficie, la quale contenga un sistema continuo di curve, non appartenente ad un sistema

*) Mentre ciò non accadrebbe se l'integrale fosse *di 3ª specie*, cioè se possedesse singolarità logaritmiche.

**) Picard et Simart, t. I, pag. 91 e 119.

lineare, ammette integrali di differenziali totali di 1ª specie*); ed il sig. Enriques ha successivamente stabilito che una superficie algebrica, la quale possegga p integrali di differenziali totali di 1ª specie, con $2p$ periodi, contiene un sistema continuo di curve, non appartenente ad un sistema lineare**).

La irregolarità delle superficie che si considerano in questi teoremi, discende dal fatto che, sopra una superficie regolare, ogni sistema continuo di curve appartiene ad un sistema lineare***). Abbandonando per ora i tentativi diretti a costruire sopra ogni superficie che possegga integrali di 1ª e di 2ª specie, una serie continua, non appartenente ad un sistema lineare, mi son proposto di porre in relazione diretta l'esistenza degli integrali di Picard, colla irregolarità della superficie, e son giunto così al teorema:

Ogni superficie che possegga integrali di Picard della 2ª specie (in particolare di 1ª), è irregolare.

In altri termini:

Per una superficie regolare F l'ordine di connessione lineare è uguale ad 1; cioè ogni cammino chiuso, tracciato sulla varietà riemanniana immagine reale di F, può ridursi ad un punto per deformazione continua†).

La dimostrazione di questo teorema è lo scopo precipuo della presente Memoria; tuttavia intorno ad essa si raggruppano altri risultati, tra i quali ricorderò in modo speciale il seguente, che precisa maggiormente il teorema fondamentale:

Data una superficie algebrica di generi, geometrico ed aritmetico, P_g e P_a,

---

*) *Sur une classe de surfaces algébriques* (Comptes rendus, 1893). Ved. pure la Memoria, *Sur quelques points de la théorie des surfaces algébriques* (Journal de Math., 1894).

**) *Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce* (Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse, (2), t. 3, 1901). Ved. pure un'altra dimostrazione dello stesso teorema, nella mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXXIX, 1904); n° 7.

***) Cfr. Enriques, *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie regolare* (Rendiconti di Palermo, 1899). Il caso del fascio irrazionale era stato trattato prima da Castelnuovo. — Ved. pure la mia Nota, *Osservazioni sui sistemi continui* ···, ove trovasi di più dimostrato che l'irregolarità $(P_g - P_a)$ di una superficie con p integrali finiti a $2p$ periodi, non è inferiore a p.

† In particolare si ha il teorema di Picard, già citato, sulle superficie dello S_3 prive di punti multipli; e l'estensione di questo teorema dovuta a Berry (Acta math., 27, 1903, pag. 157). — Si confronti il teorema del testo con quest' altro relativo alle curve: „Ogni cammino chiuso tracciato sulla superficie riemanniana, immagine d'una curva razionale, può ridursi ad un punto per deformazione continua."

l'irregolarità $P_g - P_a$ della superficie, è almeno uguale all' eccesso del numero degli integrali di 2ª specie algebricamente distinti, sul numero degli integrali di 1ª specie linearmente indipendenti.

II.

Passerò ora ad esporre le linee generali di questa Memoria.

Un integrale (3) di 2ª specie, appartenente alla superficie F, riguardato come funzione del punto scorrente sopra una curva algebrica irriducibile di F, dà luogo ad un integrale abeliano di 2ª specie.

Se la curva è variabile in un fascio, l'integrale J stacca razionalmente su essa (rispetto al parametro che ne individua la posizione entro al fascio) un gruppo di un numero finito di poli, i quali, al variare della curva, descrivono una o più curve algebriche irriducibili, che si dicono le *curve polari* dell' integrale J*).

In relazione a queste curve polari io introduco gli *ordini d'infinito* e le *funzioni razionali residue* (dei varî ranghi), le quali hanno un ufficio analogo a quello dei coefficienti delle potenze negative dell' argomento, negli sviluppi di Laurent, che caratterizzano un integrale abeliano di 2ª specie intorno ai suoi poli.

Supposto che gli assi di riferimento sieno in posizione generica rispetto ad F, e supposto inoltre che tra le sezioni di F coi piani $y = \text{cost.}$, non si trovi nessuna curva polare di J (il che può sempre ottenersi operando, nel caso, una conveniente trasformazione omografica), si dirà che lungo la curva irriducibile C *l'integrale J diviene infinito d'ordine s*, allorquando l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$, staccato da J sulla sezione di F col piano generico $y = \bar{y}$, ha per poli d'ordine s i punti d'intersezione di questo piano con C.

Nell' intorno di ciascun polo $(x_0\bar{y}z_0)$, l'integrale $J(x\bar{y}z)$, riguardato come funzione di x, si sviluppa in una serie di potenze dell' argomento $x - x_0$, la quale comincia con un termine in $\frac{1}{(x-x_0)^s}$.

Al variare del punto $(x_0\bar{y}z_0)$ lungo la curva C, il coefficiente di $\frac{1}{(x-x_0)^h}$ $(h = s, s-1, \cdots, 1)$, risulta funzione algebrica uniforme, cioè funzione razionale, del punto stesso. È questa funzione ch'io chiamo la *funzione razionale residua di rango h, individuata da J sulla curva polare C.*

Nel § 1 prendo a studiare la funzione residua $\varphi(xyz)$, di rango 1, individuata sulla propria curva polare, da un integrale $J(xyz)$ che presenti soltanto poli di 1° ordine, distribuiti sopra un' unica curva C, irriducibile

*) Picard et Simart, t. I, pag. 147.

e priva di punti multipli; e determino il gruppo dei poli ed il gruppo degli zeri di φ (Teorema I).

Da questa determinazione segue che, variando J nella totalità degli integrali che divengono infiniti del 1° ordine soltanto lungo C, rimangono fissi *tutti* i poli di φ e variano soltanto *alcuni* degli zeri. Questi ultimi zeri variabili costituiscono un gruppo caratteristico di C*), che chiamo il *gruppo caratteristico individuato su C dall' integrale J.*

Tutto ciò vale, in particolare, quando J riducesi ad una funzione razionale: in tal caso il gruppo caratteristico individuato da J su C, è il gruppo base del fascio costituito dalle curve $J = \text{cost.}$

Nel § 2 dimostro anzitutto che sopra una superficie F, che abbia l'ordine di connessione lineare $p_1 > 1$, esistono sempre integrali di 2ª specie, i quali non si possono ridurre alla 1ª specie, per sottrazione di funzioni razionali. Da ciò e dai risultati del § 1, segue in modo semplicissimo il teorema fondamentale, facendo uso del seguente criterio d'irregolarità, dovuto al sig. Castelnuovo:

„Se sopra una superficie algebrica esiste un sistema lineare completo, la cui serie caratteristica non sia completa, la superficie è irregolare." (Ved. le citazioni alla fine del § 2.)

Ma la dimostrazione del teorema fondamentale poggia essenzialmente sull' ipotesi che sopra ogni superficie col $p_1 > 1$, si possa costruire un integrale di 2ª specie coi periodi arbitrari e con una sola curva polare del 1° ordine, prefissata.

Nel § 3 ottengo la giustificazione di quest' ipotesi, dimostrando che *ogni integrale di 2ª specie appartenente ad una superficie algebrica, si può ridurre, per sottrazione di funzioni razionali, ad un integrale che possegga (al più) una sola curva polare del 1° ordine, irriducibile e priva di punti multipli* (Teor. VI).

A questo risultato pervengo mediante un' analisi assai minuta, concernente gli zeri ed i poli delle funzioni residue dei ranghi più alti, individuate sopra le proprie curve polari, da un integrale che divenga infinito di ordini qualunque lungo più curve (Teor. III).

Infine determino maggiormente il teorema fondamentale, nella forma che ho indicata terminando la parte I di quest' introduzione.

---

*) Il lettore potrà vedere la definizione generale di gruppo caratteristico nella nota *) a piè della pag. 32. Nel caso (che del resto non è per noi restrittivo) in cui la C appartiene ad un sistema lineare infinito, cioè nel caso in cui esiste una funzione razionale, i cui punti di un determinato livello costante son distribuiti lungo C, per *serie caratteristica* s'intende il sistema di gruppi di punti segati su C dalle altre curve del sistema. Ogni gruppo appartenente a questa serie, resa *completa* se non lo è, dicesi un gruppo caratteristico di C.

§ 1.

Sulla funzione residua a cui dà luogo un integrale che possegga una sola curva polare del 1° ordine.

1. Sia

$$J(xyz) = \int R dx + S dy$$

un integrale di Picard, della 2ª specie, appartenente alla superficie algebrica d'ordine m,

$$F(xyz) = 0,$$

della quale indichiamo con D la linea doppia; e supponiamo che J possegga un' unica curva polare del 1° ordine C, irriducibile e priva di punti multipli, nè coincidente con alcuna delle sezioni piane $y =$ cost.

Immaginando di aver già assoggettato la F ad una trasformazione omografica generica, si posson ritenere soddisfatte le condizioni seguenti:

1ª) Le funzioni razionali R, S si annullano semplicemente lungo la curva all' infinito di F;

2ª) esse non divengono infinite in nessun piano $y =$ cost. o $x =$ cost.*)

Ogni punto comune a C ed al piano generico $y = \bar{y}$, essendo un polo del 1° ordine per l'integrale abeliano

$$J(x\bar{y}z) = \int R(x\bar{y}z) dx,$$

risulta un polo di 2° ordine per $R(x\bar{y}z)$; sicchè lungo C la $R(xyz)$ diviene infinita di 2° ordine.

Cerchiamo ora se la R può avere altre curve polari, all' infuori di C. Poichè per ipotesi una sezione $y =$ cost. non è mai curva polare di R, una curva polare diversa da C taglierà certo una sezione piana $F(x\bar{y}z) = 0$, fuori dei punti all' infinito di questa; e tali intersezioni risulteranno poli per la funzione $R(x\bar{y}z)$. Siccome inoltre in questi punti l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$ deve conservarsi finito, la $R(x\bar{y}z)$, *riguardata come funzione di* x, dovrà ivi divenire infinita d' ordine < 1; cioè i punti stessi dovranno essere di diramazione per la funzione z di x definita dalla $F(x\bar{y}z) = 0$.

Ne deriva che, fuori di C, la $R(xyz)$ può divenire infinita al più lungo la curva K segnata su F, fuori della linea doppia D, dalla superficie $F_z' = 0$. Similmente dicasi della funzione razionale S.

2. Considerando dapprima l'ipotesi che R divenga infinita lungo la curva K, si vede subito che questa è una curva polare del 1° ordine, perchè, a causa della genericità degli assi coordinati e della natura delle

*) Picard et Simart, t. I, pag. 114.

singolarità supposte in F, lo sviluppo della $R(x\bar{y}z)$ nell' intorno di un punto di diramazione $(x_0\bar{y}z_0)$, comincia con un termine in $\frac{1}{(x-x_0)^{\frac{1}{2}}}$.

Ciò posto, per studiare la funzione residua di rango 1, $\varphi(xyz)$, individuata da J sulla C (Introduzione, parte II), converrà porre la R sotto forma di quoziente di due polinomî aggiunti ad F. A tal uopo costruiscasi una superficie $B(xyz)=0$, d'ordine l, aggiunta ad F, passante doppiamente per C e semplicemente per K: ciò è sempre possibile quando l sia abbastanza grande. Se la B sega F, fuori delle curve K, C, D, lungo la curva M, pel Restsatz*) esisterà un' aggiunta $A(xyz)=0$ passante per M e segante F, fuori delle curve D, M, lungo la curva E costituita dagli zeri di R. Dall' ipotesi che la curva all' infinito di F faccia parte semplicemente della E, segue che la A è di ordine $l-1$.

Poichè la funzione $\frac{RB}{A}$ non si annulla mai (nè mai diviene infinita) su F, avremo:

$$\frac{RB}{A}=\text{cost.},$$

ed inglobando la cost. nel polinomio A, potremo scrivere

$$R=\frac{A}{B}.$$

In simil guisa si trova:

$$S=\frac{A_1}{B},$$

ove A_1 è pure di ordine $l-1$. Onde l'integrale J potrà porsi sotto la forma:

$$\int\frac{A\,dx+A_1\,dy}{B}.$$

Sviluppando ora il numeratore e il denominatore della $R(x\bar{y}z)=\frac{A(x\bar{y}z)}{B(x\bar{y}z)}$, secondo le potenze ascendenti di $x-x_0$, nell' intorno di un punto generico $(x_0\bar{y}z_0)$ della curva C, avremo:

$$(1)\quad\begin{cases}A(x\bar{y}z)=A(x_0\bar{y}z_0)+(x-x_0)\bar{A}'(x_0\bar{y}z_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\bar{A}''(x_0\bar{y}z_0)+\cdots\\ B(xyz)=B(x_0\bar{y}z_0)+(x-x_0)\bar{B}'(x_0\bar{y}z_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\bar{B}''(x_0\bar{y}z_0)+\cdots\end{cases}$$

ove $\bar{A}'$, $\bar{A}''$, $\cdots$ denotino le derivate di $A(x\bar{y}z)$ rispetto ad x, tenuto conto del fatto che z è funzione implicita di x, definita dalla $F(x\bar{y}z)=0$. Analogo significato hanno i simboli $\bar{B}'$, $\bar{B}''$, $\cdots$.

---

*) Nöther, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens*... (Math. Annalen, Bd. 8, 1874, pag. 509).

Dalla regola di derivazione delle funzioni implicite si trae:

$$\overline{B}' = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

$$\overline{B}'' = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

od anche, simbolicamente:

(2) $\overline{B}' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\frac{\partial}{\partial z}\right)B;$ (3) $\overline{B}'' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2}.$

Poichè C è doppia per B, dalla (2) rilevasi che nei punti di C, $\overline{B}' = 0$. Ma nel punto generico $(x_0 \bar{y} z_0)$ di C, sarà $\overline{B}'' \neq 0$, perchè altrimenti questo punto risulterebbe un polo d'ordine maggior di 2 per la funzione $R(x\bar{y}z)$.

Ciò premesso, facendo il quoziente delle serie (1), troviamo che nello sviluppo di $R(x\bar{y}z)$ il coefficiente di $\frac{1}{(x-x_0)^2}$ è $\frac{2A(x_0 \bar{y} z_0)}{\overline{B}''(x_0 \bar{y} z_0)}$; e quindi tale sarà (a meno del segno) il coefficiente di $\frac{1}{x-x_0}$ nello sviluppo di $J(x\bar{y}z)$; cioè avremo (a meno d'un coefficiente numerico):

$$\varphi(xyz) = \frac{A(xyz)}{\overline{B}''(xyz)}.$$

Se si osserva che nei punti di C (come risulta dalla (3)):

$$\overline{B}'' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dz}{dx}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B,$$

e che inoltre (allorquando si riguardi y come un parametro):

$$F'_x + F'_z\frac{dz}{dx} = 0,$$

potremo scrivere:

(4) $$\varphi(xyz) = \frac{A(xyz)F'^2_z}{\left(F'_z\frac{\partial}{\partial x} - F'_x\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B}.$$

Se gli assi son disposti genericamente, il numeratore di φ risulta di grado $l-1+2(m-1)$, mentre il denominatore risulta di grado $l-2+2(m-1)$: onde ciascuno dei punti all' infinito di C (costituenti il gruppo P), è un polo di 1° ordine per la funzione φ.

Sbarazzato il terreno dai punti all' infinito, vediamo quali sono i punti al finito di C, in cui annullasi il numeratore o il denominatore di φ, per poterne poi desumere, previa la soppressione degli zeri comuni ai due termini, la posizione degli altri poli e degli zeri di φ.

Il numeratore si annulla:

a) Nei punti del gruppo (CE_1)*), ove E_1 denota la curva di livello zero della R, astrazione fatta dalla curva all' infinito di F. Ciascuno di

*) Il simbolo (CE_1), che ho già usato nella mia Nota *Osservazioni sui sistemi continui di curve* ..., rappresenta il gruppo dei punti comuni alle curve C, E_1.

questi punti deve contarsi una volta tra gli zeri. — Bisogna però osservare che, se il gruppo (CE_1) possiede punti multipli (il che accade p. e. quando E_1 abbia dei contatti con C), ciascuno di questi punti va contato fra gli zeri del numeratore, colla molteplicità che gli spetta entro a (CE_1). — Nel seguito, in casi analoghi, quest' osservazione verrà sottintesa.

b) Nei punti del gruppo (CM), che son pure zeri semplici.

c) Nei punti del gruppo (CD), ciascuno dei quali va contato tre volte, perchè A si annulla ivi semplicemente, ed $F_z'^2$ vi si annulla doppiamente.

d) Nei punti del gruppo $Q = (CK)$, in ciascun dei quali il pian tangente ad F è parallelo all' asse z.

Ognuno di questi punti, essendo segnato su C dalla superficie doppia $F_z'^2 = 0$, conta 2 volte tra gli zeri del numeratore.

Passiamo ora a ricercare gli zeri del denominatore

$$\Delta \equiv \left(F_x' \frac{\partial}{\partial x} - F_x' \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B.$$

E cominciamo dall' osservare che nello sviluppo del quadrato simbolico, ogni termine viene a contenere le F_x', F_z' complessivamente al 2° grado; onde Δ passerà doppiamente per D. Fuori della D, la superficie Δ sega F lungo una curva L, il cui punto generico è geometricamente definito dalla condizione che la sua quadrica polare rispetto a B ed il pian tangente in esso ad F, si tagliano in un medesimo punto della retta all'infinito u del piano xz.

Ciò risulta dal fatto che l'equazione $\Delta = 0$ si ottiene eliminando $\frac{z'}{x'}$ tra le equazioni:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{z'}{x'}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 B = 0, \qquad F_x' + \frac{z'}{x'} F_z' = 0,$$

la 1ª delle quali dà le intersezioni della retta u colla quadrica polare del punto (xyz) rispetto a B; e la 2ª l'intersezione di u col piano polare del medesimo punto rispetto ad F.

Tenendo presente che la quadrica polare di un punto generico di C rispetto a B, si spezza nei due piani ivi tangenti a questa superficie, si conclude che Δ si annulla:

a') Nei punti del gruppo (CD). La linea L passerà per ciascuno di questi punti, perchè uno dei piani tangenti a B in un punto (CD), tocca F. Dunque, non soltanto Δ passa per ogni punto (CD) colla molteplicità 2, ma uno dei piani tangenti a Δ ivi (quello che contiene le tangenti delle curve L, D), tocca F, e quindi un punto (CD) conta tre volte fra le intersezioni di C con Δ.

b') Nei punti dei gruppi (CM) e (CK), perchè uno dei due piani

tangenti a B in ciascuno di questi punti, tocca F. Ogni tal punto conta una volta tra le intersezioni di C con Δ. — Si tenga presente, pel seguito, che il gruppo (CK) coincide col gruppo Q, definito in d).

c') Nei punti del gruppo N, in ciascun dei quali la tangente a C è parallela al piano xz. Per valutare la molteplicità d' intersezione di C e Δ in uno, O, di questi punti, trasportiamo ivi l'origine delle coordinate, prendendo come asse x la tangente a C in O, ma lasciando inalterata la posizione della retta all' infinito del piano xz, dalla quale dipende la costruzione geometrica della superficie Δ.

Poichè $\frac{\partial B}{\partial z}$ annullasi lungo la C, ed il pian tangente in O alla superficie $\frac{\partial B}{\partial z} = 0$, passa pel punto all' infinito dell' asse x, nel punto O sarà $\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial z} = 0$. Similmente si vede che in O si annulla pure $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$. Ma si può inoltre provare che la superficie $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$ ha in O con C molteplicità d' intersezione uguale a 2. Invero la $B = 0$, avendo in O contatto quadripunto coll' asse x, dai termini di B, indipendenti da y, z, esce il fattore x^4, e quindi dai termini di $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$, indipendenti da y, z, esce il fattore x^2.

Se a ciò si aggiunge il fatto che la F'_x si annulla in O, si conclude che ciascuno dei tre termini di Δ ha incontro bipunto con C in O, e quindi che lo stesso accade per la superficie Δ.*) Prescindendo dagli zeri che già appaiono comuni al numeratore e al denominatore di φ, segue che la $\varphi(xyz)$ diviene infinita del 1° ordine nei punti del gruppo all' infinito P, e del 2° ordine nei punti del gruppo N; mentre si annulla semplicemente nei punti del gruppo (CE_1) e nei punti di Q.

Ma un esame più intimo della questione permette di effettuare un' ulteriore riduzione tra gli zeri dei due termini di φ.

Se, invero, facciamo variare il piano $y = \bar{y}$, in guisa che si avvicini indefinitamente al piano $y = y_0$, *tangente* a C nel punto $(x_0 y_0 z_0)$, due poli di 1° ordine dell' integrale $J(x\bar{y}z)$ si muovono sulla C, tendendo a coincidere in $(x_0 y_0 z_0)$: onde questo punto risulta un polo di 2° ordine per $J(xy_0z)$, e quindi di 3° ordine per la funzione razionale $R(xy_0z)$. Siccome al variare di $y = \bar{y}$ verso $y = y_0$, due poli di 2° ordine di $R(x\bar{y}z)$ tendono ad $(x_0 y_0 z_0)$, affinchè questo punto risulti un polo di 3° ordine per $R(xy_0z)$, bisognerà che uno zero di $R(x\bar{y}z)$ tenda contemporaneamente ad $(x_0 y_0 z_0)$: cioè bisognerà che la curva E_1 passi per $(x_0 y_0 z_0)$.

Ne deriva che il numeratore di φ si annulla semplicemente nei punti di N, e quindi che questi punti sono in realtà poli di 1° ordine per la $\varphi(xyz)$.

*) Ho tolto la ricerca della molteplicità d'intersezione di C e Δ nel punto O, da un passo delle Lezioni del prof. Segre, ove era esposta per tutt'altro scopo.

In conseguenza viene a ridursi anche il gruppo degli zeri di φ, rimanendo costituito soltanto dal gruppo Q e dal gruppo $(CE_1) - N$, che designeremo con G.

È poi chiaro che i punti di G son caratterizzati dalla proprietà che in essi è regolare l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$ (con $\bar{y}$ parametro variabile).

Ma possiamo di più osservare che sulla curva C esiste necessariamente la serie caratteristica*), e che G è un gruppo di questa serie.

Costruiamo infatti una superficie Φ, d'ordine r, che passi semplicemente per C e seghi altrove F lungo la curva H. La jacobiana di F, Φ e di due piani dello spazio (la cui equazione si ottiene, in coordinate omogenee, uguagliando a zero il determinante funzionale di F, Φ e dei due dati piani), è una superficie d'ordine $m + r - 2$, aggiunta ad F, e segante C, fuori del gruppo (CD), nel gruppo (CH) ed in un gruppo jacobiano della serie formata dalle sezioni piane di C.**)

Considerando una superficie aggiunta d'ordine $m + r - 2$, spezzata in una superficie qualunque d'ordine $r - 1$ e in un' aggiunta d'ordine $m - 1$, ne deriva che quest'ultima sega C, fuori di (CD), in un gruppo equivalente***) a

---

*) Nella mia Nota citata, *Osservazioni sui sistemi continui* ...., ho definito la serie caratteristica di una curva C, tracciata sopra una superficie algebrica F, indipendentemente dall' esistenza di un sistema lineare infinito, a cui appartenga totalmente la C; cioè indipendentemente dall' esistenza di una funzione razionale, di cui C sia una curva di livello costante. Per comodità del lettore richiamerò brevemente questa definizione.

Determiniamo su F un sistema lineare E, tale che una delle sue curve (ma non tutte) si spezzi nella C e in una parte residua H. Se la serie lineare individuata su C dai gruppi (CE), contiene la serie lineare individuata dal gruppo (CH), la *differenza* tra le due serie riesce indipendente dalla scelta del sistema E, e dicesi la *serie caratteristica* della curva C. — Quando la C appartiene ad un sistema lineare infinito, la serie caratteristica è quella che contiene tutti i gruppi segati su C dalle altre curve del sistema.

**) Diconsi *gruppi jacobiani* di una serie lineare esistente sopra una curva C, quelli formati dai punti doppi delle singole serie lineari semplicemente infinite, contenute nella data serie.

***) Due gruppi di punti di una curva algebrica C, diconsi *equivalenti*, allorquando appartengono ad una medesima serie lineare; cioè sono gruppi di livello costante di una medesima funzione razionale. L'equivalenza s'indica col segno $\equiv$ posto fra i due gruppi.

Similmente si definisce, sopra una superficie, l'*equivalenza di due curve;* e si denota col medesimo segno.

Per la piena intelligibilità di quanto è affermato nel testo, convien ricordare che un gruppo jacobiano di una serie lineare esistente sulla curva C, equivale a due gruppi di questa serie, aumentati di un gruppo canonico. Ved. ad es. la nota a piè della pag. 11 nel mio lavoro: *Su alcune questioni di postulazione.*

$$3P + T + (CH) - (C + H, C),$$

ove T denoti un gruppo canonico di C.

Poichè la F_1' è un' aggiunta d'ordine $m-1$, avremo dunque:

$$Q \equiv 3P + T + (CH) - (C + H, C).$$

Confrontando questa relazione coll' altra

$$G + Q \equiv P + N,$$

la quale deriva dal fatto che $G + Q$ è il gruppo degli zeri e $P + N$ il gruppo dei poli della funzione razionale $\varphi(xyz)$, verrà:

$$G \equiv N - 2P - T + (C + H, C) - (H, C).$$

Se si osserva ancora che N, come gruppo jacobiano della serie segata su C dal fascio $y = \text{cost}$, equivale a $2P + T$, avremo in definitiva:

$$G \equiv (C + H, C) - (H, C),$$

la quale, secondo la definizione già richiamata della serie caratteristica (ved. la nota *) a piè della pag. 32), esprime che G è un gruppo di questa serie.

3. Passiamo ora ad esaminare l'ipotesi che la R non divenga infinita fuori di C.

Dopo aver posto, come nel caso antecedente, la funzione razionale R sotto forma di quoziente $\frac{A}{B}$ di due polinomî aggiunti ad F, si giunge all' espressione (4) della funzione residua $\varphi(xyz)$, individuata da J sulla curva C.

E l'esame di quest' espressione, del tutto analogo a quello svolto precedentemente, ci permette di concludere che la φ diviene infinita del 1° ordine nei punti del gruppo P, e del 2° ordine nei punti del gruppo N, mentre diviene nulla del 1° ordine nei punti di (CE_1) e del 2° ordine nei punti di Q.

Per le ragioni già addotte nel numero precedente, si vede che la curva E_1 deve passare pei punti del gruppo N: onde può dirsi che in questi punti la φ diviene infinita del 1° ordine, e che il gruppo de' suoi zeri viene costituito dal gruppo $(CE_1) - N$, contato una volta, e dal gruppo Q contato due volte.

Ma qui si presenta una modificazione, rispetto all' ipotesi precedentemente discussa. Invero, per ciascun punto del gruppo Q deve passare la curva E_1, perchè nel caso contrario un punto $(x_0 y_0 z_0)$ di Q, sarebbe un polo di 2° ordine per la funzione razionale $R(xy_0z)$; cioè, trattandosi di un punto di diramazione, lo sviluppo di $R(xy_0z)$ comincerebbe con un termine in $\frac{1}{(x-x_0)^{\frac{1}{2}}}$: il che porterebbe una singolarità logaritmica nell' integrale $J(xy_0z)$. Ne discende che in ciascun punto $(x_0 y_0 z_0)$ di Q, la φ

possiede in realtà uno zero di 3° ordine, che proviene dalla coincidenza di uno zero di 2° ordine con uno di 1° ordine.

Tuttavia al risultato definitivo si può dare la stessa forma di quella che deriva dall' analisi del n° 2, definendo il gruppo G mediante la relazione

$$G = (CE_1) - N + Q.$$

Con questa posizione, in forza dell' equivalenza del gruppo dei poli al gruppo degli zeri di φ, si ottiene ancora:

$$G + Q \equiv P + N,$$

e, come prima, si vede che G è un gruppo caratteristico della curva C.

È poi evidente che in ogni punto $(x_0 y_0 z_0)$ di G, l'integrale abeliano $J(xy_0z)$ è regolare.

Soltanto, per la *particolar* natura della funzione R, qui c'è da osservare che il gruppo G contiene il gruppo Q contato due volte.

4. Come conseguenza dei ragionamenti svolti finora possiamo enunciare il seguente

Teorema I. *Allorquando un integrale semplice di 2ª specie $J(xyz)$, appartenente ad una superficie algebrica F, non ammette che poli di 1° ordine, e questi sono distribuiti lungo una sola curva C, irriducibile e priva di punti multipli, tale curva possiede necessariamente la serie caratteristica.*

La funzione residua di rango 1, $\varphi(xyz)$, individuata da J sulla C, diviene infinita (del 1° ordine) nei punti all' infinito di C e nei punti di contatto dei piani $y = cost.$, che toccano la curva polare; e diviene nulla (del 1° ordine) nei punti di C in ciascun dei quali il pian tangente ad F è parallelo all'asse z, e nei punti della curva stessa, ove è regolare l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$. Questi ultimi punti formano un gruppo della serie caratteristica esistente su C.

Tale gruppo si chiamerà il *gruppo caratteristico individuato su C dall' integrale J.*

Osservazione 1ª. In qualche caso particolare può accadere che alcuni dei punti enumerati compariscano contemporaneamente tra i poli e tra gli zeri di φ. Potremo allora sopprimerli o mantenerli nei due gruppi, secondo che ci piaccia. — Nel seguito, in casi analoghi, ci dispenseremo dal ripetere quest' osservazione.

Osservazione 2ª. Il teorema dimostrato vale in particolare *quando l'integrale riducesi ad una funzione razionale: in tal caso il gruppo caratteristico individuato da J su C, non è altro che il gruppo base del fascio $J = cost.$*

Del resto, quando J è una funzione razionale, il teorema si può stabilire direttamente e più semplicemente, osservando che, se A, B son

due polinomi aggiunti ad F, tali che $J = \frac{A}{B}$, la funzione residua di rango 1, individuata da J sulla C, risulta uguale ad

$$\frac{AF'_z}{F'_z B'_x - F'_x B'_z}.$$

Osservazione 3ª. Nel ragionamento dei nⁱ 2, 3, ci ha servito il fatto che la curva E_1 passa pei punti del gruppo N. Ora questo fatto, che abbiamo giustificato provvisoriamente in modo intuitivo, si stabilisce in modo rigoroso, facendo capo alla condizione d'integrabilità pel differenziale totale

$$\frac{A dx + A_1 dy}{B}.$$

Nel calcolo seguente useremo i d senza incurvare, per le derivate parziali (rispetto ad x, y) di una funzione di x, y, z, allorquando la z si riguardi come funzione implicita di x, y, definita dalla

$$F(xyz) = 0;$$

mentre useremo i ∂ incurvati, per le derivate parziali esplicite. — Con queste notazioni la condizione d'integrabilità si scrive sotto la forma:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{A_1}{B}\right),$$

ossia:

$$B\frac{dA}{dy} - A\frac{dB}{dy} = B\frac{dA_1}{dx} - A_1\frac{dB}{dx}.$$

Derivando i due membri rispetto ad x, otterremo:

$$\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dx} + B\frac{d^2A}{dxdy} - \frac{dA}{dx}\frac{dB}{dy} - A\frac{d^2B}{dxdy} = B\frac{d^2A_1}{dx^2} - A_1\frac{d^2B}{dx^2}.$$

Poichè nei punti di C si annullano le derivate parziali esplicite di B, rispetto ad x, y, z, in quei punti si annulleranno pure le derivate parziali implicite, rispetto ad x, y, onde lungo la C la relazione precedente diverrà:

$$A\frac{d^2B}{dxdy} = A_1\frac{d^2B}{dx^2}. \tag{5}$$

Siccome inoltre nei punti di C:

$$\frac{d^2B}{dxdy} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}F'_z - \frac{\partial}{\partial z}F'_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}F'_z - \frac{\partial}{\partial z}F'_y\right)B}{F'^2_z},$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}F'_z - \frac{\partial}{\partial z}F'_x\right)^2 B}{F'^2_z},$$

la (5) si trasforma nella:

$$(6)\quad A\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}F'_t-\frac{\partial}{\partial t}F'_x\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}F'_t-\frac{\partial}{\partial t}F'_y\right)B\right\}-A_1\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}F'_t-\frac{\partial}{\partial t}F'_x\right)^2B\right\}.$$

Osserviamo ora che la superficie

$$\Lambda\equiv\left(\frac{\partial}{\partial y}F'_t-\frac{\partial}{\partial t}F'_y\right)B=0,$$

passa semplicemente per C, perchè in C si annullano semplicemente le $\frac{\partial B}{\partial y}$, $\frac{\partial B}{\partial t}$. Ne segue che la superficie

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}F'_t-\frac{\partial}{\partial t}F'_x\right)\Lambda=0,$$

luogo dei punti dello spazio i cui piani polari rispetto alle F, Λ, si tagliano in un medesimo punto della retta all' infinito del piano xt, passa semplicemente pei punti del gruppo N.

Ricordando ora (n° 2) che la superficie

$$\Delta\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}F'_t-\frac{\partial}{\partial t}F'_x\right)^2B=0,$$

passa pure pei punti di N, avendo ivi con C incontro bipunto, dalla relazione (6) si rileva che A si annulla in questi punti, come volevasi provare.

§ 2.

Dimostrazione del teorema fondamentale.

5. In questo § stabiliremo un legame tra l'irregolarità di una superficie e l'esistenza d'integrali di differenziali totali di 1ª o di 2ª specie ad essa appartenenti. Per spianare la via nella ricerca di questo legame, giova premettere il seguente

Lemma. *Se per una superficie algebrica F l'ordine di connessione lineare è $p_1>1$, esistono sempre integrali di Picard della 2ª specie, appartenenti ad F, i quali non si possono ridurre alla 1ª specie per sottrazione di funzioni razionali.*

Invero, poichè i p_1-1 periodi di un integrale di 2ª specie appartenente ad F, sono assegnabili ad arbitrio*), potremo costruire un integrale di 2ª specie, $J(xyt)$, che abbia tutti i periodi reali (od immaginarî puri). Tale integrale non può ridursi alla 1ª specie per sottrazione di una funzione razionale, perchè altrimenti sopra una sezione piana generica della superficie, la differenza darebbe luogo ad un integrale abeliano di 1ª specie, i cui periodi, essendo determinati in funzione dei p_1-1 periodi

*) Cfr. Picard et Simart, loc. cit., t. I, Cap. IV, n° 23 e Cap. VI, n° 4.

di J, mediante relazioni lineari omogenee *a coefficienti interi**), risulterebbero tutti reali (o tutti immaginarî puri): il che è notoriamente assurdo**).

6. Ciò premesso passiamo a dimostrare il seguente

Teorema II. *Una superficie algebrica F, che abbia l'ordine di connessione lineare maggior d'uno, cioè che possegga integrali trascendenti di 2ª specie (o di 1ª), è irregolare.*

Consideriamo infatti un integrale trascendente di 2ª specie, $J(x\,y\,z)$, appartenente ad F, il quale non riducasi alla 1ª specie per sottrazione di funzioni razionali, e che divenga infinito del 1° ordine soltanto lungo una curva C, irriducibile e priva di punti multipli.

Indichiamo con φ la funzione razionale residua di rango 1, individuata da J sulla curva polare C, e con G il gruppo caratteristico di C, nei punti del quale l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$ è regolare (n° 4).

Proveremo che il gruppo caratteristico G, individuato su C dall' integrale J, non è segato sulla curva stessa da nessun' altra curva del sistema lineare completo $|C|$.

Invero, se esistesse una curva $\bar{C}$ di $|C|$, segante il gruppo G, la funzione razionale $R(xyz)$ (determinata a meno di un fattore costante), che ha per curva di livello zero la $\bar{C}$ e per curva polare la C, in virtù del teorema dimostrato al n° 4 (ved. anche l'Oss. 2ª dello stesso n°), individuerebbe su C una funzione residua φ', che avrebbe gli stessi zeri e gli stessi poli di φ. Onde risulterebbe

$$\varphi = \lambda\varphi',$$

con λ costante, e quindi l'integrale

$$J' = J - \lambda R,$$

sarebbe di 1ª specie, contro il supposto.

Ne deriva che il sistema completo $|C|$ ha la serie caratteristica parziale, e quindi***) che la superficie F è irregolare.

---

*) Picard, Cap. IV, n° 22.

**) Ved. ad es. Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.* (Paris, Gauthier-Villars, 1895; n° 118.)

***) Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali* ···, n° 27. Ved. pure la mia Nota, *Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, t. XII, 1903).

§ 3.

Riduzione di tutti gl'integrali di 2ª specie ad integrali che posseggano una sola curva polare del 1° ordine.

7. La dimostrazione svolta al n° 6 presuppone che sopra una superficie F, avente l'ordine di connessione lineare $p_1 > 1$, si possa sempre costruire un integrale di 2ª specie (coi periodi arbitrari) dotato di una sola curva polare del 1° ordine, irriducibile e priva di punti multipli.

Questa proprietà, che ci viene suggerita da ragioni di analogia, considerando le funzioni razionali come particolari integrali di 2ª specie, verrà stabilita nel presente §, ove dimostreremo la possibilità di ridurre, mediante sottrazione di funzioni razionali, ogni integrale di 2ª specie appartenente ad F, ad un integrale che posseggа una sola curva polare del 1° ordine prefissata.

8. Cominceremo perciò a studiare le funzioni residue, individuate sopra le proprie curve polari, da un integrale di 2ª specie

$$J = \int R dx + S dy,$$

che divenga infinito rispettivamente degli ordini $s_1, s_2, \cdots, s_\varrho$, lungo le curve irriducibili $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ prive di punti multipli o dotate al più di punti doppi nodali.

Per caratterizzare geometricamente il gruppo dei poli ed il gruppo degli zeri della funzione residua di rango s_1, $\varphi(xyz)$, individuata da J sulla curva polare C_1, non avremo che da estendere l'analisi del § 1.

Nell' esporre questa estensione, sorvoleremo su quei punti in cui non occorrono che leggeri cambiamenti di forma, trattenendoci invece su quei punti ove occorrono considerazioni nuove.

Supponendo di aver già assoggettata la F ad una trasformazione omografica generica, riterremo che le funzioni razionali R, S si annullino semplicemente lungo la curva all' infinito di F, e che non divengano infinite in nessun piano $y = \text{cost.}$ o $x = \text{cost.}$ (il che implica che nessuna delle curve polari di J appartenga a questi fasci).

Due casi si possono allora presentare: o la funzione R, che diviene infinita necessariamente degli ordini $s_1 + 1, s_2 + 1, \cdots, s_\varrho + 1$ lungo le curve $C_1, \cdots, C_\varrho$, possiede inoltre la curva polare del 1° ordine K, segata su F, fuori della linea doppia D, dalla superficie $F'_z = 0$; oppure la R non diviene infinita fuori delle curve $C_1, \cdots, C_\varrho$.

9. Fermandoci ad esaminare la prima ipotesi, si determinino due polinomî A, B aggiunti ad F, di gradi rispettivi $l-1$ ed l, ed il secondo dei

quali passi per K, semplicemente, e per le linee $C_1, \cdots, C_\varrho$, colle molteplicità $s_1 + 1, s_2 + 1, \cdots, s_\varrho + 1$, in guisa che risulti

$$R(xyz) = \frac{A(xyz)}{B(xyz)}.$$

Si avverta che le due superficie A, B si taglieranno su F, fuori della linea doppia, lungo una curva M, la quale non ha alcun particolar legame colla funzione R.

Sviluppando in serie di Taylor-Cauchy il numeratore e il denominatore della R, riguardati come funzioni di x, nell' intorno di un punto generico della curva C_1, e facendo poi il quoziente delle due serie, si trova, a meno d'un fattore numerico:

$$\varphi(xyz) = \frac{A(xyz)F_z'^{s_1+1}}{\left(\frac{\partial}{\partial x}F_z' - \frac{\partial}{\partial z}F_x'\right)^{s_1+1}B}.$$

Indicando con E_1 la curva di livello zero della R, astrazion fatta dalla curva all' infinito di F, si prova, come al § 1, che la $\varphi(xyz)$ si annulla semplicemente nei punti del gruppo (C_1E_1), ed s_1 volte nei punti del gruppo $Q_1 = (C_1K)$, in ciascun dei quali il pian tangente ad F è parallelo all' asse z; e inoltre che la φ diviene infinita d'ordine s_1 in ciascuno dei punti all' infinito di C_1 (costituenti il gruppo P_1).

All' infuori dei punti di P_1, i poli di $\varphi(xyz)$ cadono nei punti di C_1, diversi da quelli dei gruppi (C_1D), (C_1K), (C_1M), pei quali passa la superficie:

$$\Delta \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}F_z' - \frac{\partial}{\partial z}F_x'\right)^{s_1+1}B = 0,$$

luogo di un punto (xyz) dello spazio la cui polare d'ordine $s_1 + 1$ rispetto a B, incontra il piano polare di (xyz) rispetto ad F, in un medesimo punto della retta all' infinito u del piano xz.

La superficie Δ, fuori della linea D, per cui essa passa colla molteplicità s_1+1, e fuori dei gruppi (C_1K) e (C_1M), per cui passa semplicemente, sega C_1 nei punti dei gruppi $(C_1C_2), \cdots, (C_1C_\varrho)$; nei punti del gruppo N_1, in ciascuno dei quali la C_1 è toccata da un piano $y = \text{cost}$; e negli eventuali nodi di C_1. Ma per sapere quali ordini devonsi attribuire ai punti suddetti, come poli di φ, occorre valutare la molteplicità d'intersezione di C_1 e Δ in ciascuno di essi.

Ciò può farsi nel modo più rapido, osservando che la molteplicità d'intersezione di Δ e C_1, in un loro punto comune, dipende esclusivamente dalle proprietà di Δ e di C_1 nell' intorno di quel punto; sicchè, se vogliamo valutare ad es. la molteplicità d'intersezione in un punto del gruppo N_1, potremo supporre che la curva C_1 non abbia nodi, e che manchino le

curve $M, K, C_2, \cdots, C_\varrho$; cioè che B seghi F, fuori della D, lungo la curva C_1, (s_1+1)-pla per B.

Diciamo allora n, π, ν, l'ordine, il genere ed il grado di C_1*), λ il numero dei punti del gruppo $(C_1 D)$, e teniamo presente la relazione:

$$n(m-4) - \lambda = 2\pi - 2 - \nu \quad (7)$$

**).

La superficie Δ, d'ordine $l - s_1 - 1 + (s_1+1)(m-1)$, sega C_1 nei punti $(C_1 D)$, da contarsi ciascuno s_1+2 volte (ved. n° 2, a'), e ulteriormente nei punti del gruppo N_1, da contarsi ciascuno un numero incognito ξ di volte. Onde avremo:

$$2\xi(n+\pi-1) = n(s_1+1)(m-2) + nl - (s_1+2)\lambda,$$

la quale, ricordando la (7), diviene:

$$2\xi(n+\pi-1) = 2(s_1+1)(n+\pi-1) + nl - (s_1+1)\nu - \lambda. \quad (8)$$

Ora si osservi che un'aggiunta d'ordine l, diversa da B, sega C_1, fuori della D, in $nl - \lambda$ punti, i quali costituiscono la completa intersezione di C_1 con una curva del sistema $|(s_1+1)C_1|$. Dunque:

$$nl - \lambda = (s_1+1)\nu,$$

e quindi dalla (8) si trae

$$\xi = s_1 + 1.$$

Similmente, per determinare la molteplicità d'intersezione di Δ con C_1 in ciascun punto di $(C_1 C_2)$, potremo supporre che C_1 sia ancora priva di nodi, e che B seghi F, fuori della D, lungo le curve C_1, C_2, rispettivamente (s_1+1)-pla ed (s_2+1)-pla per B.

La superficie Δ sega C_1, fuori della D, in

$$n(s_1+1)(m-2) + nl - (s_1+2)\lambda$$

punti, dei quali $2(n+\pi-1)$, da contarsi ciascuno s_1+1 volte, cadono nei punti di contatto delle tangenti di C_1 appoggiate ad u, e gli altri nei δ punti comuni a C_1, C_2, da contarsi ciascuno η volte. Onde avremo:

$$n(s_1+1)(m-2) + nl - (s_1+2)\lambda = 2(s_1+1)(n+\pi-1) + \eta\delta.$$

Tenendo presente la (7), questa relazione dà:

$$nl - (s_1+1)\nu - \lambda = \eta\delta.$$

Un'aggiunta d'ordine l, diversa da B, sega C_1, fuori della D, in $nl - \lambda$ punti, che costituiscono il gruppo comune a C_1 e ad una curva del sistema $|(s_1+1)C_1 + (s_2+1)C_2|$. Onde:

$$nl - \lambda = (s_1+1)\nu + (s_2+1)\delta,$$

---

*) Cfr. p. es. Enriques, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche* (Atti della R. Acc. di Torino, 1901); n° 12.

**) Ved. la mia Nota, *Il genere aritmetico ed il genere lineare in relazione alle reti di curve tracciate sopra una superficie algebrica.* (Atti della R. Acc. di Torino, t. 37, 1902); n° 1.

la quale, confrontata colla precedente, porge

$$\eta = s_2 + 1.$$

Supponendo infine che la curva C_1 possegga d nodi, e che B seghi F, fuori della D, soltanto lungo la curva C_1, (s_1+1)-pla per B, determiniamo la molteplicità d'intersezione di Δ con C_1 in ciascuno di questi nodi.

La relazione (7), viene sostituita in tal caso dalla

$$n(m-4) - \lambda = 2\pi - 2 - \nu + 2d, \tag{7'}$$

ove π denoti il genere *effettivo* di C_1, e ν il suo grado *virtuale*, calcolato prescindendo dai d punti doppî.

Ciò posto, osserviamo che la Δ sega C_1 in

$$n(s_1+1)(m-2) + nl - (s_1+2)\lambda$$

punti, dei quali $2(s_1+1)(n+\pi-1)$ cadono nei punti del gruppo N_1, e $2\zeta d$ nei punti doppî: denotando con ζ la molteplicità d'intersezione di Δ con ciascuno dei rami di C_1 aventi l'origine in un nodo. Onde avremo:

$$2(s_1+1)(n+\pi-1) + 2\zeta d = n(s_1+1)(m-2) + nl - (s_1+2)\lambda,$$

la quale, tenendo conto della (7'), porge:

$$2\zeta d = 2(s_1+1)d + nl - (s_1+1)\nu - \lambda.$$

Poichè un' aggiunta d'ordine l, diversa da B, sega F, fuori della D, lungo una curva del sistema $|(s_1+1)\bar{C}_1|$, ove $\bar{C}_1$ rappresenta la curva C_1 virtualmente priva dei punti doppî, verrà:

$$nl - \lambda = (s_1+1)\nu,$$

e quindi

$$\zeta = s_1 + 1.$$

Riassumendo, possiamo dire che la $\varphi(xyz)$ si annulla semplicemente nei punti di (C_1E_1) ed s_1 volte nei punti di Q_1; e che diviene infinita d'ordine s_1 in ciascun punto del gruppo P_1; infinita d'ordine (s_1+1) nei punti di N_1, e nelle origini di ciascuno dei due rami che s'incrociano in un nodo di C_1; e infinita d'ordine (s_i+1) nei punti di (C_1C_i) $(i=2,\cdots,\varrho)$.

Ma, come nel § 1, anche qui si presenta un' ulteriore riduzione tra gli zeri e tra i poli sopra enumerati.

Invero, poichè in un punto di N_1, o in un punto doppio di C_1, l'integrale $J(x\bar{y}z)$ presenta un polo d'ordine $2s_1$, proveniente dalla coincidenza di due poli d'ordini s_1 variabili su C_1, la funzione razionale $R(x\bar{y}z)$ dovrà ivi presentare un polo d'ordine $2s_1+1$; e dunque bisognerà che, quando un piano $y=\bar{y}$ tende a passare per uno dei punti suddetti, non soltanto due poli d'ordine s_1+1 della $R(x\bar{y}z)$, tendano al punto stesso, ma vi tenda pure uno zero (del 1° ordine); cioè la curva E_1 dovrà passare per quel punto.

Similmente, dal fatto che la $R(x\bar{y}z)$ presenta un polo d'ordine $s_1 + s_i + 1$ in ciascun punto di $(C_1 C_i)$, si deduce che ogni tal punto appartiene alla curva E_1*).

Osservando inoltre che ogni punto comune alle curve C_1 ed E_1, all' infuori dei punti ultimamente nominati, è un polo d'ordine $s_1 - 1$ per l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$, si conclude col

Teorema III. *Se $J(xyz)$ è un integrale semplice di 2ª specie, appartenente alla superficie $F(xyz) = 0$, il quale divenga infinito rispettivamente degli ordini $s_1, s_2, \cdots, s_\varrho$, lungo le curve irriducibili $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$, dotate al più di punti doppî nodali; e se N_i denota il gruppo dei punti di contatto delle tangenti di C_i parallele al piano xz, P_i il gruppo all' infinito di C_i, ed X_i l'insieme delle coppie di punti che cadono negli eventuali nodi della curva stessa, i poli della funzione residua φ_i di rango s_i, individuata da J lungo la curva polare C_i, formano il gruppo:*

$$s_i(N_i + P_i + X_i) + s_1(C_1 C_i) + \cdots + s_{i-1}(C_{i-1} C_i) + \\ + s_{i+1}(C_{i+1} C_i) + \cdots + s_\varrho(C_i C_\varrho).$$

Inoltre, se Q_i è costituito dai punti di C_i ove i piani tangenti ad F son paralleli all' asse z, ed Y_i dai punti di C_i ove l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$ ha poli d'ordine $s_i - 1$, gli zeri di φ_i formano il gruppo:

$$s_i Q_i + Y_i.$$

Osservazione. Veramente prima di arrivare a questa conclusione, ci restava da esaminare l'ipotesi che la funzione razionale R non divenisse infinita fuori delle curve $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$. Abbiamo tralasciato quest'esame, perchè non presentava ormai nessuna difficoltà. Osserveremo soltanto che nell' ipotesi suddetta, attesa la particolar natura della funzione R, il gruppo Y_i contiene come parte Q_i (cfr. col nº 3).

10. Vediamo ora di estendere la proprietà che ci condusse a definire il gruppo caratteristico, individuato sopra la propria curva polare, da un integrale che divenga infinito del 1° ordine, lungo una sola curva irriducibile (nº 4).

Tenendo conto del fatto che la jacobiana della F, di un' altra superficie passante per la curva C_i, e di due piani qualunque dello spazio, sega C_i fuori della linea doppia D, oltrechè nel gruppo N_i, anche nel gruppo X_i, definito nell' enunciato del teorema precedente, avremo (come al nº 2) la relazione:

$$(9) \qquad Q_i \equiv 3P_i + T_i + X_i + (H, C_i) - (H + \bar{C}_i, C_i),$$

ove T_i denota un gruppo canonico di C_i, e $\bar{C}_i$ la curva stessa, virtualmente priva de' suoi punti doppî.

*) Quest' affermazione e la precedente derivano anche dalla condizione d'integrabilità (nº 4, Oss. 3ª).

Quanto alla curva H, essa è assoggettata alla sola condizione che il sistema lineare $|H + \bar{C}_i|$ sia infinito e non contenga C_i come parte fissa.

Si chiamino $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \cdots, \bar{C}_\varrho$ le ϱ curve polari, virtualmente prive dei loro punti doppî, e s'indichi con U la curva composta

$$s_1\bar{C}_1 + s_2\bar{C}_2 + \cdots + s_{i-1}\bar{C}_{i-1} + s_{i+1}\bar{C}_{i+1} + \cdots + s_\varrho\bar{C}_\varrho.$$

Se V è una curva tale che il sistema lineare $|U + V + (s_i - k)\bar{C}_i|$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, s_i - 1)$ sia infinito, e non contenga C_i come parte fissa, si può far coincidere successivamente la H colle curve

$$U + V + (s_i - 1)\bar{C}_i, \quad U + V + (s_i - 2)\bar{C}_i, \cdots, \quad U + V + \bar{C}_i, \quad U + V.$$

Sommando membro a membro le s_i relazioni, analoghe alla (9), che così si ottengono, viene:

$$s_iQ_i \equiv 3s_iP_i + s_iT_i + s_iX_i + (U + V, C_i) - (U + V + s_i\bar{C}_i, C_i).$$

Poichè (n° 2):

$$N_i \equiv 2P_i + T_i,$$

avremo pure:

$$s_iQ_i \equiv s_i(N_i + P_i + X_i) + (U + V, C_i) - (U + V + s_i\bar{C}_i, C_i),$$

la quale, confrontata colla relazione:

$$s_i(N_i + P_i + X_i) + (U, C_i) \equiv s_iQ_i + Y_i,$$

dimostrata al n° 9, porge:

$$Y_i \equiv (U + V + s_i\bar{C}_i, C_i) - (V, C_i).$$

Se in particolare la curva

$$U + s_i\bar{C}_i = \sum_{j=1}^{j=\varrho} s_j\bar{C}_j$$

individua un sistema lineare infinito, avremo:

$$Y_i \equiv (\Sigma s_j\bar{C}_j, C_i);$$

cioè, in parole:

Teorema IV. *Allorquando la curva $s_1\bar{C}_1 + s_2\bar{C}_2 + \cdots + s_\varrho\bar{C}_\varrho$, costituita dalle ϱ curve polari dell' integrale $J(xyz)$, considerate come virtualmente prive di punti doppî, individua un sistema lineare infinito, il gruppo Y_i dei punti di C_i, ove l'integrale abeliano $J(x\bar{y}z)$ ha poli d'ordine $s_i - 1$, equivale al gruppo segato sulla C_i da una curva del sistema $|s_1\bar{C}_1 + \cdots + s_\varrho\bar{C}_\varrho|$.*

In ogni caso Y_i si chiamerà il *gruppo singolare individuato da J sulla curva polare C_i.*

Osservazione. In particolare *quando J riducesi ad una funzione razionale, quei punti base del fascio $J = cost$, che appartengono ad una curva polare, costituiscono ivi il relativo gruppo singolare.*

Ciò segue senz' altro dal n° 9; ma lo si può verificare direttamente, senza cioè riguardare la funzione razionale come un integrale di differenziale totale.

11. Per ottenere la riduzione che costituisce l'oggetto di questo §, ci occorre pure il

Teorema V. *Ogni integrale semplice di 2ª specie appartenente alla superficie algebrica F, si può ridurre, mediante sottrazione di una conveniente funzione razionale, ad un integrale che divenga infinito soltanto lungo curve di un fascio fissato.*

Svilupperemo la dimostrazione supponendo che il fascio fissato sia segato su F dai piani $y = \text{cost}$, e che la retta all' infinito comune a questi piani, tagli F in punti distinti. A questo caso ci possiamo sempre ridurre con una trasformazione birazionale, se il fascio dato possiede punti base semplici ed appartiene ad un sistema lineare semplice, almeno ∞^3*). Non ci occuperemo di togliere questa restrizione, perchè ciò basta per l'applicazione che abbiamo in vista.

Se m è l'ordine e π il genere delle sezioni piane della superficie $F(xyz) = 0$, è possibile determinare 2π polinomî $U_1(xyz)$, $U_2(xyz), \cdots,$ $U_{2\pi}(xyz)$, di grado $2m-4$ in x, z, *aggiunti* ad F, e tali che per un valore generico $\bar{y}$ di y

$$\int \frac{U_1}{F_z'} dx, \int \frac{U_2}{F_z'} dx, \cdots, \int \frac{U_{2\pi}}{F_z'} dx,$$

sieno 2π integrali abeliani di 2ª specie, algebricamente distinti, per la curva $F(x\bar{y}z) = 0$; ed aventi i poli soltanto negli m punti all' ∞ della curva stessa**).

Se la superficie F possiede integrali *trascendenti* di 2ª specie, se cioè l'ordine di connessione lineare della F è $p_1 > 1$***), si potranno determinare 2π funzioni razionali di y, non tutte identicamente nulle, $a_1 a_2 \cdots a_{2\pi}$, per modo che l'integrale:

$$\int \frac{a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_{2\pi} U_{2\pi}}{F_z'} dx = \int U dx,$$

abbia tutti i suoi periodi indipendenti da y†). Allora con un noto procedimento di Picard††), si costruisce una funzione razionale $V(xyz)$, tale che:

$$J = \int U dx + V dy,$$

è un integrale trascendente di 2ª specie.

Poichè sopra un piano generico $y = \text{cost}$, quest' integrale dà luogo

---

*) Si noti che se tale sistema non ha punti base, la trasformazione si può ottenere senza introdurre curve eccezionali.

**) Picard et Simart, loc. cit., t. I, pagg. 162, 164.

***) Picard et Simart, loc. cit., t. I, pag. 150.

†) Ibidem, Capitolo IV, § 23.

††) Ibidem, Capitolo IV, § 23.

ad un integrale abeliano di 2ª specie, che diviene infinito soltanto nei punti base del fascio fissato, si conclude che la curva polare di J sega una curva generica di quel fascio, soltanto nei punti base, e quindi che essa si compone di curve del fascio stesso.

Si ricordi ora che la determinazione delle a dipende dalla scelta arbitraria di $p_1 - 1$ costanti (i periodi distinti degli integrali di 2ª specie appartenenti ad F), cosicchè, se si prendono successivamente come valori di queste costanti, gli elementi delle orizzontali di un determinante non nullo, di ordine $p_1 - 1$, si vengono a costruire in corrispondenza $p_1 - 1$ integrali *algebricamente distinti* $J_1, J_2, \cdots, J_{p_1-1}$, analoghi ad J, cioè aventi per curve polari soltanto curve del fascio $y = \text{cost}$.

Ciò posto, se I è un integrale qualunque di 2ª specie appartenente ad F, esisteranno dei numeri $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{p_1-1}$ ed una funzione razionale $\Phi(xyz)$, tali che

$$I = \lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \cdots + \lambda_{p_1-1} J_{p_1-1} + \Phi(xyz),$$

onde l'integrale $I - \Phi$ diverrà infinito soltanto lungo curve del fascio $y = \text{cost}$, c. d. d.

12. Passiamo infine a ridurre gl'integrali di 2ª specie, appartenenti alla superficie algebrica F, ad integrali che posseggano una sola curva polare del 1° ordine.

A tal uopo fissiamo sulla superficie F un sistema lineare privo di punti base, che sia immagine delle sezioni iperpiane d'una superficie F', priva di punti multipli, riferita birazionalmente ad F; e stacchiamo dentro a questo sistema, un fascio generico $|C|$, privo di curve spezzate e dotato di punti base semplici, il cui gruppo denotiamo con B.

Un integrale qualunque di 2ª specie appartenente ad F, si può ridurre, per sottrazione di una funzione razionale, ad un integrale $J(xyz)$ che divenga infinito soltanto lungo curve del fascio fissato.

Diremo $C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$ le curve polari di J ed $s_1, s_2, \cdots, s_\varrho$ gli ordini d'infinito relativi a queste curve. Pel modo generico con cui è stato scelto il fascio $|C|$, le C_i saranno prive di punti multipli od al più dotate di punti doppî nodali.

Se m' è l'ordine di F', le forme d'ordine $k_1 \geqq m' - 2$, passanti per gli eventuali nodi di una sezione iperpiana, la segano altrove nei gruppi di una serie lineare completa*); onde le curve del sistema completo $|k_1 C|$, passanti per i nodi di C_1, segheranno ulteriormente su questa curva una serie lineare completa.

Ciò posto, costruiscasi una curva U_1 del sistema $|k_1 C|$, irriducibile,

*) Cfr. Castelnuovo, Sui multipli di una serie lineare ... (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. VII).

priva di punti multipli e passante pei nodi di C_1, ed una curva V_1 del sistema $|(k_1 + s_1 + \cdots + s_\varrho)C|$, la quale passi per quei nodi e seghi altrove C_1 nel gruppo $Y_1 + (C_1 U_1) - X_1$, ove Y_1 è il gruppo singolare individuato da J su C_1, ed X_1 è l'insieme delle coppie che cadono nei punti doppî di C_1. Ciò è sempre possibile, perchè (teor. IV):

$$Y_1 + (C_1 U_1) - X_1 \equiv ((s_1 + \cdots + s_\varrho)C, C_1) + (k_1 C, C_1) - X_1 \equiv$$
$$\equiv (k_1 + s_1 + \cdots + s_\varrho)B - X_1,$$

e d'altronde le curve del sistema $|(k + \Sigma s_j)C|$, passanti pei nodi di C_1, segano altrove su questa curva una serie *completa*.

Diciamo ora $R(xyz)$ la funzione razionale (determinata a meno di un fattore costante), che diviene infinita degli ordini $1, s_1, s_2, \cdots, s_\varrho$ lungo le curve $U_1, C_1, C_2, \cdots, C_\varrho$, e che si annulla lungo la V_1.

La funzione residua φ_1', di rango s_1, individuata da R su C_1, ha gli stessi zeri e gli stessi poli della funzione analoga φ_1, relativa ad J; in primo luogo perchè l'influenza che eserciterebbe sul gruppo dei poli di φ_1' la curva polare U_1, è neutralizzata dal passaggio di V_1 per ogni punto $(C_1 U_1)$; ed in secondo luogo perchè la curva V_1 segna ulteriormente su C_1 il gruppo Y_1 (teor. III, IV, e Oss. 1ª del nº 4). Avremo dunque:

$$\varphi_1 = \lambda \varphi_1'$$

con λ costante; onde lungo C_1 l'integrale:

$$J_1 = J - \lambda R,$$

diviene infinito d'ordine $s_1 - 1$. Inoltre J_1 diviene infinito degli ordini $1, s_2, \cdots, s_\varrho$ lungo le curve $U_1, C_2, \cdots, C_\varrho$.

Mediante le operazioni precedenti si abbassa dunque d'un' unità l'ordine d'infinito di C_1, introducendo una *nuova* curva polare del 1° ordine, irriducibile e priva di punti multipli, appartenente al sistema $|k_1 C|$.

Proseguendo ad applicare il concetto esposto, si arriva ad un integrale I il quale possiede soltanto curve polari del 1° ordine, irriducibili, prive di singolarità ed appartenenti a sistemi multipli di $|C|$. Sieno $U_1 U_2 \cdots U_r$ queste curve polari, e supponiamo che appartengano rispettivamente ai sistemi $|k_1 C|, |k_2 C|, \cdots, |k_r C|$. Poichè, se h è abbastanza grande, il sistema completo $|hC|$ ed i multipli successivi di $|C|$, segano serie complete sopra ciascuna delle U_i, dicendo H una curva di $|hC|$, irriducibile e priva di punti multipli, sarà possibile costruire una curva L_1 del sistema $|(h + \Sigma k_i)C|$, la quale passi pei punti (HU_1) e seghi altrove U_1 nel relativo gruppo singolare.

Togliendo da I una funzione razionale, scelta in modo conveniente tra quelle che divengono infinite del 1° ordine lungo la curva $H + U_1 + \cdots + U_r$, e che si annullano lungo L_1, avremo un integrale I_1 che diverrà infinito

del 1° ordine lungo le curve $H, U_2, \cdots, U_r$. Dicasi ora L_2 una curva del sistema $|(h + k_2 + \cdots + k_r)C|$, la quale passi pel gruppo singolare individuato da I_1 su U_2: una tal curva esiste certamente, perchè questo gruppo singolare è equivalente ad un gruppo $((h + k_2 + \cdots + k_r)C, U_2)$ (teor. IV). Togliendo da I_1 una conveniente funzione razionale, che possegga le stesse curve polari di I_1 e che si annulli lungo L_2, avremo un integrale, I_2, che possiede le sole curve polari del 1° ordine $H, U_3, \cdots, U_r$.

Così proseguendo si perviene ad un integrale che possiede la sola curva polare H.

Si osservi che il procedimento di riduzione può talora abbreviarsi, pel fatto che quando, mediante la sottrazione di una funzione razionale, si abbassa l'ordine d'infinito di una curva polare, vengono ad abbassarsi in conseguenza gli ordini d'infinito di altre curve polari.

Riassumendo, possiamo enunciare il

Teorema VI. *Ogni integrale semplice di 2ª specie appartenente ad una superficie F, per sottrazione di funzioni razionali, può ridursi ad un integrale, che divenga infinito del 1° ordine lungo una curva irriducibile e priva di punti multipli, o che si conservi finito su tutta la superficie.*

Con ciò *il teorema fondamentale del § 2 risulta dimostrato senza nessuna restrizione.*

Osservazione. Se vogliamo, potremo supporre che la curva H, di cui sopra, appartenga ad un sistema regolare; perchè facendo un multiplo abbastanza alto del sistema delle sezioni iperpiane di una superficie priva di singolarità, si ottiene appunto un sistema regolare*).

13. Possiamo ora determinare maggiormente il teorema fondamentale, dimostrando il

Teorema VII. *Data una superficie algebrica F, di generi, geometrico ed aritmetico, P_g e P_a, l'irregolarità $P_g - P_a$ della superficie è almeno uguale all' eccesso del numero degli integrali semplici di 2ª specie algebricamente distinti, sul numero degli integrali di 1ª specie linearmente indipendenti.*

In base al teor. VI, potremo assumere come *sistema fondamentale* di tutti gl'integrali di 2ª specie appartenenti ad F, $p_1 - 1$ integrali algebricamente distinti, che divengano infiniti del 1° ordine lungo una curva H, irriducibile e priva di punti multipli, appartenente ad un sistema lineare completo di dimensione $d \geq 1$.

Più in particolare, se gl'integrali di 1ª specie linearmente indipendenti, distesi sulla superficie F, sono $I_1, I_2, \cdots, I_q$, potremo comporre il sistema fondamentale mediante questi q integrali e mediante $p_1 - 1 - q = s$ integrali $J_1, J_2, \cdots, J_s$, che divengano infiniti del primo ordine soltanto

*) Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali* ... n° 43.

lungo H; per modo che il determinante di ordine $p_1 - 1$ formato coi periodi di tutti gl'integrali $I_1, I_2, \cdots I_q, J_1, J_2, \cdots, J_s$, sia diverso da zero. — Ed invero, essendo soddisfatta tale condizione, i $q + s$ integrali risultano algebricamente distinti, e quindi formano un sistema fondamentale.

Fatta questa scelta, è certo che nessun integrale del tipo

$$\mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \cdots + \mu_s J_s,$$

ove le μ son costanti non tutte nulle, potrà ridursi alla 1ª specie per sottrazione di funzioni razionali, perchè se fosse

$$\mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \cdots + \mu_s J_s - \text{funzione razionale} = h_1 I_1 + h_2 I_2 + \cdots + h_q I_q,$$

gl'integrali $I_1, \cdots, I_q, J_1, \cdots, J_s$ non sarebbero distinti.

Ne deriva (n° 6) che il gruppo caratteristico staccato su H da un integrale $\Sigma \mu_i J_i$, non può appartenere alla serie segata su H dal sistema completo $|H|$.

Diciamo ora $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$ le funzioni razionali residue, individuate su H dagl'integrali $J_1, J_2, \cdots, J_s$, e $G_1, G_2, \cdots, G_s$ i gruppi caratteristici staccati su H da questi stessi integrali. Siccome (teor. I) le φ hanno gli stessi poli, ed inoltre il gruppo Q, che resta togliendo G_i dagli zeri di φ_i, non muta, al variare della φ_i nel sistema $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$; potremo determinare una superficie $f(xyz) = 0$, segante H nel gruppo dei poli delle φ ed altrove in un gruppo T, ed s superficie $l_1 = 0$, $l_2 = 0, \cdots, l_s = 0$, che passino tutte pei gruppi T, Q, e che taglino altrove H rispettivamente nei gruppi $G_1, G_2, \cdots G_s$; in guisa che nei punti di H risulti

$$\varphi_1 = \frac{l_1(xyz)}{f(xyz)}, \quad \varphi_2 = \frac{l_2(xyz)}{f(xyz)}, \cdots, \quad \varphi_s = \frac{l_s(xyz)}{f(xyz)}.$$

Ciò posto, la serie lineare g, di dimensione minima, che contiene $G_1, G_2, \cdots, G_s$ vien segata su H, fuori dei gruppi T, Q, dal sistema lineare:

$$\mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 + \cdots + \mu_s l_s = 0;$$

sicchè, se i gruppi G fossero linearmente dipendenti, esisterebbero per le μ valori non tutti nulli, tali che la relazione precedente risulterebbe soddisfatta per ogni punto di H. Onde per valori non tutti nulli delle μ, si avrebbe identicamente, rispetto al punto scorrente su H:

$$\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \cdots + \mu_s \varphi_s = 0,$$

e quindi l'integrale $\mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \cdots + \mu_s J_s$ sarebbe di 1ª specie; il che, come abbiamo osservato, non può accadere.

Ne segue che i gruppi G sono indipendenti e che la dimensione della serie lineare g, che li *congiunge*, è $s - 1$.

Se ora osserviamo che ogni integrale $J = \mu_1 J_1 + \cdots + \mu_s J_s$ dà luogo

su H ad una funzione residua $\varphi = \mu_1\varphi_1 + \cdots + \mu_s\varphi_s$, e quindi ad un gruppo caratteristico segato su H, fuori di T, Q, dalla superficie

$$l = \mu_1 l_1 + \cdots + \mu_s l_s;$$

e che viceversa a partire da ogni gruppo della serie g, si costruisce un integrale $\mu_1 J_1 + \cdots + \mu_s J_s$, che stacca quel gruppo; si conclude che g non ha *nessun* gruppo comune colla serie, di dimensione $d-1$, segnata su H dal sistema completo $|H|$. Dicendo δ la dimensione della serie caratteristica completa, esistente su H, avremo dunque:

$$s - 1 + d - 1 \leq \delta - 1,$$

e siccome:

$$\delta \leq d - 1 + P_g - P_a{}^*),$$

risulterà:

$$s \leq P_g - P_a.$$

Arezzo, 14 novembre 1904.

---

*) Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali* . . . n° 30. — Ved. pure la mia Nota citata, *Sulla deficienza della serie caratteristica* . . . .

[Dopo la pubblicazione della Nota dei Lincei, ove presentai un riassunto di questa Memoria (settembre 1904), la teoria delle superficie algebriche e degl' integrali di Picard, si è arricchita di altri risultati essenziali, dei quali non posso oggi tacere. — Anzitutto, nel dicembre 1904, il sig. Enriques riuscì a costruire sopra ogni superficie irregolare, sistemi continui completi, non lineari, di curve algebriche; e questa importante caratterizzazione geometrica delle superficie irregolari, lo condusse (mediante l'applicazione del teorema di Humbert, citato nell' Introduzione), al teorema che *ogni superficie irregolare è dotata di integrali trascendenti di 1ª e (quindi) di 2ª specie* (R. Acc. di Bologna, 1904). — Restava così invertito il teorema da me dimostrato in settembre. — Nel gennaio 1905 il sig. Picard ed io, dimostrammo contemporaneamente, e per vie diverse, la relazione $r = q + P_g - P_a$, ove q, r sono i numeri degl' integrali indipendenti di 1ª e di 2ª specie, appartenenti alla superficie F di generi P_g, P_a (Comptes rendus, 16 gennaio, e R. Acc. di Torino, 22 gennaio); e pochi giorni dopo il sig. Castelnuovo, col sussidio del teorema geometrico di Enriques, pervenne alla disuguaglianza $q > P_g - P_a$, che unita alla mia disuguaglianza $r - q \leq P_g - P_a$ (n° 13 di questa Memoria), conduce facilmente alle relazioni $q = P_g - P_a$, $r = 2(P_g - P_a)$ (Comptes rendus, 23 gennaio. — Ved. pure la Memoria di Castelnuovo, tra i Rendiconti dei Lincei, maggio-giugno 1905). — Dal complesso di queste ricerche risulta dunque che *il numero degl' integrali semplici di 1ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica, uguaglia l'irregolarità della superficie, ed il numero degl' integrali di 2ª specie è uguale al doppio dell' irregolarità.* — Di questo stesso teorema si trovano accennate altre dimostrazioni, in due Note dei Comptes rendus (3 aprile), dovute l'una al sig. Picard e l'altra a me. La mia dimostrazione è esposta diffusamente in una Memoria intitolata: *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, in corso di stampa negli Annali di Matematica.]

Balme, 16 luglio 1905.

Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn K. Hensel.)*)

Von

FELIX KLEIN in Göttingen.

Indem ich Ihrer werten Aufforderung entspreche, einen Beitrag zu dem Festbande des Journals zu schreiben, der dem Andenken Dirichlets gewidmet ist, greife ich auf eine Note zurück, die ich vor sechs Jahren in den Rendiconti dell' Accademia dei Lincei veröffentlichte und in der ich die Grundlinien einer *allgemeinen Auflösung der Gleichungen sechsten Grades* skizzierte.**) Ich stelle mir das Ziel, die dort nur angedeuteten Überlegungen ausführlicher und in mehr konkreter Form darzulegen. In der Tat hat selbst ein so genauer Kenner der einschlägigen Literatur, wie Herr Lachtin, den in Betracht kommenden Ansatz nicht in seiner prinzipiellen Einfachheit aufgefaßt (wie ich weiter unten noch näher ausführe).***) Im übrigen handle ich unter den Impulsen meines alten Freundes Gordan, der sein großes algebraisches Können neuerdings der in Frage stehenden Problemstellung zugewandt hat. Herr Gordan wird eine erste einschlägige Abhandlung demnächst in den Mathematischen Annalen veröffentlichen.†) Es ist dies aber nur ein Anfang; ich hoffe, daß es seinen fortgesetzten Bemühungen gelingen wird, den Gegenstand nach allen Seiten ebenso vollständig zu klären, wie uns dies früher gemeinsam mit der Theorie der Gleichungen fünften Grades geglückt ist.

*) Abgedruckt aus dem Dirichletbande (Bd. 129) des Journals für reine und angewandte Mathematik.

**) Sitzung vom 9. April 1899, Rendiconti VIII (1° semestre): *Sulla risolusione delle equazioni di sesto grado* (estratto da una lettera al sig. Castelnuovo).

***) 1901, Moskauer Mathematische Sammlung, Bd. XXII, S. 181—218 (russisch).

†) *Über die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems* (ein Beitrag zur Auflösung der allgemeinen Gleichungen sechsten Grades). — Vergl. auch eine Mitteilung an den Heidelberger Internationalen Mathematiker-Kongreß (August 1904).

Auf diese *Theorie der Gleichungen fünften Grades*, wie ich sie in meinen *„Vorlesungen über das Ikosaeder"* (Leipzig, 1884) zusammengefaßt habe, möchte ich hier vorab in der Weise eingehen, daß ich diejenigen Momente hervorkehre, welche in den nachfolgenden, auf die Gleichungen sechsten Grades bezüglichen Überlegungen ihre genaue Weiterbildung finden sollen. Ich habe in Kapitel V der „Vorlesungen" zweierlei Auflösungsmethoden der Gleichungen fünften Grades auseinandergesetzt (die sich übrigens nur durch die Reihenfolge der auszuführenden Schritte unterscheiden). Es wird sich hier um die *zweite* dieser Methoden handeln, die sich als eine organische Fortsetzung von Kroneckers (und Brioschis) Arbeiten über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades darstellt. In den „Vorlesungen" wird diese Methode — gleich der ersten — in geometrischer Form entwickelt, wobei spezielle, nur bei den Gleichungen fünften Grades hervortretende Beziehungen den Ausgangspunkt abgeben. Statt dessen greife ich hier auf die *algebraische* Begründung der Methode zurück, die ich s. Z. in Band 15 der Mathematischen Annalen entwickelte und mit Überlegungen über die Auflösung beliebiger höherer Gleichungen begleitete.*)

Die Ikosaedertheorie der Gleichungen fünften Grades und die mit ihr zusammenhängenden allgemeinen Überlegungen sind seitdem mehrfach von anderer Seite zur Darstellung gebracht worden, so insbesondere im zweiten Bande des ausgezeichneten *Lehrbuches der Algebra* von H. Weber (Braunschweig, zweite Auflage 1898, 1899), sowie in dem ausführlichen Bericht, den Herr Wiman in Bd. I der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften über *Endliche Gruppen linearer Substitutionen* erstattet hat (S. 522—554, 1900). Trotzdem scheint es, daß die prinzipielle Bedeutung des ganzen Ansatzes im mathematischen Publikum immer noch vielfach nicht verstanden wird. Es handelt sich nicht um Überlegungen, welche sich *neben* die früheren Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades stellen, sondern um solche, die den Anspruch erheben, den eigentlichen Kern dieser früheren Untersuchungen auszumachen. Ich will versuchen, in dem folgenden Berichte dementsprechend die Hauptpunkte der Theorie (die sich dann später mutatis mutandis bei dem Ansatze für die Gleichungen sechsten Grades wiederfinden) so genau zu bezeichnen als bei der gebotenen Kürze möglich scheint.

Das erste ist, daß wir die *Ikosaedergleichung*, d. h. die Gleichung sechzigsten Grades, welche in den „Vorlesungen" folgendermaßen geschrieben wird:

*) *Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade* (1879); vergl. insbesondere den § 4 daselbst („die Formeln von Kronecker und Brioschi für den fünften Grad").

$$\frac{H^3(x)}{1728 f^5(x)} = X \tag{1}$$

als eine *Normalgleichung sui generis* ansehen, welche sich vermöge ihrer ausgezeichneten Eigenschaften als die nächste Verallgemeinerung der „reinen" Gleichungen:

$$x^n = X \tag{2}$$

darstellt. In der Tat lassen sich die 60 Wurzeln von (1) aus einer beliebigen derselben genau so durch 60 a priori bekannte lineare Substitutionen (die Ikosaedersubstitutionen) berechnen, wie die n Wurzeln von (2) aus einer derselben durch die n Substitutionen $x' = e^{\frac{2i\pi}{n}} \cdot x$. Nun erweist sich die Gruppe der Ikosaedersubstitutionen mit der Gruppe der 60 geraden Vertauschungen von fünf Dingen als isomorph. Hierdurch gewinnt der Abelsche Beweis, daß es unmöglich ist, die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades auf eine Reihenfolge reiner Gleichungen (2) zurückzuführen, seine positive Wendung. Die Aufgabe muß sein, die *Auflösung der Gleichungen fünften Grades mit Hilfe einer Ikosaedergleichung zu bewerkstelligen.* Und hier mögen wir einen algebraischen und einen transzendenten Teil der Untersuchung unterscheiden. Der erstere Teil wird sich damit beschäftigen, aus den Wurzeln $z_1, \cdots, z_5$ einer vorgelegten Gleichung fünften Grades die Wurzel x einer Ikosaedergleichung (1) algebraisch zusammenzusetzen, den Parameter X der letzteren durch die Koeffizienten der Gleichung fünften Grades, bezw. die Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante, zu berechnen, endlich wieder die $z_1, \cdots, z_5$ durch das x darzustellen. Der transzendente Teil aber wird die Aufgabe haben, die Wurzel x der Ikosaedergleichung aus dem Parameter X durch unendliche Prozesse zu berechnen. Dies gelingt genau so durch *hypergeometrische Reihen* wie die transzendente Auflösung der Gleichung (2) durch die binomische Reihe. — In den „Vorlesungen über das Ikosaeder" ist insbesondere nachgewiesen, daß *alle* algebraischen Untersuchungen, die man zum Zwecke der Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades angestellt hat, Umschreibungen des vorgenannten algebraischen Problems sind. Der transzendente Teil der Aufgabe wird nurmehr gestreift. Es wird aber klar ausgesprochen, welche Bewandtnis es mit der sogenannten Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch *elliptische Funktionen* hat. Ich beziehe mich hier auf meine ausführlichen anderweitigen Darlegungen, die u. a. in die von Fricke und mir bearbeiteten *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* (Leipzig 1890, 1892) eingearbeitet sind. Zwischen der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Funktionen und der Ikosaedertheorie besteht ein notwendiger Zusammenhang. Setzt man in (1) für X die absolute Invariante J der elliptischen

Modulfunktionen, so bekommt die Ikosaedergröße x die einfache Bedeutung des „Hauptmoduls der Hauptkongruenzgruppe fünfter Stufe". Alle Arten, die Auflösung der Gleichungen fünften Grades mit den elliptischen Funktionen in Zusammenhang zu bringen, beruhen auf diesem Fundamentalsatz. Insbesondere läßt sich x selbst durch elliptische ϑ-Reihen darstellen; es ist eine Formel von prinzipieller Einfachheit; man hat (wenn ich der Kürze halber die Jacobischen Bezeichnungen gebrauchen darf):

$$x = q^{\frac{1}{5}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{2iK'\pi}{K}, q^5\right)}{\vartheta_1\left(\frac{iK'\pi}{K}, q^5\right)}. \tag{3}$$

Die Benutzung dieser Formel zur Auflösung der Ikosaedergleichung (oder ähnlicher Formeln zur Auflösung irgendwelcher Resolventen der Ikosaedergleichung) ist aber genau so ein Umweg, wie die Lösung der reinen Gleichung (2) *durch Logarithmen:*

$$x = e^{\frac{1}{n}\log X}. \tag{4}$$

Muß man doch zuerst $\frac{K'}{K}$ bezw. $\log X$ aus X berechnen, ehe man die Formeln (3), (4) anwenden kann. Die Bedeutung der Formeln für die Auflösung ist höchstens eine praktische, falls man nämlich eine Logarithmentafel bezw. eine Tafel der elliptischen Perioden K, K' besitzt. *Man möge also endlich aufhören, sich so auszudrücken, als wenn die Benutzung der elliptischen Funktionen das Wesentliche an der Theorie der Gleichungen fünften Grades wäre.* Diese Ausdrucksweise ist nur ein Residuum der zufälligen historischen Entwicklung: die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen hat den ersten Ansatz gegeben, gewisse einfache algebraische Gleichungen aufzustellen (die Modulargleichungen und Multiplikatorgleichungen für den fünften Transformationsgrad), die der Ikosaedergleichung nahe verwandt sind.

So viel über die Einführung des Ikosaeders in die Theorie der Gleichungen fünften Grades im allgemeinen. Ich muß mich nunmehr ganz auf die algebraische Seite der Aufgabe beschränken. Und hier habe ich vor allen Dingen einen fundamentalen Satz über die Ikosaedersubstitutionen zu erwähnen, der in der Folge besonders wichtig wird Man kann von der Ikosaedersubstitution der in (1) auftretenden Unbekannten x zu *homogenen* Substitutionsformeln übergehen (indem man x in den Substitutionsformeln überall durch $x_1 : x_2$ ersetzt und Zähler und Nenner in zweckmäßiger Weise trennt). Wählt man dabei die Determinante der entstehenden binären Substitutionen gleich 1, so hat man 120 binäre Substitutionen; speziell entsprechen der identischen Substitution $x' = x$ die beiden

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2 \quad \text{und} \quad x_1' = -x_1,\ x_2' = -x_2. \tag{5}$$

Und nun ist es auf keine Weise möglich (auch nicht, wenn man den Wert der Determinante abändert), *aus solchen homogenen Substitutionen eine mit der nicht homogenen Substitutionsgruppe isomorphe Gruppe zusammenzusetzen, die weniger als 120 Substitutionen enthielte.* Der Isomorphismus zwischen der Substitutionsgruppe des x und derjenigen der x_1, x_2 ist also notwendig ein meroedrischer! Dieser fundamentale Satz, der etwas abstrakt klingt, gibt der algebraischen Theorie der Gleichungen fünften Grades ihre eigentümliche Form, wie sofort näher darzulegen ist. Bemerken wir vorab, daß derselbe nicht etwa schwer zu beweisen ist. Auf S. 46, 47 der „Vorlesungen" ist er darauf zurückgeführt, daß die Gruppe der nicht homogenen Ikosaedersubstitutionen u. a. sogenannte Vierergruppen enthält und daß für diese Vierergruppen bereits der entsprechende Satz gilt. Nehmen wir, um dies einzusehen, die einfachste Darstellung der nicht homogenen Vierergruppe, wie sie durch folgende vier Substitutionen gegeben ist:

$$\begin{gathered} \text{I: } \xi' = \xi, \\ \text{II: } \xi' = -\xi, \quad \text{III: } \xi' = \frac{1}{\xi}, \quad \text{IV: } \xi' = -\frac{1}{\xi}. \end{gathered} \tag{6}$$

Hier sind II, III, IV Substitutionen von der Periode 2 und es ist zugleich

$$\text{II III IV} = \text{I}. \tag{7}$$

Will man jetzt zu einer holoedrisch isomorphen Gruppe homogener Substitutionen übergehen, so hat man I jedenfalls durch

$$\text{I}'\text{: } \xi_1' = \xi_1, \quad \xi_2' = \xi_2$$

zu ersetzen, II, III, IV aber durch

$$\begin{aligned} \text{II}'\text{: } \xi_1' &= \mp \xi_1, \quad \xi_2' = \pm \xi_2, \\ \text{III}'\text{: } \xi_1' &= \pm \xi_2, \quad \xi_2' = \pm \xi_1, \\ \text{IV}'\text{: } \xi_1' &= \mp \xi_2, \quad \xi_2' = \pm \xi_1 \end{aligned}$$

(wo in der einzelnen Horizontale je nach Belieben die oberen oder unteren Vorzeichen zu nehmen sind). Aber wie man hier auch die Vorzeichen wählen möge, *die hier eingeführten Substitutionen* II', III', IV' *haben je die Determinante* (-1) und es kann also unmöglich

$$\text{II}' \text{ III}' \text{ IV}' = \text{I}'$$

sein, wie es doch nach (7) bei holoedrischem Isomorphismus der Fall sein müßte! — Wir werden, nach dem so Bewiesenen, fortan unter den *homogenen Ikosaedersubstitutionen* kurzweg die 120 binären Substitutionen von der Determinante $+1$ verstehen, welche den 60 nicht homogenen Substitutionen des x entsprechen.

Ich werde nunmehr das zentrale Problem, dessen Erledigung uns obliegt, folgendermaßen formulieren: *man soll aus frei veränderlichen fünf Größen* z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 *(den Wurzeln der Gleichung fünften Grades) eine Funktion* $x(z_1 \cdots z_5)$ *zusammensetzen, die bei den 60 geraden Vertauschungen der* z *die 60 Ikosaedersubstitutionen erleidet.* Aus unserem fundamentalen Satz folgt sofort, daß es eine derartige *rationale* Funktion von fünf frei veränderlichen Größen z nicht gibt (Vorles. S. 255). Man schreibe nämlich, indem man x in teilerfremde Polynome als Zähler und Nenner spaltet: $\frac{\varphi(z_1 \cdots z_5)}{\psi(z_1 \cdots z_5)}$. Die so eingeführten φ, ψ würden sich bei den 60 Vertauschungen der z notwendig *homogen* linear substituieren. Dabei würden diese homogenen Substitutionen den Ikosaedersubstitutionen des x einzeln entsprechen; man hätte also eine mit den unhomogenen Ikosaedersubstitutionen holoedrisch isomorphe Gruppe binärer Substitutionen, und eine solche Gruppe existiert nicht, wie wir sahen.

Die gesuchte Funktion $x(z_1 \cdots z_5)$ *muß also von ihren Argumenten algebraisch abhängen.* Und damit sind wir in das Gebiet derjenigen Irrationalitäten der Gleichungstheorie geführt, die ich in meinen Vorlesungen (S. 158, 159) *akzessorische* nenne, weil sie zu den unmittelbar vorhandenen Irrationalitäten (den rationalen Funktionen der z) — mit denen es die Galoissche Gleichungstheorie nach ihrer gewöhnlichen Formulierung allein zu tun hat — als etwas Neues hinzutreten. Über die Leistungsfähigkeit dieser akzessorischen Irrationalitäten wissen wir vorläufig nichts Allgemeines. Wir sind vielmehr im einzelnen Falle auf tastende Versuche angewiesen. Sicher wird man bei der Auflösung irgend welcher höheren Gleichung nur solche akzessorische Irrationalitäten zulassen wollen, die sich aus den symmetrischen Funktionen der Gleichungswurzeln, ev. den vorgegebenen Affektfunktionen durch *niedere* Gleichungen berechnen. Bei den Gleichungen fünften Grades, die wir hier behandeln, gilt neben den symmetrischen Funktionen der z auch deren Differenzenprodukt (die Quadratwurzel aus der Diskriminante) als bekannt. *Der Erfolg zeigt, daß wir in mannigfacher Weise ein von den* z *ikosaedrisch abhängendes* x *konstruieren können, sobald wir nur die Quadratwurzel aus einer geeigneten rationalen Funktion dieser Größen adjungieren wollen.**) Die zweierlei Methoden zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades,

---

*) Hierzu kommt dann noch die fünfte Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, die in den Ikosaedersubstitutionen immerzu auftritt und die bei der Bildung eines geeigneten x dementsprechend jedenfalls zu benutzen ist. Zählen wir sie, wie man strenge genommen tun müßte, mit zu den akzessorischen Irrationalitäten, so hat man akzessorische Irrationalitäten in der Gleichungstheorie von Anfang an, nämlich schon bei der Reduktion der zyklischen Gleichungen auf reine Gleichungen.

welche ich in meinen „Vorlesungen“ gebe, unterscheiden sich nur durch den *Platz*, den sie der Adjunktion dieser akzessorischen Quadratwurzel anweisen. Bei der ersten Methode wird die akzessorische Quadratwurzel (indem man die Gleichung fünften Grades durch eine Tschirnhaustransformation in eine sogenannte Hauptgleichung fünften Grades verwandelt, d. h. eine Gleichung, bei der die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet) vorweggenommen. Bei der zweiten Methode wird zunächst ein Schritt auf das Ikosaederproblem zu getan und dann erst die akzessorische Quadratwurzel adjungiert. Wie bereits in der Einleitung gesagt, bevorzuge ich hier diese zweite Methode, indem ich ihre einzelnen Schritte in einer solchen Weise formelmäßig exponiere, daß sich der ganze Ansatz hernach in sinngemäßer Weise auf die Gleichungen sechsten Grades übertragen läßt.

Hier in numerierter Reihenfolge die wesentlichen Überlegungen (der zweiten Methode):

1. Wenn x_1, x_2 die homogenen binären 120 Ikosaedersubstitutionen erleiden, so erfahren die Quadrate und Produkte

$$x_1^2, \quad x_1 x_2, \quad x_2^2$$

ihrerseits nur 60 homogene ternäre Substitutionen von der Determinante 1 (deren Gruppe den 60 nicht homogenen Ikosaedersubstitutionen von $\frac{x_1}{x_2}$ und damit den 60 geraden Vertauschungen der fünf Größen $z_1, \cdots, z_5$ holoedrisch isomorph ist).

2. Dasselbe gilt, nach den allgemeinen Grundsätzen der Invariantentheorie, von den Koeffizienten einer in den x_1, x_2 quadratischen binären Form. Ich werde eine solche Form hier, um unmittelbaren Anschluß an die (auch in meinen „Vorlesungen“ benutzte) Schreibweise von Kronecker und Brioschi zu haben, folgendermaßen bezeichnen:

$$A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2. \tag{8}$$

Die A_1, $2A_0$, $-A_2$ substituieren sich nach der Ausdrucksweise der Invariantentheorie zu den x_1^2, $x_1 x_2$, x_2^2 *kontragredient*.

3. Wir schließen, daß es ohne weiteres möglich sein wird, aus irgend vorgegebenen fünf Größen $z_1, \cdots, z_5$ solche rationale Funktionen zu bilden, welche bei den geraden Vertauschungen der z sich genau so substituieren, wie die A_0, A_1, A_2. In der Tat habe ich in der bereits in der Einleitung genannten Arbeit aus Bd. 15 der Mathematischen Annalen einen allgemeinen Ansatz gegeben, demzufolge man immer, wenn zwei Größenreihen (hier die z und die A) holoedrisch isomorphe homogene lineare Substitutionen erleiden, aus den Größen der einen Art in mannig-

fachster Weise rationale Funktionen zusammensetzen kann, die sich wie Größen der zweiten Art substituieren.

4. Wir reproduzieren hier nicht diesen allgemeinen Ansatz (was unnötig weitläufig wäre), sondern geben hier gleich die abgekürzte Form, in die er sich bei unserem speziellen Problem zusammenziehen läßt und in der er mit den auf Gleichungen fünften Grades bezüglichen Entwicklungen von Kronecker und Brioschi in unmittelbaren Kontakt tritt. Es handelt sich um folgende Punkte:

4a. Man kann aus den x_1, x_2 sechs quadratische Ausdrücke bilden:

$$\sqrt{5} \cdot x_1 x_2, \quad \varepsilon^\nu x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^{4\nu} x_2^2 \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}; \nu = 0, 1, 2, 3, 4\right), \tag{9}$$

die sich bei den Ikosaedersubstitutionen mit gewissen (hier nicht näher anzugebenden) Zeichenwechseln vertauschen.

4b. Sei ferner $v(z_1, \cdots z_5)$ eine rationale Funktion der z, die bei der zyklischen Vertauschung der in natürlicher Reihenfolge genommenen z ungeändert bleibt. Wir bilden die Differenz

$$v(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5) - v(z_5 z_4 z_3 z_2 z_1)$$

und erheben sie ins Quadrat. Wir haben dann eine „metazyklische" Funktion, die u_∞^2 heißen soll, während die fünf weiteren Werte, die aus ihr durch die geraden Vertauschungen der z entstehen, in geeigneter Reihenfolge mit u_ν^2 bezeichnet werden mögen ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4$). Man kann dann die Vorzeichen der verschiedenen u so wählen, *daß sich die*

$$u_\infty, \; u_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{10}$$

bei den geraden Vertauschungen der z genau so, nämlich auch mit denselben Zeichenwechseln, linear substituieren, wie die Ausdrücke (9) *bei den korrespondierenden Ikosaedersubstitutionen der* x_1, x_2.

4c. Wir schließen, daß die folgende Form der z und der x

$$\Omega(z|x) = \sqrt{5} \cdot u_\infty \cdot x_1 x_2 + \sum_\nu u_\nu (\varepsilon^\nu x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^{4\nu} x_2^2) \tag{11}$$

ungeändert bleibt, wenn man auf die z die geraden Vertauschungen und gleichzeitig auf die x_1, x_2 die korrespondierenden Ikosaedersubstitutionen ausübt.

4d. Wir setzen jetzt, in Übereinstimmung mit (8):

$$\Omega(z|x) = A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2$$

und finden durch Vergleich:

$$\begin{cases} 2A_0 = \sqrt{5} \cdot u_\infty + \sum u_\nu, \\ A_1 = \sum \varepsilon^\nu \cdot u_\nu, \\ A_2 = \sum \varepsilon^{4\nu} \cdot u_\nu. \end{cases} \tag{12}$$

Hiermit haben wir in der Tat aus den $z_1, \cdots z_5$ Größen A_0, A_1, A_2 zusammengesetzt, die sich bei den geraden Vertauschungen der z in der gewollten Weise ternär substituieren.

5. Wir werden das hiermit erreichte Resultat in der Folge gelegentlich dahin kurz aussprechen, daß wir sagen: wir haben den $z_1, \cdots z_5$ eine quadratische binäre Form (8) „kovariant" zugeordnet. Die Diskriminante von (8):

$$A = A_0^2 + A_1 A_2 \tag{13}$$

ist als binäre Invariante dabei eine solche Funktion der $z_1, \cdots z_5$, die sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändert; sie ist also eine rationale Funktion der Koeffizienten der vorgelegten Gleichung fünften Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante.

6. Nun ist aber doch das Ziel, den $z_1, \cdots z_5$ nicht eine quadratische Form oder ein „Punktepaar" des binären Gebietes:

$$A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = 0, \tag{14}$$

sondern einen Quotienten $\frac{x_1}{x_2}$, einen „Punkt", kovariant zuzuordnen. Wir machen dies in einfachster Weise, indem wir die quadratische Gleichung (14) auflösen und dementsprechend schreiben:

$$\frac{x_1}{x_2} = x = \frac{-A_0 + \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}}{A_1}, \tag{15}$$

7. *Hiermit haben wir unsere zentrale Aufgabe gelöst: aus den $z_1 \cdots z_5$ ein solches x zusammenzusetzen, welches bei den geraden Vertauschungen der z die Ikosaedersubstitutionen erleidet.* Man beachte, daß die A_0, A_1, A_2 nach Nr. 4d rationale Funktionen der z sind, bei deren Konstruktion keine andere Irrationalität als die fünfte Einheitswurzel ε benutzt ist. Und unter der Quadratwurzel steht (nach Nr. 5) eine solche Verbindung der A_0, A_1, A_2, die sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändert. *Wir sind also mit Hilfe solcher akzessorischer Irrationalitäten zum Ziele gekommen, die man in der Theorie der Gleichungen fünften Grades füglich als niedere Irrationalitäten bezeichnen wird.*

8. Wie man nun weiter den Parameter X der Ikosaedergleichung, der unser x (15) genügt, als Funktion der Koeffizienten der Gleichung fünften Grades, deren Wurzeln die $z_1, \cdots z_5$ sind, bezw. der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante berechnet, und wie man schließlich die z mit Hilfe der Koeffizienten und der adjungierten Quadratwurzeln durch das x rational darstellt, also die Gleichung fünften Grades mit Hilfe der Ikosaedergleichung wirklich auflöst, möge hier, unter Verweis auf die „Vorlesungen", unerörtert bleiben.

9. Wohl aber möge noch zusammenfassend klar hervorgehoben werden, wieso man mit Fug und Recht von einer so gewonnenen *Auflösung* der Gleichungen fünften Grades reden kann. Es ist nicht nur eine Reihenfolge von Schritten angegeben, die man im gegebenen Falle numerisch würde durchlaufen können, so daß man die Zahlenwerte der $z_1, \cdots z_5$ tatsächlich erhält, es ist vielmehr auch eine volle funktionentheoretische Einsicht in die innere Natur des Auflösungsproblems erreicht. Schließlich sind doch die $z_1, \cdots z_5$ die verschiedenen Zweige einer von den Koeffizienten der Gleichung fünften Grades abhängigen fünfwertigen algebraischen Funktion von zunächst sehr unübersichtlicher Bauart. *Diese fünf Zweige werden in demjenigen Rationalitätsbereiche, der durch die Koeffizienten der Gleichung fünften Grades, die Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante und die zu adjungierenden akzessorischen Irrationalitäten gegeben wird, durch eine einzige, nur von einem, dem Rationalitätsbereiche angehörigen Parameter abhängige höhere Irrationalität durchsichtigster Bauart, die Ikosaederirrationalität, rational dargestellt.*

Ich möchte an dieser Stelle noch eine mehr persönliche Bemerkung über die Beziehung meiner Arbeiten über die Gleichungen fünften Grades zu denjenigen von Kronecker einschalten, um so lieber, als Sie ja, hochgeehrter Herr Kollege, über die Kroneckerschen Manuskripte verfügen und dadurch in der Lage sind, meine Angaben in authentischer Weise zu vervollständigen. Kronecker und Brioschi haben bekanntlich in ihren ersten Arbeiten über Gleichungen fünften Grades (aus dem Jahre 1858) gerade dieselben Größen A_0, A_1, A_2 benutzt, die ich vorhin (in Nr. 4b) angebe; sie haben dann die Gleichung sechsten Grades konstruiert, der $\zeta = 5A_0^2$ genügt und die Brioschi wegen ihres engen Zusammenhanges mit gewissen von Jacobi für die Transformation der elliptischen Funktionen aufgestellten Gleichungen eine Jacobische Gleichung nennt; sie haben endlich angegeben, daß man durch Adjunktion einer Quadratwurzel zu einer Gleichung mit nur einem Parameter gelangen kann. Diese Quadratwurzel bezeichnet eine akzessorische Irrationalität, die der in Formel (15) benutzten gleichwertig ist. Weiterhin stellte dann Kronecker (1861) den fundamentalen Satz auf, den ich in meinen „Vorlesungen" als Kroneckerschen Satz bezeichne und mit dessen Darlegung und Beweis ich meine „Vorlesungen" kröne; den Satz, *daß es unmöglich sei, ohne Heranziehung akzessorischer Irrationalitäten von der allgemeinen Gleichung fünften Grades eine Resolvente mit nur einem Parameter zu bilden.* Ich beweise diesen Satz l. c., wie vorher (1877) im 12. Bande der Mathematischen Annalen, indem ich mich auf die oben besprochene Eigenschaft der Ikosaedergruppe berufe, beim Übergang zur homogenen Schreibweise ihre Substitutionen mindestens zu verdoppeln;

mein erster Beweis, den ich 1877 in den Berichten der Erlanger physikalisch-medizinischen Sozietät gab (Sitzung vom 13. Januar), war noch wesentlich umständlicher. Ich habe nun vor 24 Jahren (Ostern 1881) Gelegenheit gehabt, mit Kronecker über diese Dinge ausführlich zu sprechen. Es ergab sich, daß Kronecker bei seinen Untersuchungen die Ikosaedersubstitutionen, denen er doch so nahe gekommen war, nicht gekannt und dementsprechend für seinen Hauptsatz keinen ausreichenden Beweis gefunden hatte! Es ist dies, wie ich meine, eine auch unter allgemeinen Gesichtspunkten sehr bemerkenswerte Tatsache. Denn sie bestätigt an einem besonders interessanten Falle, was Gauß so oft hervorhebt: daß die Auffindung wichtigster mathematischer Theoreme vielmehr Sache der Intuition als der Deduktion ist und daß die Herstellung der Beweise ein von der Auffindung der Theoreme sehr verschiedenes Geschäft ist. Ich bin später mit Kronecker auf den Gegenstand nie zurückgekommen, hörte aber vor einigen Jahren, daß Kronecker nach dem Erscheinen meiner „Vorlesungen" in einem Kolleg über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zur Ikosaedertheorie Stellung genommen habe. Es würde mich (und jedenfalls auch andere Mathematiker) sehr interessieren, zu erfahren, was in den hinterlassenen Papieren von Kronecker über diese Dinge enthalten sein mag, und ich möchte also den Wunsch an Sie richten, das einschlägige Material zu sichten und bald zu publizieren. —

Ein neuer Beweis des Kroneckerschen Satzes ist bekanntlich von Herrn Gordan in Bd. 29 der Mathematischen Annalen gegeben worden (1887: *Über biquadratische Gleichungen**)). Derselbe ist insofern einfacher zu lesen als der meinige, als er auf eine explizite Kenntnis der Ikosaedersubstitutionen nirgends Bezug nimmt. Trotzdem hängt derselbe, wie ich hier bemerken möchte, mit dem Grundgedanken meines Beweises auf das genaueste zusammen. Wir beide benutzen im Anschluß an eine Entwicklung von Herrn Lüroth einen Hilfssatz, der sich folgendermaßen formulieren läßt: Wenn eine Gleichung n^{ten} Grades mit frei veränderlichen Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_n$ eine rationale Resolvente mit nur einem Parameter besitzen soll, dann muß es eine rationale Funktion x der Wurzeln $z_1, \cdots z_n$ geben, die sich bei den zur Galoisschen Gruppe der Gleichung gehörigen Vertauschungen der z *linear mit konstanten Koeffizienten* transformiert. Wir benutzen ferner gemeinsam die Überlegung, daß sich diese Gruppe linearer Substitutionen beim Übergang zur binären Schreibweise in eine holoedrisch isomorphe Gruppe binärer linearer Substitutionen umsetzen

*) Man vergleiche auch die Darstellung des Gordanschen Beweises in den Lehrbüchern der Algebra von Weber und von Netto.

lassen muß. Natürlich muß diese Gruppe andererseits mit der Galoisschen Gruppe der vorgelegten Gleichung modulo einer ausgezeichneten Untergruppe der letzteren isomorph sein. Jetzt habe ich auf S. 44—47 meiner „Vorlesungen" den Satz gegeben, daß nur folgende Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen sich holoedrisch isomorph in die binäre Form umsetzen lassen: 1. Die zyklischen Gruppen. 2. Die Diedergruppen von ungeradem n. Es folgt, *daß eine Gleichung n^{ten} Grades mit frei veränderlichen Wurzeln $z_1, \cdots z_n$ nur dann eine rationale Resolvente mit nur einem Parameter zuläßt* (die dann sofort in eine reine Gleichung, bzw. eine Diedergleichung von ungeradem n umgesetzt werden kann), *wenn ihre Galoissche Gruppe modulo einer ausgezeichneten Untergruppe zu einer zyklischen Gruppe oder einer Diedergruppe von ungeradem n isomorph ist.* Eine zugehörige Resolvente mit nur einem Parameter läßt sich dann nach den Prinzipien von Annalen 15 auch sogleich aufstellen. Der so ausgesprochene allgemeine Satz umfaßt nun sowohl den Gordanschen als meinen Beweis des Kroneckerschen Satzes. Mein Beweis erledigt sich in der Tat durch den Hinweis, daß die Gruppe einer Gleichung fünften Grades mit adjungierter Quadratwurzel aus der Diskriminante einfach ist und die ihr holoedrisch isomorphe Ikosaedergruppe linearer Substitutionen einer Veränderlichen nicht unter die Voraussetzungen unseres Satzes fällt. Der Gordansche Beweis dagegen benutzt, wenn ich ihn recht verstehe, die selbstverständliche Tatsache, daß die betreffende Gruppe wie jede Gruppe sich selbst als ausgezeichnete Untergruppe enthält. Modulo dieser Untergruppe ist sie zur Identität kongruent. Und die identische Substitution fällt unter die Voraussetzung unseres Satzes. Es gibt also in der Tat Resolventen mit einem Parameter, die aber für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades gänzlich unbrauchbar sind, nämlich *lineare*, deren Wurzel eine solche Funktion der $z_1, \cdots z_5$ ist, welche bei den geraden Vertauschungen der z ihren Wert überhaupt nicht ändert! Aber andere (rationale) Resolventen mit nur einem Parameter gibt es nicht, oder besser: jede rationale Resolvente unserer Gleichung fünften Grades mit nur einem Parameter ist linear und also unbrauchbar. —

So viel über die Ikosaedersubstitutionen und die durch sie vermittelte Auflösung der Gleichungen fünften Grades. An Stelle der „unären" Substitutionen $x' = e^{\frac{2\pi k}{n}} x$, welche die Wurzeln einer *reinen* Gleichung untereinander verknüpfen, sind „binäre" lineare Substitutionen zweier homogenen Variabeln x_1, x_2 getreten. Und hiermit ist zugleich der Weg zu neuen Verallgemeinerungen geöffnet. Man hat einfach Gruppen linearer Substitutionen *mehrerer* homogener Variablen heranzuziehen! Ich kann hier unmöglich die Überlegungen wiederholen, die ich in dieser Hinsicht zu-

erst im 15. Bande der Mathematischen Annalen gab (l. c. 1879), oder die Ausführungen nennen, die sich später daran geschlossen haben. Es genüge, diesbezüglich auf Webers Lehrbuch und auf den ebenfalls bereits zitierten Enzyklopädieartikel von Wiman zu verweisen.*) Wir denken uns in der Folge eine *Gleichung sechsten Grades nebst der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante* gegeben, deren Galoissche Gruppe also aus den 360 geraden Vertauschungen der Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_6$ besteht. Es wird darauf ankommen, die kleinste Zahl homogener $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ zu benutzen, bei denen eine mit diesen 360 Vertauschungen isomorphe Gruppe linearer Substitutionen möglich ist. Erwiese sich dieser Isomorphismus als holoedrisch, so würden wir nach der Vorschrift von Bd. 15 sofort rationale Funktionen der $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_6$ hinschreiben können, die sich bei den 360 geraden Vertauschungen der ε wie die $x_1, \cdots x_\mu$ linear substituierten. Aber es zeigt sich, daß auch hier (wie bei den Gleichungen fünften Grades) der Isomorphismus ein meroedrischer ist, so daß wir vor die Frage gestellt werden, ob wir, bzw. wie wir mit Hilfe niederer akzessorischer Irrationalitäten überhaupt durchkommen?

Einen ersten Ansatz zur Erledigung der so formulierten Fragestellung habe ich in Bd. 28 der Mathematischen Annalen gemacht (1886, *Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades*). Daß es eine *ternäre* Gruppe linearer Substitutionen geben sollte, die mit den 360 geraden Vertauschungen von sechs Dingen isomorph wäre, schien damals, auf Grund der vorläufigen Untersuchung dieser Frage durch Herrn C. Jordan, ausgeschlossen; eine solche Gruppe wurde erst 1889 von Herrn Valentiner entdeckt (Bd. 6 der Serie V der Abhandlungen der Dänischen Akademie: *De endelige Transformations-Gruppers Theori*) und nach Struktur und zugehörigen fundamentalen Invarianten zum erstenmal von Herrn Wiman 1895 untersucht (Math. Ann. Bd. 47: *Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen*). Ich habe mir also damals für die allgemeine Gleichung sechsten Grades — und zugleich auch für die allgemeine Gleichung siebenten Grades — eine isomorphe Gruppe *quaternärer* Kollineationen konstruiert, und habe gezeigt, daß man bei der Zurückführung der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades auf die entsprechenden quaternären Gleichungsprobleme je mit zwei akzessorischen Quadratwurzeln ausreicht.**)

---

*) Eine erste übersichtliche Orientierung gibt auch der Vortrag IX meines gelegentlich der Weltausstellung in Chicago gehaltenen *Evanston Colloquium* (Macmillan, New-York, 1894).

**) Die Gruppe, welche ich l. c. für die Gleichungen sechsten Grades in Vorschlag bringe, enthält sogar 720 Kollineationen, so daß es bei ihrer Benutzung nicht nötig ist, die Quadratwurzel aus der Diskriminante der Gleichung sechsten Grades

Der hiermit gegebene Ansatz ist nun, was die Gleichungen *sechsten* Grades angeht, auf die wir uns hier beschränken*), *seit der Entdeckung der Valentinergruppe bis auf weiteres überflüssig geworden.* Ich bemerke dies ausdrücklich, weil hier die Stelle ist, wo Herr Lachtin, wie zu Eingang dieses Briefes erwähnt, einen unnötigen Umweg macht. Um nämlich die Gleichungen sechsten Grades mit der Valentinergruppe in Verbindung zu bringen, geht Herr Lachtin durch die in Bd. 28 der Mathematischen Annalen gegebene Entwicklung hindurch. Dies ist nicht uninteressant**), aber für den nächsten hier zu erreichenden Zweck keineswegs notwendig. Der Übergang von den Gleichungen sechsten Grades zur Valentinergruppe, wie ich ihn in meiner römischen Note von 1899 andeutete und den ich jetzt ausführlicher exponieren will, bedarf der Anlehnung an die quaternäre Substitutionsgruppe in keiner Weise. Der Deutlichkeit halber will ich die in Betracht kommenden Überlegungen wieder in eine Reihe von Nummern spalten, deren Aufeinanderfolge die Analogie mit dem oben bei den Gleichungen fünften Grades befolgten Gedankengange deutlich hervortreten läßt. Folgendermaßen:

1. Die Aufgabe ist, aus frei veränderlichen sechs Größen $z_1, z_2, \cdots z_6$ solche drei Funktionen x_1, x_2, x_3 zusammenzusetzen, deren Verhältnisse bei den 360 geraden Vertauschungen der z die 360 Kollineationen der Valentinergruppe erleiden.

2. Nun hat bereits Herr Wiman l. c. bemerkt, daß sich die Anzahl der Valentineroperationen, wenn man von den Kollineationen der Ebene

---

vorab zu adjungieren. Dagegen umfaßt die Gruppe, welche den Gleichungen siebenten Grades entspricht, nur $\frac{7!}{2} = 2520$ Kollineationen.

*) Für die Gleichungen *siebenten* Grades bleibt der quaternäre Ansatz bestehen; es ist aber unmöglich, die hierauf bezüglichen interessanten Fragen im Texte weiter zu verfolgen.

**) Herr Lachtin bemerkt, daß sich bei der quaternären Gruppe die Flächen zweiten Grades im Raume ganz ähnlich linear vertauschen, wie bei der Valentinergruppe die Kurven dritter Ordnung der Ebene. Von hier aus kann man (wie beiläufig bemerkt sei) ohne besondere Mühe zu derselben Form Σ gelangen, die ich unten unter (19) mitteile. Man hat nur zu beachten, daß die Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_6$ der Gleichung sechsten Grades, und ebenso deren Quadrate $z_1^2, z_2^2, \cdots z_6^2$ nach den Entwicklungen von Bd. 28 im Raume einen linearen Komplex festlegen, und daß diese beiden Komplexe zusammen mit dem ebendort eingeführten „Einheitskomplex“ durch ihre gemeinsamen Linien eine Fläche *zweiten Grades* bestimmen. Irgend eine akzessorische Irrationalität tritt hierbei noch nicht auf. Es ist dann in keiner Weise nötig, sich beim Übergang vom Raume zur Ebene so, wie Herr Lachtin tut, auf die verhältnismäßig komplizierten Formeln zu beziehen, durch welche ich in Bd. 28 den Wurzeln $z_1, \cdots z_6$ einen Raum*punkt* zugeordnet habe. Also auch in dieser Hinsicht kann der Ansatz von Herrn Lachtin noch abgekürzt werden.

zu den entsprechenden ternären linearen Substitutionen übergeht, mindestens *verdreifacht*. Es ist also von vornherein ausgeschlossen, daß die gesuchten x_1, x_2, x_3 rationale Funktionen der $z_1, z_2, \cdots z_6$ sein könnten.

3. Wir wollen die homogenen Valentinersubstitutionen fortan so fixieren, daß ihre Determinante durchweg gleich *Eins* ist. Ihre Zahl beträgt dann genau $3 \cdot 360 = 1080$ und es entsprechen der identischen Kollineation die drei Substitutionen:

$$x_1' = j^\nu x_1,\ x_2' = j^\nu x_2,\ x_3' = j^\nu x_3. \quad \left(j = e^{\frac{2i\pi}{3}};\ \nu = 0, 1, 2\right) \tag{16}$$

4. Wir bemerken jetzt, daß bei diesen 1080 homogenen Substitutionen die zehn Glieder dritter Ordnung, die man aus den x aufbauen kann:

$$x_1^3,\quad x_1^3 x_2, \cdots$$

ihrerseits nur 360 lineare Substitutionen erleiden (deren Gruppe mit der Gruppe der geraden Vertauschungen der $z_1, z_2, \cdots z_6$ holoedrisch isomorph sein wird).

5. Wir bilden nun ferner eine beliebige kubische ternäre Form

$$a_{111}x_1^3 + 3a_{112}x_1^2 x_2 + \cdots$$

(die, gleich 0 gesetzt, eine *„Kurve dritter Ordnung"* in der Ebene der x darstellt). Die Koeffizienten $a_{111}, 3a_{112}, \cdots$ verhalten sich bei beliebigen linearen Substitutionen der x_1, x_2, x_3 zu den $x_1^3, x_1^2 x_2, \cdots$ *kontragredient*. Sie erleiden also bei den Substitutionen der Valentinergruppe ebenfalls genau 360 lineare Substitutionen, die mit den 360 geraden Vertauschungen der $z_1, z_2, \cdots z_6$ eineindeutig zusammengeordnet werden können.

6. Wir schließen hieraus, daß es ohne weiteres möglich ist, zehn rationale Polynome der frei veränderlichen Größen $z_1, z_2, \cdots z_6$ zu bilden:

$$\varphi_{111}, \varphi_{112}, \cdots,$$

welche sich bei den geraden Vertauschungen der z genau so substituieren, wie die

$$a_{111},\ a_{112}, \cdots$$

bei den korrespondierenden Subsitutionen der Valentinergruppe, — also den Wurzeln z, wie wir es kurz ausdrücken, in rationaler Weise eine Kurve dritter Ordnung *kovariant* zuzuordnen.

7. Um es anders auszudrücken: Man kann auf mannigfache Weise, ohne Benutzung akzessorischer Irrationalitäten*), *eine von den z und x abhängige, in den x kubische Form bilden*:

$$\Omega(z_1 \cdots z_6 | x_1, x_2, x_3) = \varphi_{111} \cdot x_1^3 + 3\varphi_{112} \cdot x_1^2 x_2 \cdots, \tag{17}$$

*) Abgesehen natürlich von den numerischen Irrationalitäten, welche in den Substitutionen der Valentinergruppe auftreten. Es sind dies (in Übereinstimmung mit den im Texte folgenden Formeln (18) usw.) die Quadratwurzeln $\sqrt{-3}$ und $\sqrt{5}$.

welche unverändert bleibt, wenn man auf $x_1 x_2 x_3$ die Valentinersubstitutionen und gleichzeitig auf die $z_1, \cdots z_6$ die korrespondierenden geraden Vertauschungen ausübt.

8. Was die wirkliche Herstellung einer solchen Form Ω angeht, so unterlasse ich wieder, den allgemeinen aber weitläufigen Prozeß heranzuziehen, den ich für alle derartige Aufgaben in Bd. 15 der Mathematischen Annalen gab, sondern entwickele, genau wie bei den Gleichungen fünften Grades an der entsprechenden Stelle, eine abgekürzte Methode, die sich (im Laufe des vergangenen Winters) aus meiner Korrespondenz mit Herrn Gordan ergeben hat. Man hat folgende Beziehungen zu kombinieren:

8a. Bei den 360 Kollineationen der Valentinergruppe spielen, wie zuerst Herr Wiman nachwies, zwei Systeme von je sechs Kegelschnitten eine wichtige Rolle. *Die sechs Kegelschnitte jedes der beiden Systeme vertauschen sich bei den 360 Kollineationen auf 360 Weisen unter sich.*

8b. Die Gleichungen dieser $2 \cdot 6$ Kegelschnitte sind (bei Zugrundelegung eines geeigneten kanonischen Koordinatensystems) zuerst von Herrn Gerbaldi aufgestellt worden (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XII, 1898: *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane, I;* vergl. auch die bereits 1882 in den Atti di Torino, Bd. XVII, S. 358 ff. veröffentlichte Note: *Sui gruppi di sei coniche in involuzione*). Ich will hier die korrespondierenden ternären quadratischen Formen, indem ich mich auf das eine System von sechs Kegelschnitten beschränke, nach dem Vorgange von Herrn Gordan gleich mit der Determinante 1 ausstatten. Wir können dann schreiben:

$$(18)\quad \begin{cases} k_1 = x_1^2 + j\,x_2^2 + j^2 x_3^2, \\ k_2 = x_1^2 + j^2 x_2^2 + j x_3^2, \\ k_3 = \dfrac{+1-\sqrt{-15}}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \left(\dfrac{-3+\sqrt{-15}}{4}\right)(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2), \\ k_4 = \dfrac{+1-\sqrt{-15}}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \left(\dfrac{-3+\sqrt{-15}}{4}\right)(x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2), \\ k_5 = \dfrac{+1-\sqrt{-15}}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \left(\dfrac{-3+\sqrt{-15}}{4}\right)(-x_2x_3 + x_3x_1 - x_1x_2), \\ k_6 = \dfrac{+1-\sqrt{-15}}{8}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) + \left(\dfrac{-3+\sqrt{-15}}{4}\right)(-x_2x_3 - x_3x_1 + x_1x_2). \end{cases}$$

8c. Die $k_1, \cdots k_6$ sind durch die Forderung, daß ihre Determinante gleich 1 sein soll, nur je bis auf eine dritte Einheitswurzel bestimmt. In der Tat vertauschen sich auch die vorstehenden k bei den 1080 Valentinersubstitutionen unter Multiplikation mit gewissen dritten Einheitswurzeln.

8d. Wir wollen nunmehr aus irgend drei der k:

$$k', k'', k'''$$

eine in deren Koeffizienten trilineare Kovariante und eine ebensolche Invariante bilden. — Als erstere wählen wir die *Funktionaldeterminante* $|k'k''k'''|$, die bei Vertauschung zweier k ihr Vorzeichen wechselt. Als Invariante nehmen wir eine symmetrische Verbindung der Koeffizienten der drei k, nämlich denjenigen Ausdruck, der bei der Entwicklung der Koeffizientendeterminante der Form $\lambda'k' + \lambda''k'' + \lambda'''k'''$ mit $\lambda'\lambda''\lambda'''$ multipliziert erscheint. Ich will denselben hier vorübergehend mit $(k'k''k''')$ bezeichnen; es ist dies im vorliegenden Falle eine einfache numerische Größe.

8e. Wir bilden jetzt, für alle möglichen Tripel k', k'', k''', den Quotienten

$$\frac{|k'k''k'''|}{(k'k''k''')}.$$

Man zeigt, *daß die 20 so erhaltenen Terme sich bei den 1080 Substitutionen der Valentinergruppe genau so unter ev. Vorzeichenänderung vertauschen, wie die 20 Differenzenprodukte*

$$(z'' - z''')(z''' - z')(z' - z'')$$

bei den korrespondierenden geraden Vertauschungen der z.

8f. Daher haben wir in der über alle Tripel erstreckten Summe

$$\Sigma(z'' - z''')(z''' - z')(z' - z'') \cdot \frac{|k'k''k'''|}{(k'k''k''')} \tag{19}$$

ein einfaches Beispiel einer solchen Form

$$\Omega(z_1 \cdots z_6 \; x_1x_2x_3),$$

wie wir sie in Nr. 7 suchten.

8g. Allgemeinere Beispiele (die wir im folgenden indes nicht brauchen) erhält man, wenn man in (19) statt des Differenzenprodukts der z', z'', z''' irgend eine Determinante

$$\begin{vmatrix} z'^{\alpha} & z''^{\alpha} & z'''^{\alpha} \\ z'^{\beta} & z''^{\beta} & z'''^{\beta} \\ z'^{\gamma} & z''^{\gamma} & z'''^{\gamma} \end{vmatrix}$$

einsetzt.

8h. Ordnen wir jetzt die Summe (19) nach den sukzessiven Gliedern $x_1^3, x_1^2x_2, \cdots$, indem wir wie in Formel (17) schreiben:

$$\Sigma = \varphi_{111} \cdot x_1^3 + 3\varphi_{112} \cdot x_1^2x_2 + \cdots, \tag{20}$$

so haben wir in den $\varphi_{111}, \varphi_{112}, \cdots$ genau solche rationale Funktionen der $z_1, \cdots z_6$, wie wir sie in Nr. 6 suchten.

9. Es wird nun darauf ankommen, der *Kurve dritter Ordnung*

$$\Sigma = 0 \tag{21}$$

(deren Koeffizienten rational von den z abhängen) einen Punkt $x_1 : x_2 : x_3$ unter Heranziehung möglichst niedriger akzessorischer Irrationalitäten *in kovarianter Weise* zuzuordnen.

10. Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung bietet hierzu verschiedene Möglichkeiten. Ich will hier der Kürze halber, wie ich es in meiner römischen Note tat, einen *Wendepunkt* der Kurve dritter Ordnung wählen.

11. In der Tat verlangt die Bestimmung eines solchen Wendepunktes nach der bekannten Theorie von Hesse nur solche Irrationalitäten, welche man bei der Auflösung der Gleichungen sechsten Grades als niedere Irrationalitäten ansehen kann: Quadratwurzeln und Kubikwurzeln. (Die Einzelheiten sollen hier unerörtert bleiben.)

12. Andererseits ist der Wendepunkt mit der Kurve dritter Ordnung gewiß in kovarianter Weise verknüpft: wenn man auf die Kurve und den auf ihr gewählten Wendepunkt irgend eine Kollineation ausübt, so wird man auf der entstehenden neuen Kurve unter den neun überhaupt auf ihr vorhandenen Wendepunkten jedesmal einen bestimmten erhalten. Es gilt dies insbesondere von den 360 Kollineationen der Valentinergruppe.

13. Wir denken uns jetzt in die Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ des von uns gewählten Wendepunktes statt der Koeffizienten $\varphi_{111}, \varphi_{112}, \cdots$ der Kurve dritter Ordnung ihre aus (20) resultierenden Werte in den $z_1, \cdots z_6$ eingetragen.

14. Wenn wir in diesen Ausdrücken der $x_1 : x_2 : x_3$ die $z_1, \cdots z_6$ beliebig in gerader Weise vertauschen, erleiden sie die eindeutig bestimmten Kollineationen der Valentinergruppe.

Wir schließen daraus, daß die rationalen Funktionen der $z_1, \cdots z_6$, welche nach Anbringung aller Reduktionen in den Ausdrücken der $x_1 : x_2 : x_3$ unterhalb der auftretenden Quadratwurzeln und Kubikwurzeln verbleiben, bei den geraden Vertauschungen der z ungeändert bleiben. Sie können also als rationale Funktionen der Koeffizienten der vorgelegten Gleichung sechsten Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante dargestellt werden.

15. Daher werden wir die bei der Ausrechnung des Wendepunktes erforderlichen Irrationalitäten mit Fug und Recht als akzessorische Irrationalitäten *niederen Charakters* bezeichnen dürfen.

16. Wir haben also mit der Berechnung der Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ eines Wendepunktes unserer C_3 in der Tat der Aufgabe entsprochen, auf die es hier ankam: *aus den frei veränderlichen z unter Adjunktion akzessorischer Irrationalitäten elementaren Charakters Größen $x_1 : x_2 : x_3$ zu bilden, welche bei den geraden Vertauschungen der z die 360 Kollineationen der Valentinergruppe erleiden.*

Dies ist die Ausführung des speziellen Inhaltes meiner römischen Note, welche ich hier zu geben dachte.*)

Man wird vielleicht noch eine genauere Auseinandersetzung der in Nr. 14 benutzten Schlußweise wünschen Am einfachsten wäre es, an der Kurve (21) die bekannten Gleichungen, die zur Bestimmung eines Wendepunktes einer Kurve dritter Ordnung führen, alle durchzurechnen und die Richtigkeit der Behauptung damit tatsächlich zu bestätigen. Im übrigen kann man, wie mir Herr Gordan bemerkt, die ganze Schwierigkeit der Schlußfolgerung folgendermaßen umgehen. Man stelle einfach die Gleichung neunten Grades auf, der die neun Werte genügen, welche eine absolute Invariante der Valentinergruppe (z. B. das sogleich zu nennende v) in den neun Wendepunkten annimmt! Diese Gleichung muß für alle 360 Kurven dritter Ordnung (welche durch die Substitutionen der Valentinergruppe und also durch gerade Vertauschung der ε auseinander hervorgehen) dieselbe sein. Ihre Koeffizienten sind also nach Wegwerfung gleichgültiger Faktoren selbst solche rationale Funktionen der ε, welche sich bei den geraden Vertauschungen der ε nicht ändern. Dabei kann der Affekt dieser Gleichung neunten Grades kein anderer sein, als der der ursprünglichen Wendepunktsgleichung. Sie wird also ebenfalls durch Quadratwurzeln und Kubikwurzeln gelöst, unter denen dann aber selbstverständlicherweise nur solche rationale Funktionen der ε stehen, die sich bei den geraden Vertauschungen der ε nicht ändern. Adjungieren wir jetzt einen der so resultierenden neun Werte unserer absoluten Invariante (also etwa des v), so wird sich aus ihm und der Gleichung (21) der Kurve dritter Ordnung, bezw. der Gleichung ihrer Hesseschen Kurve, der zugehörige einzelne Wendepunkt $x_1 : x_2 : x_3$ rational berechnen. Und damit ist die Behauptung der Nr. 14, betreffend die bei der Berechnung des Wendepunktes erforderlichen Irrationalitäten, von selbst mit bewiesen.

Die weitere Behandlung der Gleichungen sechsten Grades wird nun ohnehin in der Weise erfolgen müssen, daß wir für den herausgegriffenen Wendepunkt unserer Kurve dritter Ordnung die absoluten Invarianten der Valentinergruppe berechnen. Nach den Angaben von Herrn Wiman hat die Valentinergruppe drei niedrigste Invarianten:

$$F,\ H,\ \Phi \tag{22}$$

beziehungsweise von den Graden 6, 12 und 30 in den x_1, x_2, x_3. Aus

*) Der Schlußsatz der Note ist beim Abdruck in den Rendiconti der Accademia dei Lincei durch eine merkwürdige Umstellung unverständlich geworden. Es soll heißen: „E così, col sussidio di irrazionalità accessorie, che si suole riguardare come elementare, si parviene alla meta.“ Statt dessen ist gedruckt: „E così, col sussidio di irrazionalità accessorie, si parviene alla meta, che si suole riguardare come elementare.“

ihnen setzen sich die beiden fundamentalen absoluten Invarianten zusammen, die ich im Anschlusse an die sogleich zu nennende Arbeit von Herrn Lachtin hier mit v und w bezeichne:

$$v = \frac{\Phi}{F^5}, \quad w = \frac{H}{F^2}. \tag{23}$$

Tragen wir hier für $x_1 : x_2 : x_3$ die Koordinaten unseres Wendepunktes ein, so werden die v, w rationale Funktionen der Koeffizienten der Gleichung sechsten Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante bezw. der zwischendurch eingeführten akzessorischen Irrationalitäten. *Die Berechnung der $x_1 : x_2 : x_3$ aus den somit bekannten v, w ist das Normalproblem, auf welches wir die Auflösung der Gleichungen sechsten Grades reduzieren.* Es ist, so wie es nun vor uns steht, ein Problem mit *zwei* willkürlichen Parametern, dadurch ausgezeichnet, daß sich alle seine 360 Lösungssysteme $x_1 : x_2 : x_3$ aus einem beliebigen derselben durch die 360 von vornherein bekannten Kollineationen der Valentinergruppe ergeben. Irgend eine Methode, die Parameterzahl mit Hilfe fernerer niederer Irrationalitäten auf eins herabzudrücken, ist nicht zur Hand. Versucht man beispielsweise dem Wendepunkte $x_1 : x_2 : x_3$, den wir auswählten, einen Punkt $x_1' : x_2' : x_3'$ der Kurve sechster Ordnung $F = 0$ in kovarianter Weise zuzuordnen und damit statt des Normalproblems (23) das folgende zu setzen:

$$F' = 0, \quad t' = \frac{\Phi'^2}{H'^5}, \tag{24}$$

so stößt man bei dem gewöhnlichen Ansatze (Schnitt der Kurve $F = 0$ mit einer vom Punkte $x_1 : x_2 : x_3$ kovariant abhängenden geraden Linie) auf eine Hilfsgleichung, die selbst wieder vom sechsten Grade ist!

Der Vollständigkeit wegen verlangen wir endlich noch Umkehrformeln aufzustellen, d. h. die Wurzeln $z_1, \cdots z_6$ der vorgelegten Gleichung sechsten Grades durch das einzelne Lösungssystem $x_1 : x_2 : x_3$ von (23) und die als bekannt vorausgesetzten Größen rational zu berechnen. *Hiermit ist der algebraische Teil der von uns hier zu skizzierenden Auflösung der Gleichungen sechsten Grades vollständig umschrieben.*

Der transzendente Teil aber wird verlangen, *aus den Gleichungen* (23) *die $x_1 : x_2 : x_3$ irgendwie durch unendliche Prozesse wirklich zu berechnen.* Einen ersten Ansatz hierzu macht Herr Lachtin in einer umfangreichen Arbeit, welche zuerst russisch (1901) im 22. Bande der Moskauer Mathematischen Sammlung und dann 1902 in deutscher Bearbeitung in Bd. 56 der Mathematischen Annalen erschienen ist.*)

*) *Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung sechsten Grades allgemeiner Art.* (Mathem. Ann. Bd. 56, S. 445—481.)

Schreiben wir:

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[6]{F}}, \quad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt[6]{F}}, \quad y_3 = \frac{x_3}{\sqrt[6]{F}}, \tag{25}$$

so erweisen sich die y als Lösungssystem von drei simultanen partiellen Differentialgleichungen, welche die drei zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}$$

durch die beiden ersten $\left(\frac{\partial y}{\partial v} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial w}\right)$ und das y selbst linear ausdrücken. Herr Lachtin hat l. c. gezeigt, daß die Koeffizienten dieser Differentialgleichungen rationale ganze Funktionen der absoluten Invarianten v, w sind, die gewisse angebbare Grade nicht übersteigen. Dagegen hat er die numerischen Koeffizienten dieser Polynome nicht ausgerechnet. Die hier verbleibende Lücke wird nun gerade durch die Arbeit des Herrn Gordan, auf die ich im Eingang dieses Briefes verweise, ausgefüllt. *In der Tat ist es Herrn Gordan dort gelungen, die in Rede stehenden partiellen Differentialgleichungen explizite aufzustellen.* Es ist damit ermöglicht, die y_1, y_2, y_3 nach Potenzen von v und w oder auch von beliebigen linearen Funktionen von v resp. w in Reihen zu entwickeln, und es kann dann nicht mehr schwer sein, die Bereiche zu bestimmen, in denen die verschiedenartigen so entstehenden Reihen konvergieren, — *also das transzendente Problem in direkter Weise zu lösen.*

Der Vollständigkeit wegen muß hinzugefügt werden, daß das spezielle, durch die Gleichungen (24) vorgestellte Normalproblem bereits eingehender funktionentheoretisch diskutiert ist. Herr Fricke hat 1896 auf der Frankfurter Naturforscherversammlung die der Valentinergruppe entsprechende Zerlegung der zur Kurve $F = 0$ gehörenden Riemannschen Fläche (vom Geschlecht 10) in Fundamentalbereiche behandelt und eine nahe Beziehung derselben zur Zerlegung der Halbebene in Kreisbogendreiecke von den Winkeln

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{5}$$

bemerkt.*) Herr Lachtin hat dann 1898 im 51. Bande der Mathematischen Annalen**) diese Angaben bestätigt und die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt, welcher — im Falle der Gleichungen (24) —

---

*) Vergl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. V: *Über eine einfache Gruppe von 360 Operationen.*

**) *Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung sechsten Grades mit einer Gruppe 360. Ordnung.* (Math. Ann. Bd. 51, S. 463—472.)

die mit einem geeigneten Faktor multiplizierten Größen x_ν in bezug auf den Parameter t genügen.

Ich bin am Ende meiner Darlegungen. Die Analogie der vorgeschlagenen Auflösung der Gleichungen sechsten Grades mit der Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch die Ikosaedergleichung tritt, hoffe ich, überzeugend hervor. Eine feinere Durchführung der Einzelheiten, wie sie für die Gleichungen fünften Grades seinerzeit von Herrn Gordan und mir gegeben wurde und in geometrischer Form in meinen „Vorlesungen über das Ikosaeder" zur Darstellung gelangte, muß vorbehalten werden.

Göttingen, den 22. März 1905.

Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.

Sechster Bericht.*)

Von

FELIX KLEIN in Göttingen.

Unser Gauß-Archiv hat seit Erscheinen des letzten Berichtes**) wieder eine erfreuliche Bereicherung erfahren; wir erhielten:

1) 26 Originalbriefe von Gauß an Repsold von Herrn Dr. Repsold, Hamburg.

2) 11 Originalbriefe von Gauß an Hansen, 1 Originalbrief von Gauß an Lindemann, 1 Kopie eines Briefes von Gauß an Benzenberg, von Herrn Professor Harzer, namens der Hansenschen Familie.

3) einen Originalbrief von Gauß an G. H. Schubert, von Herrn Professor Joh. Ranke, München, durch Vermittlung von Herrn Professor Engel, Leipzig-Greifswald.

4) Kopie eines Briefes von Gauß an Hauptmann Müller und anderes von Herrn F. S. Archenhold, Treptow.

5) eine größere Zahl auf Gauß und Wilh. Weber bezüglicher Papiere aus dem Nachlaß von Professor Rehnisch, Göttingen, von Frau Professor Rehnisch.

6) ein Exemplar der Disquisitiones generales circa superficies curvas ins englische übersetzt von Morehead und Hiltebeitel.

Außerdem wurde uns zur Einsicht zur Verfügung gestellt:

ein Vorlesungsheft von dem Geologen Peter Merian, das sich auf eine im Wintersemester 1815/16 von Gauß gehaltene Vorlesung „über verschiedene mathematische Gegenstände" bezieht, von Herrn Dr. Stehlin, Basel, durch Vermittlung von Herrn Dr. Fueter.

Im Herbste vorigen Jahres erschien der IX. Band der Werke, bearbeitet von Herrn L. Krüger, wodurch das Unternehmen um einen

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, 1904, Heft 1.

**) Fünfter Bericht, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften, Geschäftliche Mitteilungen, 1902. Abgedruckt in Bd. 57 der Math. Annalen.

großen Schritt seiner Vollendung entgegengeführt worden ist; infolge der hierdurch entstandenen Entlastung kann nun auch Band VII in schnellerem Tempo weitergeführt werden und es mögen über seinen Inhalt einstweilen folgende Mitteilungen hier Platz finden, die ich dem Herausgeber, Herrn Brendel, verdanke:

„Die Theoria motus, welche den Band eröffnen wird, ist fertig gesetzt; es hat sich im Laufe des Neudrucks gezeigt, daß in den numerischen Beispielen sich eine größere Zahl von Fehlern findet, woraus Anlaß genommen wurde, diese sämtlich einer gründlichen Revision zu unterziehen. Diese allerdings etwas mühsame Arbeit erschien deswegen wünschenswert, weil die von Gauß hier angeführten und bis in die Einzelheiten durchgeführten Beispiele klassisch geworden sind und auch heute noch gern, namentlich als Prüfstein neuerer Methoden, wieder herangezogen werden. Man sieht auch hieran, wie an den unten zu erwähnenden Störungsrechnungen, daß Gauß keineswegs mit einer so peinlichen Genauigkeit gearbeitet hat, wie man bisher anzunehmen pflegte. Wenn er sich vorgenommen hatte, pauca sed matura zu schaffen, so hat er also sein „matura" nicht im pedantischen Sinne so gemeint, daß alle Einzelheiten peinlich durchgeprüft sein, sondern daß von höherem Gesichtspunkte aus das Wesen und die wahre Bedeutung und Tragweite der von ihm geschaffenen Theorien erkannt sein sollten; daß er auch die gesamte Kärrnerarbeit hat selbst leisten wollen, lag nicht in seiner Absicht; hätte er das tun wollen, so wäre sicher auch der erste Teil seines Wahlspruchs, „pauca", in Erfüllung gegangen."

„Bei der Herausgabe der gesammelten Werke war nun die Frage zu entscheiden, was geschehen solle, wenn beim Neudruck an irgend einer Stelle Fehler im Original gefunden wurden; wo sich diese Fehler leicht verbessern ließen, empfahl es sich, dies zu tun; in vielen Fällen, namentlich bei längeren Rechnungen, schien es aber angemessener, von einer solchen Verbesserung abzusehen, da dies eine vollkommene Umrechnung des gesamten Materials erfordert hätte. Natürlich ist bei der Herausgabe stets angegeben worden, falls irgend welche Fehler im Original entdeckt wurden. Bei größeren Rechnungen, wie den Pallasstörungen, wäre eine genaue Kontrolle auch undurchführbar gewesen und es wurde nur versucht, solche Proben aus den Originalen als Beispiele zu geben, welche in sich fehlerfrei waren. Band VII wird in dieser Hinsicht möglichst einheitlich mit Band IX gestaltet werden, in welchem Herr L. Krüger diese Frage sehr geschickt gelöst hat."

„An die Theoria motus werden sich noch einzelne kleinere Notizen anschließen, welche sie teils ergänzen, teils sich auf verwandte Probleme beziehen, wie z. B. auf die Bestimmung von Kometenbahnen. Sodann

werden Gauß' Rechnungen über die Störungen der Ceres folgen, bei denen er sich wesentlich an Laplaces Mécanique céleste anlehnt (Störungen in Polarkoordinaten), wenn er auch die Methoden für seine Zwecke umformt, namentlich bei der Entwicklung der Störungsfunktion (1802) bereits von der Darstellung des vollständigen elliptischen Integrals durch das arithmetisch-geometrische Mittel Gebrauch macht. Die numerischen Rechnungen sind hier fehlerhaft infolge Anwendung einer falschen Formel und dies gilt namentlich von den in Zachs Monatlicher Korrespondenz 1802 Oktober publizierten Resultaten."

„Den interessantesten Gegenstand werden die nun folgenden Untersuchungen über die Pallasstörungen bilden, sowohl mit Bezug auf die von Gauß angewandten Methoden zur Berechnung der speziellen und der allgemeinen Störungen als namentlich mit Bezug auf die Entdeckung, daß sich die mittleren Bewegungen von Jupiter und Pallas wie 7 zu 18 verhalten (Göttingische Gelehrte Anzeigen von 1812 April und Gauß an Bessel 5. Mai 1812). Bereits in einem früheren Berichte*) ist erwähnt, daß sich einige kleine Zettel über diese Frage gefunden haben; es scheint aber, daß diese nicht zu den in den Jahren bis 1812 ausgeführten Untersuchungen über die Störungen der Pallas gehören, da die letzteren sich bis in alle Einzelheiten inzwischen haben aufklären lassen und unter ihnen sich auch die Rechnungen befinden, aus denen Gauß unzweifelhaft seinen Schluß gezogen hat, daß sich das Verhältnis 7/18 der mittleren Bewegungen immer wieder herstellt. Hierzu sei folgendes bemerkt:"

„Gauß hat bei den Pallasstörungen die Methode der Variation der Elemente benutzt (vor der Publikation von Lagranges Methode); die sechs Differentialgleichungen haben daher auch eine ähnliche Form wie die sonst üblichen; als zu variierende Elemente benutzt Gauß außer Neigung, Knotenlänge, mittlerer Länge, Länge des Perihels und dem Exzentrizitätswinkel teils die mittlere Bewegung, teils die halbe große Achse, teils den halben Parameter; die Störungen der mittleren Länge in der Anfangsepoche, die Gauß einfach Epoche der mittleren Länge nennt, teilt er in zwei Teile, von denen der erstere die durch das bekannte Doppelintegral $\int\int dn\,dt$ dargestellten besonders großen Störungen enthält. Die Entwicklung der Störungsfunktion geschieht nach den mittleren Anomalien der beiden Körper und zwar nach beiden Argumenten mit Hilfe der Interpolationsmethode, die auch Hansen später benutzt hat und deren Grundlagen in der Theoria interpolationis entwickelt sind; diese

*) Vierter Bericht, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften, Geschäftliche Mitteilungen, 1901. Abgedruckt in Bd. 57 der Math. Annalen.

Entwicklung hat Gauß außerordentlich weit getrieben, bis etwa zur 18-fachen mittleren Anomalie Jupiters und zur 20-fachen der Pallas."

„Die mittlere Länge stellt sich durch die Relation $L = nt + \varepsilon$ dar, wo ε die Epoche bezeichnet, und für die letztere ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (1 - \cos i)\left\{\cos i \frac{d\Omega}{n\,dt} + \frac{d\varpi}{n\,dt}\right\} + 2r \cos\varphi \cdot T,$$

wo

$$T = \frac{m' a r}{\varrho^2 \cos\varphi} - \frac{m' a r'}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r'^2}\right) \cos\beta' \cos(v - v'),$$

oder nach der Entwicklung der Störungsfunktion

$$\frac{d\varepsilon}{n\,dt} = \sum\sum P_{i,i'} \cos[(i'n' + in)t + Q_{i,i'}]$$

und integriert

$$\varepsilon = \sum\sum P_{i,i'} \frac{n}{i'n' + in} \sin[(i'n' + in)t + Q_{i,i'}].$$

Unter der Annahme von

$$n' = 299'', 264975$$

wird aber $18/7\,n' = 769'', 53851$, also äußerst nahe der mittleren Bewegung der Pallas, die etwa $n = 769'', 24$ ist. Das Glied in $i' = 18$, $i = -7$ würde daher einen so kleinen Divisor erhalten, daß seine Integration in dieser Form nicht angeht. Gauß entwickelt es darum in eine Potenzreihe; er findet es, numerisch, wie folgt

$$\text{Glied in } \frac{d\varepsilon}{n\,dt} = -0'', 04383 \cos[(18n' - 7n)t + 23^0 22' 34''].$$

Die Entwicklung in die Potenzreihe gibt:

$$-0'', 04383 \cos 23^0 22' 34'' + 0'', 04383\,(18n' - 7n)\,t \sin 23^0 22' 34''$$

und integriert, sowie t in Jahrhunderten ausgedrückt

$$\text{Glied in } \varepsilon = -5'', 48\,t + 1'', 18(18n' - 7n)t^2.$$

Als Störung der mittleren Bewegung aufgefaßt, wird dies:

$$\text{Glied in } n = -5'', 48 + 1'', 18(18n' - 7n)t.$$

Außer einem konstanten Gliede in der mittleren Bewegung ergibt sich also ein in t multipliziertes; das Wesentliche ist nun, daß dieses letztere dasselbe Vorzeichen hat wie $18n' - 7n$; ist also $18n' > 7n$, so ist das Glied in t positiv und n wird vergrößert, ist dagegen $18n' < 7n$, so wird n verkleinert, bis in beiden Fällen $18n' = 7n$ geworden ist. Das strenge Verhältnis 7/18 stellt sich also von selbst immer wieder her.

Daß Gauß das aufsehenerregende Resultat über die strenge Herstellung der Kommensurabilität der mittleren Bewegungen auf diese Weise gefunden hat, kann nicht mehr zweifelhaft sein, wenn auch im Nachlaß nichts Direktes darüber zu finden ist. Heutzutage wissen wir, daß bei Berücksichtigung der Störungen erster Ordnung allein dieser Beweis nicht stichhaltig ist und sich über ihn dasselbe sagen läßt, wie über den Laplaceschen Stabilitätsbeweis."

„Des weiteren wird der VII. Band noch einige Einzelheiten auch über praktische und stellare Astronomie bringen, über die hier nicht näher berichtet werden kann, da sie noch nicht vollkommen durchgearbeitet sind."

Über einen neuen Beweis der Kleinschen Relation zwischen den Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve.

Von

C. Juel in Kopenhagen.

In den Math. Annalen Bd. 10 hat Herr F. Klein die folgende bekannte Relation zwischen den reellen Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve aufgestellt:

$$2d'' + r' + k = 2t'' + w' + n. \tag{I}$$

Hier bedeuten n und k bezw. Ordnung und Klasse der Kurve, r' und w' bezw die Anzahl der reellen Spitzen und Inflexionspunkte, d'' und t'' bezw. die Anzahl der reellen isolierten Doppelpunkte und Doppeltangenten der Kurve. Für eine imaginäre Kurve, d. h. eine in einer reellen Ebene liegende Kurve, deren Gleichungskoeffizienten komplex sind, leitet man aus (I) folgende Gleichung ab:

$$\delta - \tau = n - k, \tag{II}$$

wo δ und τ bezw. die Anzahl der reellen Punkte und die der reellen Tangenten der Kurve sind.

Der Beweis des Urhebers der in der Theorie der algebraischen Kurven fundamentalen Relation (I) geschieht in der Weise, daß erst die Richtigkeit derselben für spezielle Kurven n^{ter} Ordnung dargetan wird, und danach die Änderungen, welche die eingehenden Zahlen durch kontinuierliche Variation der Kurve erleiden, untersucht werden.

Was die in dem folgenden Beweise nicht zu umgehenden algebraischen Hilfsmittel betrifft, so entnehme ich aus Herrn Brills Untersuchung die Berechtigung, in dem hier gebrauchten Umfange die allgemeine Kurve in der Nähe eines einzelnen Punktes durch eine naheliegende zu ersetzen, was hier ziemlich einfach ausfällt.*)

*) Siehe Brill, Über Singularitäten ebener algebraischer Kurven und eine neue Kurvenspezies, Math. Ann. Bd. 16, S. 348.

Das Prinzipielle meines Verfahrens suche ich in § 3 zu charakterisieren. Den Ausgangspunkt bilden einige Betrachtungen über die Kongruenz derjenigen reellen Geraden, welche in v. Staudts Sinne Träger der Punkte einer in einer imaginären Ebene liegenden Kurve n^{ter} Ordnung sind. Den Anfang einer Theorie dieser Kongruenzen habe ich schon 1884 in meiner Dissertation gegeben und daselbst auch einen Beweis von (II) skizziert. Von den genannten Kongruenzen spreche ich im § 1, wobei ich mich auf das für das folgende unumgänglich Notwendige beschränke.

§ 1.

Über die Trägerkongruenz der Punkte einer ebenen imaginären algebraischen Kurve.

Nach v. Staudt wird jeder imaginäre Punkt mittels einer auf einem reellen geradlinigen Träger liegenden mit einem bestimmten Sinne versehenen Involution von Punktepaaren dargestellt. Ebenso wird die imaginäre Ebene mittels einer mit bestimmtem Sinne versehenen Involution von reellen Ebenenpaaren eines Büschels dargestellt; die Achse des Büschels nennt man die *Achse* der Ebene.

Eine in der imaginären Ebene liegende Gerade kann entweder reell sein, oder einen reellen Punkt, oder endlich nur imaginäre Punkte haben. Im ersten Falle fällt die Gerade mit der Achse u der Ebene Π zusammen. Im zweiten Falle muß die Gerade in einer reellen Ebene liegen, und der reelle Punkt muß der (eindeutig bestimmte) Schnittpunkt dieser Ebene mit u sein. Die Gerade heißt dann imaginär erster Art. Im dritten Falle, wo die Gerade imaginär zweiter Art heißt, bilden die Träger der Punkte derselben eine lineare Kongruenz, welche die Achse u enthält.

Ebenso wie die Gerade wird jede in einer imaginären Ebene Π liegende Punktmenge eine Trägerkongruenz haben, welche aus den Trägern der betreffenden Punkte gebildet wird. Wenn sich in der Menge reelle Punkte vorfinden, werden diese auf u liegen, und als Träger wird jede durch einen solchen Punkt gehende reelle Gerade zu betrachten sein. Insbesondere hat auch jede ebene algebraische Kurve eine Trägerkongruenz, und der kontinuierlichen Menge der Kurvenpunkte entspricht eine kontinuierliche Menge von Trägern. Nur dann, wenn ein reeller Punkt P im Raume gegen einen der eventuell vorhandenen reellen Punkte der Kurve konvergiert, wird nicht jeder durch P gehende Träger gegen eine bestimmte Grenzlage konvergieren.

Weil in dem hier betrachteten Zusammenhange nur reelle Geraden als Träger in Betracht kommen, ist es angemessen, die Ordnung der Kongruenz als die größte endliche Anzahl der durch einen reellen Punkt

des Raumes gehenden Träger zu charakterisieren, während die Klasse die größte Zahl der in einer reellen Ebene liegenden Träger ist.

Die Klasse der Trägerkongruenz einer ebenen algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung ist gleich n.

Eine beliebige reelle Ebene schneidet nämlich die gegebene imaginäre Π in einer Geraden, und diese hat n (getrennte oder eventuell zusammenfallende) Punkte mit der Kurve gemein. Die Träger dieser n Punkte und nur diese liegen in der reellen Ebene.

Die Anzahl der durch einen reellen Punkt P des Raumes gehenden Träger ist für eine gegebene Kurve nicht konstant. Man kann hier zunächst nur sagen: *Die Anzahl der durch einen reellen Punkt P des Raumes gehenden Träger ist (wenn endlich) entweder gleich n^2 oder um eine gerade Zahl kleiner als n^2, wenn n die Ordnung der Kurve ist.*

Projiziert man nämlich die imaginäre Kurve Γ aus P auf eine reelle Ebene π, so erhält man wieder eine (im allgemeinen imaginäre) Kurve γ n^{ter} Ordnung, deren reelle Punkte mit P verbunden die gesuchten Träger geben. Die reellen Punkte einer imaginären Kurve $\varphi + i\psi = 0$ sind nun die reellen Schnittpunkte der reellen Kurven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ und es ist leicht, Kurven n^{ter} Ordnung anzugeben, welche sich in $n^2 - s$ und nicht in anderen reellen Punkten schneiden; hier ist $n^2 - s \geqq 0$ und s eine sonst beliebige gerade Zahl.

Wenn P seinen Platz im Raume kontinuierlich ändert, werden die reellen (im projektiven Sinne geschlossenen) Zweige von φ und ψ sich auch kontinuierlich ändern; die Anzahl der reellen Schnittpunkte wird sich deshalb nur dadurch ändern können, daß φ und ψ zusammenfallende Schnittpunkte erhalten. Dies kann erstens dadurch geschehen, daß P den Träger f eines singulären Punktes von Γ überschreitet, denn in $(f\pi)$ fallen dann mehrere reelle Punkte zusammen. Solche singulären Punkte finden sich aber nur in endlicher Zahl, und die zugehörigen Träger können deshalb immer vermieden werden, wenn man längs irgend eines Weges von einem Punkte P_0 des Raumes zu einem anderen Punkte P_1 übergehen will; vorausgesetzt ist nur, daß P_0 und P_1 nicht selbst auf Trägern singulärer Punkte liegen. Man braucht also nur den anderen Fall zu betrachten, daß φ und ψ einen reellen Berührungspunkt haben.

Nur wenn P auf der Achse u liegt, kann die Anzahl der durch P gehenden Träger immer angegeben werden, denn *durch einen der Kurve nicht angehörigen Punkt P der Achse gehen n Träger, welche alle in u fallen.* Durch P kann in diesem Falle kein anderer Träger l gehen, denn in der Ebene (lu) liegen nur die n auf u fallenden Kurvenpunkte.

Durch einen u naheliegenden Punkt P gehen n einander naheliegende Träger. Wenn sich P weiter von u entfernt, wird im allgemeinen die

Zahl der durch P gehenden Träger sich ändern; man braucht hierbei dem Obigen zufolge nur den Übergangsfall zu betrachten, daß die zwei oben genannten zugehörigen Kurven φ und ψ in einem und demselben reellen Punkte eine und dieselbe Gerade m zu berühren. Den Ort derjenigen Punkte P im Raume, wo dieser Fall eintritt, nennen wir die *Singularitätsfläche* Σ *der Trägerkongruenz.* Die Ebene (Pm) wird hier γ und demnach auch Γ berühren, und die Tangente zu Γ ist die Schnittgerade der Ebenen (Pm) und Π. Diese Gerade ist eine imaginäre Gerade erster Art; der reelle Punkt derselben liegt in u, und man wird sämtliche solche Geraden erhalten, indem man aus jedem reellen Punkt Q von u die durch Q gehenden Tangenten an Γ bestimmt. Die reellen Ebenen aller dieser Tangenten bilden eine von einem kontinuierlich variierenden reellen Parameter abhängige Menge und hüllen also eine Developpable ein:

Die Singularitätsfläche Σ *der Trägerkongruenz einer ebenen algebraischen Kurve ist eine reelle Developpable, deren Berührungsebenen die die Kurven berührenden Geraden erster Art enthalten.*

Zugleich hat man:

Durch jeden reellen Punkt der Achse gehen k reelle Berührungsebenen der Singularitätsfläche, wenn k die Klasse der Kurve ist.

Die obigen Entwicklungen zeigen, daß die Projektion γ einer in Π liegenden Kurve Γ aus einem beweglichen reellen Punkte P des Raumes auf eine reelle Ebene π eine Änderung $+2$ oder -2 in der Zahl δ ihrer reellen Punkte erfährt, wenn P die Singularitätsfläche in einem nicht singulären Punkte überschreitet.

Wir wollen nun die Anzahl τ der reellen Tangenten der genannten Projektionen γ betrachten. Diese werden notwendigerweise aus dem zugehörigen Projektionszentrum P mittels Ebenen projiziert, die Berührungsebenen von Σ sind; hierbei setzen wir voraus, daß die Achse keine Tangente von Σ ist. Eine Änderung in τ könnte also nur eintreten, wenn der Punkt P entweder eine singuläre Berührungsebene σ von Σ, oder wenn er Σ selbst überschreitet.

Die erste Möglichkeit kann man aber außer Acht lassen. Freilich ist nicht ausgeschlossen, daß singuläre Berührungsebenen an Σ auftreten können, ebensowenig kann man, wenn sich solche Ebenen vorfinden, von einem Punkte P_0 zu jedem anderen Punkte P gelangen ohne die Überschreitung derselben zu gestatten. Aber die Singularitätsfläche hat die charakteristische Eigenschaft, daß eine solche Überschreitung überhaupt keinen Einfluß auf τ hat. Nehmen wir nämlich an, daß von dem einen, P_0, von zwei Punkten P_0 und P_1, die nahe aneinander aber auf verschiedenen Seiten von σ liegen, zwei reelle Berührungsebenen an Σ gehen, die nach σ konvergieren, wenn P_0 nach σ konvergiert, von dem anderen P_1

aber keine solchen. Dasselbe müßte dann der Fall sein, wie auch P_0 und P_1 nahe aneinander gewählt werden, wenn nur auf verschiedenen Seiten von σ (und nicht in Σ). Dies gilt besonders, wenn P_0 und P_1 auf u gewählt werden. Wir wissen aber, daß durch jeden Punkt von u dieselbe Zahl k von reellen Berührungsebenen an Σ geht. Wenn auch mehrere von diesen für spezielle Punkte von u zusammenfallen können, ist es doch ausgeschlossen, daß reelle Berührungsebenen durch Überschreitung irgend eines Punktes von u verloren gehen können. Dies erklärt sich dadurch, daß eine singuläre Berührungsebene von Σ zweimal als solche auftritt. Eine Änderung in τ entsteht also nur, wenn Σ überschritten wird. Wir wollen nun beweisen, daß *durch Überschreitung von Σ gleichzeitig zwei durch den beweglichen Punkt P gehende Träger und zwei durch P gehende Berührungsebenen an Σ gewonnen oder verloren werden.*

Wir wollen hierbei der Einfachheit wegen voraussetzen, daß die Achse u der imaginären Ebene Π unendlich fern liegt. In Π liegt eine Kurve Γ; dieselbe wird aus einem auf einem nicht singulären Träger p_0 von Σ liegenden Punkte P_0 auf eine reelle Ebene π projiziert. Die (imaginäre) Projektion γ hat in $O = p_0\pi$ eine reelle Tangente, nämlich die Schnittlinie von π mit der Berührungsebene zu Σ längs p_0; diese Tangente wählen wir zur Y-Achse eines Parallelkoordinatensystems in π. Es soll ferner Γ noch aus einem P_0 naheliegenden aber nicht in Σ liegenden Punkte P_1 auf π projiziert werden. Wir nehmen hier ferner der Einfachheit wegen an, daß P_0P_1 die Achse u in einem unendlich fernen Punkt U schneidet; wir wählen dann OU zur X-Achse. Die Projektion eines beliebigen Punktes M von Π auf π aus P_1 wird dann aus der Projektion desselben Punktes aus P_0 durch eine konstante imaginäre Parallelverschiebung längs der X-Axe erhalten. Man kann ferner π so reell parallel mit sich selbst verschieben, daß diese imaginäre Verschiebung rein imaginär ausfällt, wie auch P_1 als ein reeller Punkt auf P_0U gewählt wird. Daß dies möglich ist, folgt daraus, daß sowohl die Punkte $(a, 0)$, wie auch $(ai, 0)$ — wo a reell ist — eine einfache Kette im Sinne v. Staudts bilden.

Es sei nun $f(x, y) = 0$ die Gleichung von γ. Die Gleichung der Projektion γ_1 von Γ aus P_1 wird dann

$$f(x + \varepsilon i, y) = 0 \quad (\varepsilon \text{ reell}).$$

Es werde γ dargestellt durch:

$$x = (\alpha + i\beta)t + \cdots; \; y = t^2.$$

Wir nehmen hier nur die ersten Glieder und ersetzen also γ in der Nähe von O durch die Kurve:

(1
$$y^2 = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} x.$$

Die Kurve γ_1 wird man dann in der Nähe von O durch

$$y^2 = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2}(x + \varepsilon i) \tag{2}$$

ersetzen. Diese letztere hat nur dann reelle Punkte in der Nähe von O, wenn ε und β dasselbe Vorzeichen haben, nämlich die Punkte

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\varepsilon, \pm\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}\right).$$

Die Gleichung einer Geraden können wir $x = vy + u$ schreiben, und darin u und v als Linienkoordinaten auffassen. In diesem Systeme wird die Gleichung von (1):

$$v^2 = -4(\alpha + i\beta)u, \tag{3}$$

und die Gleichung von (2):

$$v^2 = -4(\alpha + i\beta)(u + \varepsilon i).$$

Die letztere hat wieder nur dann reelle Tangenten in der Nähe von O, wenn ε und β dasselbe Vorzeichen haben, nämlich die Geraden:

$$\left(-\frac{\alpha}{\beta}\varepsilon, \pm 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}\right).$$

Wir wissen hier im voraus, daß entweder zwei oder keine reellen nach O konvergierenden Punkte hervortreten — und das analoge von den reellen Tangenten — wenn ε nach Null konvergiert. Weil es ferner hier nur darauf ankommt, ob zwei reelle Bögen „ineinander“ oder „auseinander“ verschoben werden, können die Verhältnisse an naheliegenden Bögen abgeschätzt werden.

Die angegebenen Einschränkungen, nämlich daß Σ geradlinig längs P_0U und in einem nicht singulären Erzeuger überschritten wird, spielen offenbar keine Rolle, wenn man wie hier nur auf *irgend* einem Wege von einem Punkte im Raume zu irgend einem anderen (reellen) nicht in Σ liegenden Punkt gelangen will. Daß wir u unendlich fern gewählt haben, hatte nur den Zweck, ein gewöhnliches Parallelkoordinatensystem gebrauchen zu können.

§ 2.

Beweis der Kleinschen Relationen.

Mittels der entwickelten Hilfssätze gelingt nun der Beweis der Kleinschen Relationen sehr leicht. Wir betrachten zuerst (II). Es liege also in einer reellen Ebene π die imaginäre Kurve γ; dieselbe werde aus einem reellen Punkte P_0 des Raumes auf eine imaginäre Ebene Π in Γ projiziert. Hierbei kann man immer vermeiden, daß Γ die Achse u von Π

berührt. Die Anzahl δ der durch einen beliebigen reellen Punkt P des Raumes gehenden Träger, und die Anzahl τ der durch P gehenden Berührungsebenen an Σ haben eine konstante Differenz. Fällt aber P in u, wird $\delta = n$, $\tau = k$. Man hat also:

$$\delta - \tau = n - k, \tag{II}$$

wo δ und τ bezw. die Anzahl der reellen Punkte und der reellen Tangenten von γ geben.

Wir denken uns nun eine in der reellen Ebene π liegende reelle Kurve γ, welche aus P_0 auf Π in Γ projiziert wird. Diese Kurve Γ werde wieder aus einem P_0 naheliegenden reellen Punkte P_1 des Raumes auf π in eine neue Kurve γ_1 projiziert. Es kommt nun darauf an, wie viele reelle Punkte und reelle Tangenten die Kurve γ_1 bekommt. Die Ebene π kann man nach Belieben wählen. Wir wählen dieselbe so, daß die Achse u unendlich fern fällt, und so, daß u keine Tangente von γ ist. Den Punkt P_1 wähle man so, daß P_0P_1 die Achse u in einem unendlich fernen Punkte U schneidet. Der Übergang von γ zu γ_1 geschieht dann mittels einer imaginären Parallelverschiebung, wir können sagen längs einer durch U gehenden X-Achse. Nachdem Π und U festgelegt sind, kann man noch P_0 so wählen, daß diese Parallelverschiebung im analytisch-geometrischen Sinne rein imaginär ausfällt (was der Kürze wegen hier geschehen mag).

Wir betrachten nun zuerst einen nicht singulären Punkt O von γ, dessen Tangente mit der X-Achse nicht zusammenfällt. Wählen wir die genannte Tangente als Y-Achse, dann kann man die Gleichung der Kurve

$$y = ax + bx^2 \cdots$$

schreiben, wo a reell ist. Hier hat offenbar

$$y = a(x + \varepsilon i) + b(x + \varepsilon i)^2 + \cdots$$

keinen O naheliegenden reellen Punkt. Wenn γ die X-Achse berührt, ersetze man die gegebene Kurve in der Nähe von O durch

$$y = ax^2.$$

Hier hat

$$y = a(x + \varepsilon i)^2$$

den reellen Punkt $(0, -a\varepsilon^2)$, und γ_1 hat in der Nähe von O einen und nur einen reellen Punkt.

Hat die Kurve γ einen Doppelpunkt in O, ersetzen wir sie in der Nähe von O durch

$$y^2 + ax^2 = 0,$$

und γ_1 mit der Gleichung

$$y^2 + a(x + \varepsilon i)^2 = 0$$

hat, wenn a positiv (und nur dann) die zwei O naheliegenden reellen Punkte $(0, \pm 2\sqrt{a})$.

Hat endlich γ eine Spitze (um nur gewöhnliche Singularitäten zu berücksichtigen), so kann man ohne Schaden voraussetzen, daß die Tangente in diesem Punkte mit der X-Achse nicht zusammenfällt. Man ersetze dann γ durch:

$$x^3 + ay^3 = 0 \quad \text{(a reell)},$$

und γ_1 durch:

$$(x + \varepsilon i)^3 + ay^3 = 0.$$

Die letztere Kurve hat in der Nähe von O den einen reellen Punkt $\left(0, \sqrt[3]{\frac{\varepsilon^3}{\alpha}}\right)$.

Daß die Anzahl derjenigen reellen *und* imaginären Schnittpunkte von $f(x + \varepsilon i, y) = 0$ und $\bar{f}(x - \varepsilon i, y) = 0$, welche nach O konvergieren, wenn ε nach Null konvergiert, in den betrachteten Fällen 0, 1, 4, 3 ist, kann man schon aus der Theorie der Enveloppen folgern. Daß dann die Anzahl der reellen von diesen Punkten 0, 1, 2, 1 sein wird, schließen wir daraus, daß dies nur von dem „Ineinander-" oder „Auseinander-"Verschieben reeller Bögen (der früher genannten Kurven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$) abhängig ist, und dies kann man durch naheliegende Bögen abschätzen.

Hat die Kurve höhere Singularitäten, so muß man in jedem einzelnen Fall die O naheliegenden reellen Punkte von $f(x + \varepsilon i, y) = 0$ bestimmen (wo $f(0, 0) = 0$).

Es sollen nun auch die reellen Tangenten angegeben werden, welche an γ_1 auftreten. Es folgt dies schon aus dem obigen, weil eine imaginäre Zentralkollineation, deren Zentrum U in der Kollineationsachse u liegt, durch eine ebene reelle reziproke Transformation in eine ebensolche Zentralkollineation übergeht. Man sieht so — oder auch direkt analytisch —, daß γ_1 teils die reellen Tangenten berührt, welche aus U an γ gezogen werden können, teils die reellen Wendetangenten von γ, teils Geradenpaare, welche nach den *reellen isolierten* Doppeltangenten von γ konvergieren, wenn γ_1 nach γ konvergiert.

Gehen also im Raume durch die Gerade P_0P_1 x reelle Berührungsebenen an die reelle Kegelfläche, welche γ aus P_0 projiziert, so hat man infolge (II) und mit den früher angegebenen Bezeichnungen:

$$(2d'' + r' + x) - (2t'' + w' + x) = n - k,$$

oder

$$\text{(I)} \qquad 2d'' + r' + k = 2t'' + w' + n.$$

Wenn γ reell ist, zerfällt die zu Γ gehörige Singularitätsfläche in die reelle Kegelfläche, welche γ aus P_0 projiziert, und noch eine Restdeveloppable. Man sieht aus dem Obigen, daß die Wendeberührungsebenen der Kegelfläche auch Wendeberührungsebenen der Restfläche sind.

In derselben Weise können Punkte mit höheren Singularitäten in Betracht gezogen werden, wodurch die neulich von Herrn Schuh angegebene allgemeinere Relation sehr einfach herauskommt.*)

Sei nämlich t Ordnung und s Klasse des singulären Punktes O, der als Anfangspunkt angenommen wird. Die Kurve wird dann in der Nähe von O durch

$$y = ax^{\frac{t+1}{t}} \cdots$$

dargestellt. Man hat nun diejenigen *reellen* Punkte von

(a) $$(y + \varepsilon i)^t = bx^{t+s}$$

zu bestimmen, welche nach O konvergieren, wenn ε nach Null konvergiert. Denken wir uns b komplex: $b = r(\cos v + i \sin v)$, so erhalten wir aus

$$(y + \varepsilon i)^t (\cos v - i \sin v) = (y - \varepsilon i)^t (\cos v + i \sin v)$$

sogleich die reellen Werte:

$$y = \varepsilon \cot \frac{v + 2p\pi}{t}, \quad p = 1, 2, \cdots, t - 1.$$

Die zugehörigen Werte von x findet man aus

$$x^{s+t} = \frac{\varepsilon^t}{r} \frac{1}{\sin^t \frac{v + 2p\pi}{t}}.$$

Wenn nun $s + t$ ungerade ist, entspricht jedem Werte von y ein reeller Wert von x. Wenn aber $s + t$ gerade ist, erhält man $2 \cdot \frac{t-1}{2}$ oder $2\frac{t-2}{2} + 1$ reelle zugehörige Werte von x, jenachdem t ungerade oder gerade ist, d. h. in jedem Falle $t - 1$ reelle Punkte in der Nähe von O.

Geht man zu den früher gebrauchten Linienkoordinaten u und v über, so bleibt die Gleichungsform ungeändert, nur werden s und t vertauscht. Es treten also zu der verschobenen Kurve $s - 1$ getrennte reelle O naheliegende Tangenten auf. Man hat also nach dem Früheren

$$\Sigma s - \Sigma t = k - n.$$

Dies ist die von Herrn Schuh auf ganz anderem Wege gefundene Relation.

§ 3.

Bemerkungen.

Ich möchte den Hauptpunkt des obigen Beweises darin finden, daß die Kurve als festliegend betrachtet wird, während so zu sagen unter

*) F. Schuh, An equational reality for plane curves with higher singularities, Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, May 1904.

ihr weg diejenige Menge K^{II} von Punkten projektivisch verschoben wird, die ich eine Kette mit zwei Dimensionen nenne.*) Die Punkte einer K^{II} bildet man aus vier beliebigen festen reellen oder imaginären Punkten der Ebene mittels der Möbiusschen Netzkonstruktion; dieselbe wird auch aus der Menge der reellen Punkte einer reellen Ebene durch eine imaginäre Kollineation erhalten, die in der obigen (etwas speziell gehaltenen) Darstellung eine imaginäre Translation war. Die Ketten in Π sind hier diejenigen, deren zugehörige Träger durch einen reellen Punkt P gehen; solche sind im projektiven Sinne nicht als singuläre zu betrachten.

Nachdem (II) bewiesen ist, können die von Herrn Klein und Herrn Zeuthen benutzten Grenzübergänge direkt aus (II) beurteilt werden. Freilich sind Beispiele notwendig, um die Existenz der oberen Grenzen z. B. für w' festzustellen.

Ich möchte noch hinzufügen, daß die Formel (I) selbstverständlich nicht als die einzig mögliche Relation zwischen den reellen Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve anzunehmen ist. Schon bei den Kurven vierter Ordnung existiert noch eine andere, welche freilich von der Eleganz von (I) weit entfernt ist. Es folgt dies schon aus den Untersuchungen des Herrn Zeuthen.**) Die folgende Formulierung entnehme ich meiner Untersuchung über graphische Kurven vierter Ordnung.***) Es bedeute t' die Anzahl derjenigen Doppeltangenten eines einzelnen Zweiges einer Kurve vierter Ordnung, welche in reellen Punkten berühren, und d' die Anzahl der reellen Doppelpunkte desselben Zweiges. Man hat dann entweder

$$t' = 0$$

oder

$$2t' = 2d' + w'.$$

Diese zweiteilige Formel ist abgeleitet für die etwas verwickelteren Verhältnisse einer nicht notwendigerweise algebraischen Kurve (wo sich keine oberen Grenzen für t', d', w' vorfinden), sie gilt aber auch für jeden Zweig einer algebraischen Kurve; sollte nämlich der Zweig graphisch zweiter Ordnung sein, so wäre

$$t' = d' = w' = 0.$$

Durch Addition erhält man für alle Zweige zusammen entweder:

---

*) Siehe Juel, Über einige Grundgebilde der projektiven Geometrie, Acta Math. Bd. XIV, und C. Segre, Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti d. R. Acc. d. Scienze di Torino 1890.

**) Siehe Zeuthen, Die Formen algebr. Kurven vierter Ordnung, Math. Annalen Bd. 7.

***) Siehe Juel, i Laeren om graf. Kurver, Dansk. Vidensk. Selsk-Skrifter 1899.

$$2t' = 2d' + w',$$

oder

$$t' = 0.$$

Hierin bedeutet t' die Zahl derjenigen Doppeltangenten der ersten Art, welche in reellen Punkten berühren, d' die dualistisch bestimmte Zahl; Doppeltangenten erster Art sind solche reelle Doppeltangenten, welche entweder isoliert sind oder denselben Zweig zweimal berühren. Man erhält nun die Anzahl t_1 sämtlicher Doppeltangenten erster Art, indem $d' + d'' = d_1$ gesetzt wird,

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \text{entweder aus } 2d'' + r' + k = 2t_1 + w' + n, & \text{wenn } t' = 0, \\ \text{oder aus } \quad 2d_1 + r' + k = 2t_1 + n, & \text{wenn } t' + 0. \end{cases}$$

Dies ist eine von (II) unabhängige Relation zwischen den reellen Singularitäten einer Kurve vierter Ordnung, welche wie gesagt schon in der Zeuthenschen Untersuchung enthalten ist. Ihre Art scheint jedenfalls auf größere Komplikationen bei analogen Relationen für Kurven höherer Art hinzudeuten.

Kopenhagen, November 1904.

Ein Problem der Elimination.

Von

E. Netto in Gießen.

Die Theorie der Elimination führt auf ein Problem, welches meines Wissens noch nicht behandelt worden ist: *„Wie müssen die beiden rationalen ganzen Funktionen*

$$f(x, y, z, t, \cdots) \quad \textit{und} \quad g(x, y, z, t, \cdots)$$

beschaffen sein, damit bei der Elimination einer der Veränderlichen $x, y, z, t, \cdots$ aus $f = 0$, $g = 0$ gleichzeitig alle übrigen Veränderlichen wegfallen?“

Bildet man bei beliebig gegebenen f und g die Eliminante z. B. nach x, so kann man sie in die Form

$$R_x = f(x, y, z, \cdots) g_1(x, y, z, \cdots) - f_1(x, y, z, \cdots) g(x, y, z, \cdots)$$

bringen, in der f_1 und g_1 zwei ganze Funktionen bedeuten, deren Grade in x geringer sind als die von f bezw. von g. Nach unserer Forderung muß R_x eine Konstante werden, d. h. es muß sein

$$(1) \quad f(x, y, z, \cdots) g_1(x, y, z, \cdots) - f_1(x, y, z, \cdots) g(x, y, z, \cdots) = \text{Cst.}$$

Hier sind nun die beiden Fälle zu unterscheiden, daß die Konstante gleich Null oder von Null verschieden ist.

Im ersten Falle ist f nicht ganz in f_1 enthalten, da die Grade der beiden Funktionen das nicht gestatten; folglich haben f und g einen gemeinsamen Teiler, und wir können setzen

$$(2) \qquad f = f_0 \cdot q, \quad g = g_0 \cdot q.$$

Ist umgekehrt die Forderung (2) befriedigt, dann genügen die Funktionen der gestellten Aufgabe; denn es ist

$$R_x(f, g) = R_x(f_0, g_0) R_x(f_0, q) R_x(g_0, q) R_x(q, q) = 0$$

wegen des letzten Faktors im Produkte der Resultanten.

Ist zweitens die Konstante von Null verschieden, dann folgt, wenn eine von Null verschiedene Konstante durch C_0 angedeutet wird,

$$(3) \qquad g(x, y, z, \cdots) = \frac{f(x, y, z, \cdots) g_1(x, y, z, \cdots) + C_0}{f_1(x, y, z, \cdots)}.$$

Wenn umgekehrt (3) erfüllt ist, dann können wegen (1) nicht gleichzeitig f und g verschwinden, und daher muß $R_x(f, g)$ von $x, y, z, \cdots$ frei sein.

Es mag noch bemerkt werden, daß wir f und g als irreduktibel annehmen dürfen. Denn ist z. B. $f = \varphi \cdot \psi$, so folgt

$$R_x(f, g) = R_x(\varphi, g) \cdot R_x(\psi, g) = C_0,$$

und da die R_x ganze Funktionen sind,

$$R_x(\varphi, g) = C_0, \quad R_x(\psi, g) = C_0. \tag{4}$$

Ebenso kann man aus (4) auf $R_x(\varphi \cdot \psi, g) = C_0$ schließen.

Der Fall, daß in (3) der Nenner eine Konstante wird, ist ohne jede Bedeutung; dagegen ist die Untersuchung von Interesse, wann g_1 so bestimmt werden kann, daß bei passender Wahl von C_0

$$f(x, y, z, \cdots)\, g_1(x, y, z, \cdots) + C_0 \tag{5}$$

in Faktoren zerfällt, die nicht von derselben Form $f \cdot g_2 + C_0$ sind.

Beschränken wir uns, was jetzt geschehen soll, auf zwei Veränderliche x und y, dann können wir die Bedeutung des Problems geometrisch in einfacher Art darlegen: *„Es sollen alle Kurven $g(x, y) = 0$ gesucht werden, die mit $f(x, y) = 0$ alle reellen und imaginären Schnittpunkte im Unendlichen haben."* Solche Kurven $f = 0$, $g = 0$ können wir als *perfekte Asymptotenkurven* bezeichnen. Zu ihnen gehören die Kurven

$$g(x, y) = f(x, y)\, g_1(x, y) + C_0$$

für jedes g_1 und jedes $C_0 (\neq 0)$. Außer diesen können möglicherweise noch andere vorkommen. Diese wollen wir als *singuläre perfekte Asymptotenkurven* bezeichnen und gehen nun dazu über, einige *besondere Formen für $f(x, y)$* zu besprechen.

I) Es sei zunächst

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = \varphi(x),$$

wo die $a_0, a_1, \cdots, a_n$ Konstanten bedeuten sollen. Dann brauchen wir die Teiler von

$$\varphi(x) \cdot g_1(x, y) + C_0.$$

Wir setzen diesen Ausdruck $= q(x, y) \cdot q_1(x, y)$. Dividieren wir q und q_1 durch $\varphi(x)$ und ordnen die Reste nach y, so entsteht

$$q(x, y) = Q(x, y) \cdot \varphi(x) + \alpha_0(x) \cdot y^\mu + \alpha_1(x) y^{\mu-1} + \cdots,$$
$$q_1(x, y) = Q_1(x, y) \cdot \varphi(x) + \beta_0(x) \cdot y^\nu + \beta_1(x) y^{\nu-1} + \cdots,$$

wo kein $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \cdots; \beta_0(x), \beta_1(x), \cdots$ von höherem als dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Das Produkt beider Ausdrücke muß modulo $\varphi(x)$ einer Konstante C_0 kongruent werden; also muß sein

$$\alpha_0(x)\beta_0(x) y^{\mu+\nu} + (\alpha_0(x)\beta_1(x) + \alpha_1(x)\beta_0(x)) y^{\mu+\nu-1} + \cdots \equiv C_0 \pmod{\varphi}.$$

Das Glied $\alpha_0(x)\beta_0(x)\cdot y^{\mu+\nu}$ kann durch keines der folgenden getilgt werden; der einfachste Fall ist der, daß es auch nicht $\equiv 0$ wird; dann muß $\mu = \nu = 0$; $\alpha_0(x)\beta_0(x) \equiv C_0 \pmod{\varphi}$ sein. Daher hat man

$$q(x, y) = Q(x, y)\varphi(x) + \alpha_0(x), \quad q_1(x, y) = Q_1(x, y)\varphi(x) + \beta_0(x);$$

denn die letzte Kongruenz ist für jedes C_0 lösbar.

II) Es sei zweitens

$$f(x, y) = xy - 1.$$

Wir setzen ähnlich wie vorher

$$(xy-1)g_1(x, y) + C_0 = q(x, y)\cdot q_1(x, y).$$

Dann können wir q und q_1, wie jede ganze Funktion, in die Form

$$q\,(x, y) = (xy-1)\,Q\,(x, y) + h\,(x) + k\,(y),$$
$$q_1(x, y) = (xy-1)\,Q_1(x, y) + h_1(x) + k_1(y)$$

bringen; denn jedes Glied, welches xy enthält, kann durch

$$xy = (xy-1) + 1$$

reduziert werden. Hier muß wieder sein

$$(h(x) + k(y))\,(h_1(x) + k_1(y)) \equiv C_0 \pmod{xy-1}.$$

Nun liefert $h(x)\cdot h_1(x)$ Glieder in x allein, die sich nicht durch den Modul reduzieren lassen; folglich muß h oder h_1 gleich Null sein; ebenso folgt, daß eine der beiden Funktionen k oder k_1 gleich Null werde; und endlich sieht man, daß

$$q(x, y) \equiv h(x); \quad q_1(x, y) \equiv k_1(y) \pmod{xy-1}$$

genommen werden kann.

Zur weiteren Reduktion von $h(x)\cdot k_1(y)$, welches Glieder $x^\alpha y^\beta$ enthält, bemerken wir, daß für $\beta > \alpha$

$$x^\alpha y^\beta = (xy-1)y^{\beta-\alpha}(x^{\alpha-1}y^{\alpha-1} + \cdots + xy + 1) + y^{\beta-\alpha}$$

wird. Nehmen wir nun für x^α das Glied niedrigster Potenz aus $h(x)$ und für y^β das Glied höchster Potenz aus $k_1(y)$, so hat $(\beta-\alpha)$ den höchst möglichen Wert, der nicht weiter erreicht wird, so daß daher auch nicht $y^{\beta-\alpha}$ weggehoben werden kann, wenn $\beta-\alpha > 0$ ist. Wegen $q\cdot q_1 \equiv C_0$ müßte das aber eintreten; also ist $\beta = \alpha$. Ebenso folgt, daß der höchste Exponent von x in h gleich dem niedrigsten von y in k_1 ist. Demnach kann nur sein

$$q \equiv d_0 x^\mu, \quad q_1 \equiv d_1 y^\mu,$$
$$qq_1 \equiv d_0 d_1 (x^\mu y^\mu - 1) + d_0 d_1 \equiv d_0 d_1,$$
$$q = (xy-1)\,Q\,(x, y) + d_0 x^\mu,$$
$$q_1 = (xy-1)\,Q_1(x, y) + d_1 y^\mu.$$

Hier zeigen sich also singuläre perfekte Asymptotenkurven für $xy-1=0$. Die vom niedrigsten Grade entstehen für $Q=Q_1=0$; $\mu=1$; es sind

$$x=0 \quad \text{und} \quad y=0.$$

III) Wir behandeln dieselbe Aufgabe in anderer Form, indem wir setzen

$$f(x,y)=a^2x^2-b^2y^2-1.$$

Hier können wir in $q(x,y)$ und in $q_1(x,y)$ jede Potenz $y^2, y^3, y^4, \cdots$ mod. $f(x,y)$ tilgen und schreiben

$$\begin{aligned} &q(x,y)\equiv g(x)+yh(x); \quad q_1(x,y)\equiv g_1(x)+yh_1(x),\\ &b^2qq_1\equiv b^2g\cdot g_1+(gh_1+g_1h)b^2y+(a^2x^2-1)h\cdot h_1. \end{aligned} \pmod{f(x,y)}.$$

Damit der Ausdruck eine Konstante wird, muß

$$\begin{aligned} gh_1+g_1h&\equiv 0,\\ b^2gg_1+(a^2x^2-1)hh_1&\equiv C_0 \end{aligned}$$

und deshalb

$$b^2gg_1h+(a^2x^2-1)h^2h_1\equiv -b^2g^2h_1+(a^2x^2-1)h^2h_1\equiv C_0h$$

sein. Es kann h mit g keinen gemeinsamen Teiler haben, weil den gleichen dann auch C_0 haben würde. Also folgt aus der letzten Kongruenz, daß h_1 durch h und ebenso, daß h durch h_1 teilbar ist. Wir können daher

$$\begin{aligned} h_1&\equiv -\alpha h,\\ g_1&\equiv +\alpha g \end{aligned}$$

setzen. Das ergibt

$$\begin{aligned} &q(x,y)\equiv g(x)+yh(x); \quad q_1(x,y)\equiv \alpha(g(x)-yh(x)),\\ &\frac{b^2}{\alpha}qq_1\equiv b^2g^2(x)-(a^2x^2-1)h^2(x). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck muß modulo $f(x,y)$ der Konstante C_0 kongruent sein; nun enthält er aber das y nicht, das ja in $f(x,y)$ vorkommt. Daher geht die Kongruenz in die Gleichung

$$b^2g^2(x)-(a^2x^2-1)\cdot h^2(x)=C_0$$

über. Durch Differentiation ergibt sich

$$b^2g\cdot g'=a^2x\cdot h^2+(a^2x^2-1)h\cdot h';$$

und da g mit h keinen Teiler gemein hat, so ist g' durch h teilbar. Ein Vergleich der Grade von g und h ergibt weiter $h=c\cdot g'$. Wir bilden daraus mit Hilfe der vorigen Gleichung

$$b^2g=a^2c^2xg'+c^2(a^2x^2-1)g'' \tag{6}$$

und durch ν-fache Differentiation ($\nu=1,2,\cdots$)

$$(b^2-\nu^2a^2c^2)g^{(\nu)}=(2\nu+1)a^2c^2xg^{(\nu+1)}+c^2(a^2x^2-1)g^{(\nu+2)}. \tag{7}$$

Ist g vom Grade n, so zeigt (7) bei $\nu = n$

$$b^2 = n^2 a^2 c^2; \quad c = \pm \frac{b}{na};$$

weiter folgt aus (7) leicht, daß g die Form

$$g = x^n - \alpha_1 x^{n-2} + \alpha_2 x^{n-4} - \alpha_3 x^{n-6} + \cdots$$

hat. Substituieren wir diese in (6), so folgt die Rekursionsformel

$$\alpha_\varrho = \frac{(n-2\varrho-2)(n-2\varrho-1)}{4\varrho(n-\varrho)a^2}\,\alpha_{\varrho-1},$$

durch die g und h und daraus q und q_1 bestimmt werden. So ist

$(n=2)$: $q = x^2 - \frac{1}{2a^2} + \frac{b}{a}xy$; $\qquad q_1 = x^2 - \frac{1}{2a^2} - \frac{b}{a}xy$;

$(n=3)$: $q = x^3 - \frac{3}{4a^2}x + \frac{b}{a}x^2y - \frac{b}{4a^2}y$; $q_1 = x^3 - \frac{3}{4a^2}x - \frac{b}{a}x^2y - \frac{b}{4a^2}y$.

IV) Wir gehen zur Untersuchung des allgemeineren Falles

$$f(x, y) = y^2 - \varphi(x)$$

über. Auch hier können wir

$$q(x, y) \equiv g(x) + yh(x), \quad q_1(x, y) \equiv g_1(x) + yh_1(x) \pmod{f(x, y)}$$

setzen und kommen genau wie in III) auf die Gleichungen

$$\frac{1}{\alpha}\,q_1(x, y) = g(x) - yh(x)$$

und

$$g^2(x) - \varphi(x)h^2(x) = C_0. \tag{8}$$

Die letzte Gleichung ist den weiteren Untersuchungen zugrunde zu leg
Dabei ist klar, daß der Grad μ von $\varphi(x)$ gerade sein muß, damit (8) üb
haupt möglich wird.

Der Fall $\mu = 2$ ist in III) schon erledigt. Wir gehen zu

$$\varphi(x) = x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 \tag{9}$$

über; der Grad von $h(x)$ sei mit n bezeichnet; der von $g(x)$ wird $(n+$

Bei $n = 0$ und

$$g(x) = x^2 + \beta_1 x + \beta_2, \quad h(x) = 1$$

sind zum Bestehen von (8) drei Bedingungen zu erfüllen

$$c_1 = 2\beta_1, \quad c_3 = 2\beta_2 + \beta_1^2, \quad c_3 = 2\beta_1\beta_2;$$

hierfür stehen die zwei Konstanten β_1 und β_2 zur Verfügung; man fin
als Bedingung

$$8c_3 = c_1(4c_2 - c_1^2). \tag{10}$$

Ist (10) erfüllt, dann gibt es für

$$y^2 - (x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4) = 0$$

singuläre perfekte Asymptotenkurven, nämlich

$$y \pm \left(x^2 + \tfrac{1}{2} c_1 x + \tfrac{1}{8}(4c_2 - c_1^2)\right) = 0.$$

Wir behalten ferner $\mu = 4$ und (9) bei, nehmen aber den Grad von $h(x)$ gleich 1 und also den von $g(x)$ gleich 3 an. Es sei

$$g(x) = x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3, \quad h(x) = x + \alpha,$$

dann fordert das Bestehen von (8) die Relationen

$$c_1 = 2\beta_1 - 2\alpha,$$
$$c_2 = (2\beta_2 + \beta_1^2) - 2 \cdot 2\beta_1 \alpha + 3\alpha^2,$$
$$c_3 = (2\beta_3 - 2\beta_1\beta_2) - 2(2\beta_2 + \beta_1^2)\alpha + 3 \cdot 2\beta_1 \alpha^2 - 4\alpha^3,$$
$$c_4 = (2\beta_1\beta_3 + \beta_2^2) - 2(2\beta_3 + 2\beta_1\beta_2)\alpha + 3(2\beta_2 + \beta_1^2)\alpha^2 - 4 \cdot 2\beta_1 \alpha^3 + 5\alpha^4,$$

wenn man die Koeffizienten von x^5, x^4, x^3, x^2 vergleicht. Die Vergleichung der Koeffizienten von x liefert

$$(\beta_3 - \beta_2 \alpha + \beta_1 \alpha^2 - \alpha^3)(\beta_2 - 2\beta_1 \alpha + 3\alpha^2) = 0. \tag{11}$$

Wir setzen zuerst den ersten Faktor links in (11) gleich Null. Dann ergibt die Berechnung der Konstanten auf der linken Seite von (8)

$$C_0 = \beta_3^2 - c_4 \alpha^2 = 0.$$

Man bekommt also keine von Null verschiedene Konstante C_0 und daher auch keine singuläre Lösung.

Jetzt setzen wir den zweiten Faktor links in (11) gleich Null, also

$$\beta_2 = 2\beta_1 \alpha - 3\alpha^2.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1 &= 2\beta_1 - 2\alpha, \\ c_2 &= \beta_1^2 - 3\alpha^2, \\ c_3 &= 2\beta_3 + 2\alpha(\beta_1 - 2\alpha)^2, \\ c_4 &= 2\beta_3(\beta_1 - 2\alpha) - \alpha^2(\beta_1 - 2\alpha)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Elimination von β_1 und β_3 führt auf

$$\begin{aligned} &8\alpha^2 - 4c_1\alpha + (4c_2 - c_1^2) = 0, \\ &(8c_2 - 10c_1^2)\alpha^2 + (16c_3 - 12c_1c_2 + 7c_1^3)\alpha + (16c_4 - 8c_1c_3) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

und die Resultante beider Gleichungen gibt

$$\begin{aligned} R = {} & 4(c_1^3 - 4c_1c_2 + 8c_3)(7c_1^5 - 40c_1^3c_2 + 48c_1^2c_3 + 48c_1c_2^2 - 64c_1c_4 - 64c_2c_3) \\ & - (5c_1^4 - 24c_1^2c_2 + 32c_1c_3 + 16c_2^2 - 64c_4)^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir haben demnach

(14*) $$R = 0$$

als Bedingung dafür, daß zu

$$y^2 - (x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4) = 0$$

eine singuläre perfekte Asymptotenkurve

$$y \cdot (x + \alpha) - (x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3) = 0$$

besteht. Für α liefern die Gleichungen (13)

(15) $$\alpha = -\frac{1}{8} \frac{5c_1^4 - 24c_1^2 c_2 + 32c_1 c_3 + 16c_2^2 - 64c_4}{c_1^3 - 4c_1 c_2 + 8c_3};$$

die β_i können dann aus den Gleichungen (12) berechnet werden.

Es kann aber auch in (15) Zähler und Nenner verschwinden. Dann sind die beiden Gleichungen (13) einander gleich, und es gibt zwei Werte von α. Die Bedingungen des Verschwindens sind

(16) $$8c_3 = c_1(-c_1^2 + 4c_2), \quad 64c_4 = (-c_1^2 + 4c_2)^2.$$

Man erhält also jetzt, wie es den Anschein hat, zwei singuläre perfekte Asymptotenkurven. Aber das findet nicht statt, denn auch hier wird

$$C_0 = \beta_3^2 - c_4 \alpha^2 = 0.$$

Den Beweis für diese Behauptung können wir auf zwei Arten liefern. Entweder direkt durch unmittelbare Rechnung, oder bequemer durch den Nachweis, daß bei der Geltung von (16)

$$16(x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4) = \left(4x^2 + 2c_1 x + \tfrac{1}{2}(4c_2 - c_1^2)\right)^2$$

ist. Denn dann wird φ ein Quadrat und

$$g^2 - (\sqrt{\varphi} \cdot h)^2 = 0.$$

Endlich wollen wir noch über den allgemeinen Fall eines $h(x)$ vom Grade n eine Bemerkung anfügen. Die Anzahl der in $h(x)$ und in $g(x)$ eingehenden Konstanten beträgt $2n + 2$; die Anzahl der Bedingungen, die für das Bestehen von singulären perfekten Asymptoten nötig sind, $2n + 3$. Folglich müssen die Koeffizienten von φ noch einer Bedingung unterworfen sein, wie sich dies bei $n = 0$ und $n = 1$ ja gezeigt hatte.

Gießen, den 24. Oktober 1904.

On iterated limits of multiple sequences.

By

E. L. Dodd of New Haven (Connecticut).

Pringsheim*), London**) and Bromwich***) have discussed iterated limits of double sequences. In this paper, I shall discuss the iterated limits of multiple sequences of any order $r \geqq 2$. With Pringsheim, I shall make extensive use of iterated lower limits and iterated upper limits. Certain theorems will be assumed, which have been proved by Pringsheim for double sequences, and which may be proved for sequences of higher order, by a similar method of reasoning. By an r-fold sequence, $A = \{a_{\nu_1 \cdots \nu_r}\}$, I shall mean an aggregate of terms $a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$, where $a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ is a real number (or $+\infty$, or $-\infty$), defined for each set of positive integral values of $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_r$.

§ 1.

Iterated limits of monotone sequences.

A sequence, A, is said to be monotone, if

$$a_{\nu_1' \cdots \nu_r'} \geqq a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \quad \text{whenever} \quad \nu_1' \geqq \nu_1, \nu_2' \geqq \nu_2, \cdots \nu_r' \geqq \nu_r.$$

Theorem I. The limit and iterated limits of a monotone sequence all exist, finite or infinite, and are equal.

Proof. With $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{r-1}$ fixed, the simple sequence $\{a_{\nu_1 \cdots \nu_r}\}$ is monotone, and thus

$$\underline{\lim_{\nu_r = \infty}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_r = \infty} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{\lim_{\nu_r = \infty}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}.$$

*) Mathematische Annalen, Bd. 53 (1900) p. 289.

**) Mathematische Annalen, Bd. 53 (1900) p. 322.

***) Proc. of the London Math. Soc., Jan. 8, 1904, p. 76.

The r-fold sequence $\{a_{\nu_1 \cdots \nu_r}\}$ being monotone, it follows that the $(r-1)$-fold sequence $\{\lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}\}$ is also monotone, and hence

$$\underline{\lim_{\nu_{r-1}}}\ \underline{\lim_{\nu_r}}\ a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_{r-1}}\lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{\lim_{\nu_{r-1}}}\ \overline{\lim_{\nu_r}}\ a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$$

and thus, finally

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}}\ a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{\lim_{\nu_1}} \cdots \overline{\lim_{\nu_r}}\ a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$$

But, for any sequence,

$$\underline{\lim_{\nu_1 \cdots \nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}}\ a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \overline{\lim_{\nu_1}} \cdots \overline{\lim_{\nu_r}}\ a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \overline{\lim_{\nu_1 \cdots \nu_r}}\ a_{\nu_1 \cdots \nu_r}.$$

And moreover, since A is monotone, it follows that

$$\underline{\lim_{\nu_1 \cdots \nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_1 \cdots \nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{\lim_{\nu_1 \cdots \nu_r}}\ a_{\nu_1 \cdots \nu_r}.$$

Hence

$$\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_1 \cdots \nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$$

and by the same method of reasoning, any other iterated limit may be shown to be equal to the limit of the sequence.

Corollary. If the limit, and any iterated limit of any sequence exist, they are equal.

§ 2.

Properties of iterated lower limits, iterated upper limits, and iterated limits.

Certain conditions will be used repeatedly, so that it seems convenient to have abbreviated expressions for them.

Suppose that, when $\varepsilon > 0$ is assigned, it is possible to find n_1, such that if ν_1 be taken arbitrarily, but $> n_1$, it is then possible to find n_2, so that for $\nu_2 > n_2$, there will now exist n_3, etc., $\cdots$

(C) there being finally an n_r, such that for any $\nu_r > n_r$,

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon.$$

In this case, I shall say that under the condition (C),

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon.$$

Suppose that, for any $\varepsilon > 0$, and any n_1, large at pleasure, it is possible to find $\nu_1 > n_1$, so that now taking n_2 large at pleasure,

(D) there well be some $\nu_2 > n_2$, so that etc., $\cdots$, finally for any n_r, there is a $\nu_r > n_r$ such that $a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$. In this case, I shall say that under the condition (D),

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon.$$

(C′) By saying that under the condition (C′), $a_{\nu_1 \cdots \nu_r} > G$, I shall mean that $G > 0$ is to be chosen, large at pleasure, and then it is to be possible to find $n_1, n_2, \cdots n_r$ as in (C).

(D′) By saying that under the condition (D′), $a_{\nu_1 \cdots \nu_r} > G$, I shall mean that it is possible to find $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_r$ as in (D).

Suppose now that $1 \leqq p < r$, and that $i_1, i_2, \cdots i_p, i_{p+1}, \cdots i_r$ is any permutation of the r integers, $1, 2, \cdots r$; where moreover $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, in case $p > 1$. Let us alter the condition (C), as follows. In (C), we required that $n_{i_{p+1}}$ exists, and permitted $\nu_{i_{p+1}}$

(Γ) to be taken arbitrarily, but $> n_{i_{p+1}}$. Suppose now, that $n_{i_{p+1}}$ is to be taken large at pleasure, and that we require the existence of $\nu_{i_{p+1}} > n_{i_{p+1}}$. Let us make a similar alteration upon (C), for $n_{i_{p+2}}, \nu_{i_{p+2}}, \cdots n_{i_r}, \nu_{i_r}$. The condition, thus obtained, I shall call (Γ).

Theorem II. (a) If, under the condition (C),

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$$

where b is finite, or infinite, then

$$\underset{\nu_1}{\lim} \cdots \underset{\nu_r}{\lim} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b. \tag{1}$$

(b) If, under the condition (D),

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq b + \varepsilon$$

then

$$\underline{\lim}_{\nu_1} \cdots \underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq b. \tag{2}$$

(c) If, under the condition (C),

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq b + \varepsilon$$

then

$$\overline{\lim}_{\nu_1} \cdots \overline{\lim}_{\nu_r} \leqq b. \tag{3}$$

(d) If, under the condition (D),

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$$

then

$$\overline{\lim}_{\nu_1} \cdots \overline{\lim}_{\nu_r} \geqq b. \tag{4}$$

Proof. In (a), suppose, first, that b is finite. With $\varepsilon, \nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{r-1}$, chosen in accordance with (C), there exists an integer n_r such that $a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$ if $\nu_r > n_r$. This shows that the lower limit with respect to ν_r cannot be less than $b - \varepsilon$, for these values of $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{r-1}$. But the lower limit with respect to ν_r exists, finite or infinite. Thus with $\varepsilon, \nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{r-1}$ chosen under condition (C), $\underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$. The

same method of reasoning applied now to the $(r-1)$-fold sequence, $\{\underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}\}$, yields the result, that with $\varepsilon, \nu_1, \cdots \nu_{r-2}$ chosen under condition (C),

$$\underline{\lim}_{\nu_{r-1}} \underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon .$$

Finally, for any $\varepsilon > 0$

$$\underline{\lim}_{\nu_1} \cdots \underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon ,$$

and hence

$$\underline{\lim}_{\nu_1} \cdots \underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b .$$

Here b was supposed to be finite. If $b = -\infty$, then (1) is at once satisfied. If $b = +\infty$, then for $\varepsilon, \nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{r-1}$ chosen unter condition (C), there exists an n_r, so that if $\nu_r > n_r$, then $a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq b - \varepsilon$, that is, $a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = +\infty$, and thus $\underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = +\infty$. Finally

$$\underline{\lim}_{\nu_1} \cdots \underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = +\infty = b .$$

Thus (1) is satisfied, whether b is finite or infinite. The proof of (b) is analogous. With $\varepsilon, \nu_1 \cdots \nu_{r-1}$ chosen under condition (D), and n_r large at pleasure, there is always a $\nu_r > n_r$, such that $a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq b + \varepsilon$, and hence $\underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq b + \varepsilon$. This method of reasoning leads to

$$\underline{\lim}_{\nu_1} \cdots \underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq b + \varepsilon$$

from which (2) follows.

In the same way, (c) and (d) are proved.

Theorem III. The following are necessary and sufficient conditions that

$$\underline{\lim}_{\nu_1} \cdots \underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \underline{b}, \text{ finite or infinite,}$$

$$\overline{\lim}_{\nu_1} \cdots \overline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{b}, \text{ finite or infinite,}$$

viz., for

(a) $\underline{b}$, finite. Under condition (C)

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq \underline{b} - \varepsilon \tag{5}$$

and under condition (D)

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{b} + \varepsilon . \tag{6}$$

(b) $\underline{b} = +\infty$. Under condition (C')

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} > G . \tag{7}$$

(c) $\underline{b} = -\infty$. Under condition (D')

(8) $$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} < -G.$$

(d) $\bar{b}$, finite. Under condition (C)

(9) $$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \bar{b} + \varepsilon$$

and under condition (D)

(10) $$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq \bar{b} - \varepsilon.$$

(e) $\bar{b} = +\infty$. Under condition (D')

(11) $$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} > G.$$

(f) $\bar{b} = -\infty$. Under condition (C')

(12) $$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} < -G.$$

Proof. First, to prove that (a) is necessary. The hypothesis is then, that

(13) $$\underline{\lim_{\nu_1}} \left(\underline{\lim_{\nu_2}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \right) = \underline{b} \text{ finite}$$

or if we set

(14) $$\underline{\lim_{\nu_2}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \underline{a}_{\nu_1}$$

then (13) becomes

(15) $$\underline{\lim_{\nu_1}} \underline{a}_{\nu_1} = \underline{b}.$$

From (15), it follows, that for any $\varepsilon > 0$, there is an n_1 so that

(16) $$\underline{a}_{\nu_1} \geqq \underline{b} - \varepsilon \quad \text{if} \quad \nu_1 > n_1.$$

Let some particular $\nu_1 > n_1$ be chosen, and suppose that $\underline{a}_{\nu_1}$ is finite, for this ν_1 set

$$\underline{\lim_{\nu_2}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \underline{a}_{\nu_1 \nu_2}.$$

Thus, by (14),

$$\underline{\lim_{\nu_2}} \underline{a}_{\nu_1 \nu_2} = \underline{a}_{\nu_1}$$

and hence there is an n_2, such that for $\nu_2 > n_2$

(17) $$\underline{a}_{\nu_1 \nu_2} \geqq \underline{a}_{\nu_1} - \varepsilon \geqq \underline{b} - 2\varepsilon.$$

In case $\underline{a}_{\nu_1}$ is infinite, it cannot equal $-\infty$ on account of (16). If $\underline{a}_{\nu_1} = +\infty$, then $\underline{a}_{\nu_1 \nu_2} \geqq b - 2\varepsilon$ can be obtained, a fortiori.

By continuing this process, we find the numbers, $n_1, n_2, \cdots n_r$, that occur in condition (C). Thus, under condition (C),

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq \underline{b} - r\varepsilon.$$

The trivial change of $r\varepsilon$ to ε gives (5).

Moreover, from (15), it follows that for any $\varepsilon > 0$, and n_1 large at pleasure, there is a $\nu_1 > n_1$, such that

$$\underline{a}_{\nu_1} \leqq \underline{b} + \varepsilon. \tag{18}$$

If n_1 is sufficiently large, this $\underline{a}_{\nu_1}$ is finite, on account of (16). In fact, from (16) and (18), it follows that with n_1 large at pleasure, there is a $\nu_1 > n_1$, such that

$$|\underline{b} - \underline{a}_{\nu_1}| \leqq \varepsilon. \tag{19}$$

If now n_2 is large at pleasure, we can find $\nu_2 > n_2$ such that

$$|\underline{a}_{\nu_1} - \underline{a}_{\nu_1 \nu_2}| \leqq \varepsilon.$$

In this manner, we finally establish (6).

To prove that (b) is necessary, we suppose that $G > 0$ is assigned at pleasure. Then there is an n_1, such that, if $\nu_1 > n_1$,

$$\underline{a}_{\nu_1} > rG.$$

With ν_1 fixed, it is possible to find n_2, so that, if $\nu_2 > n_2$

$$\underline{a}_{\nu_1 \nu_2} > \underline{a}_{\nu_1} - G > (r-1)G$$

and, step by step, we are led to (7).

The treatment of the other cases is analogous.

We have yet to show that the conditions are sufficient. Let us suppose, as in (a), that under condition (C)

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq \underline{b} - \varepsilon$$

and that under condition (D)

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{b} + \varepsilon$$

Then, by Theorem II (a), (b),

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq \underline{b},$$

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{b}$$

Hence

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \underline{b}$$

To prove that (b) is sufficient, we have only to notice that with $G, \nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{r-1}$, chosen in accordance with (C'), there exists an n_r such that $a_{\nu_1 \cdots \nu_r} > G$, if $\nu_r > n_r$, and hence $\underline{\lim}\, a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq G$. Finally

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq G,$$

where G is large at pleasure. Hence

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = +\infty = b.$$

Theorem IV. The following are necessary conditions that

$$\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = b, \text{ finite or infinite,}$$

viz. for

(a) b finite. Under condition (C)

$$|b - a_{\nu_1 \cdots \nu_r}| \leqq \varepsilon \tag{20}$$

(b) $b = +\infty$. Under condition (C')

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} > G. \tag{21}$$

(c) $b = -\infty$. Under condition (C')

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} < -G \tag{22}$$

Moreover, if $\lim_{\nu_2} \cdots \lim_{\nu_r}$ is known to exist, the above conditions are sufficient.

Proof. The proof of this theorem rests upon the preceding theorem For example, suppose that

$$\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = b, \text{ finite.}$$

Then

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = b = \overline{\lim_{\nu_1}} \cdots \overline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}.$$

(5) and (9) are now applicable, giving (20). This shows the necessity of (a). Suppose on the other hand that (20) is satisfied, and that $\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ exists. From (5), (6), (9) and (10) we conclude that

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = b = \overline{\lim_{\nu_1}} \cdots \overline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}.$$

Moreover, since $\lim_{\nu_2} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ exists,

$$\underline{\lim_{\nu_2}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_2} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{\lim_{\nu_2}} \cdots \overline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$$

and hence

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \lim_{\nu_2} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = b = \overline{\lim_{\nu_1}} \lim_{\nu_2} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$$

Thus

$$\lim_{\nu_1} \lim_{\nu_2} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = b$$

and the condition is sufficient.

When $r > 1$, (a) is not in itself sufficient, as illustrated by the double sequence of terms, $a_{\nu_1 \nu_2} = (-1)^{\nu_1 + \nu_2}\left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}\right)$. Here (a) is satisfied if we take $b = 0$, but $\lim_{\nu_2} a_{\nu_1 \nu_2}$ and consequently $\lim_{\nu_1} \lim_{\nu_2} a_{\nu_1 \nu_2}$ does not exist.

Before taking up the next theorem, let us consider a particular case of it. Write

$$\underline{\lim}_{\nu_1}\underline{\lim}_{\nu_3}\underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \underline{\lim}_{\nu_1}\underline{\lim}_{\nu_3}(\underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}).$$

The subscripts, 1, 3, of the indices, ν_1, ν_3, outside the brackets, increase from left to right. Set $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_3 = 2$. Thus $i_1 < i_2$. We shall now show that, if under the condition (Γ)

$$a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \leqq \underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \varepsilon, \tag{23}$$

then

$$\underline{\lim}_{\nu_1}\underline{\lim}_{\nu_2}\underline{\lim}_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \leqq \underline{\lim}_{\nu_1}\underline{\lim}_{\nu_3}\underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}. \tag{24}$$

Let us suppose that ν_1 and ν_2 are chosen in accordance with (Γ). Then $\{a_{\nu_1\nu_2\nu_3}\}$ and $\{\underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \varepsilon\}$ become simple sequences for which (23) is valid, if $\nu_3 > n_3$, and hence

$$\underline{\lim}_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \leqq \underline{\lim}_{\nu_3}(\underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \varepsilon) = \underline{\lim}_{\nu_3}\underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \varepsilon. \tag{25}$$

Thus, if ν_1 is chosen in accordance with (Γ) and n_3 taken large at pleasure, there is a $\nu_2 > n_2$ for which (25) is valid, and hence

$$\underline{\lim}_{\nu_2}\underline{\lim}_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \leqq \underline{\lim}_{\nu_3}\underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \varepsilon; \tag{26}$$

for as soon as ν_1 is chosen or fixed, the right-hand member of (25) is a constant, whereas the left-hand member depends upon ν_2, and repeatedly assumes values less than or at most equal to the right-hand member. Now (26) is valid for every ν_1 greater than some n_1, and hence

$$\underline{\lim}_{\nu_1}\underline{\lim}_{\nu_2}\underline{\lim}_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \leqq \underline{\lim}_{\nu_1}\underline{\lim}_{\nu_3}\underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \varepsilon; \tag{27}$$

since ε is arbitrary, (24) follows from (27).

Inasmuch as the condition (C) is more restrictive than (Γ), we can conclude, also, from the foregoing discussion, that if under the condition (C)

$$a_{\nu_1\nu_3} \leqq \underline{\lim}_{\nu_2} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \varepsilon,$$

then (24) will follow.

We now consider the general case of an r-fold sequence.

Theorem V. (a) If, under the condition (Γ),

$$a_{\nu_1\cdots\nu_r} \leqq \underline{\lim}_{\nu_{i_{p+1}}}\underline{\lim}_{\nu_{i_{p+2}}}\cdots\underline{\lim}_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1\cdots\nu_r} + \varepsilon, \tag{28}$$

then

$$\underline{\lim}_{\nu_1}\cdots\underline{\lim}_{\nu_r} a_{\nu_1\cdots\nu_r} \leqq \underline{\lim}_{\nu_{i_1}}\cdots\underline{\lim}_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1\cdots\nu_r}. \tag{29}$$

(b) If, under the condition (Γ),

$$a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq \overline{\lim_{\nu_{i_{p+1}}}} \cdots \overline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} - \varepsilon \tag{30}$$

then

$$\overline{\lim_{\nu_1}} \cdots \overline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq \overline{\lim_{\nu_{i_1}}} \cdots \overline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}. \tag{31}$$

Proof. Suppose that $\varepsilon, \nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{r-1}$ are chosen or fixed in accordance with (Γ). If ν_r occurs among the indices $\nu_{i_{p+1}}, \cdots \nu_{i_r}$, then the right-hand member of (28) is a constant, $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{r-1}$ being fixed. By (Γ) now, we know that, however large n_r is, there is a $\nu_r > n_r$, rendering (28) valid. Hence

$$\underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{\lim_{\nu_{i_{p+1}}}} \cdots \underline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} + \varepsilon. \tag{32}$$

We may write this in the form

$$\underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{\lim_{\nu_r}} (\underline{\lim_{\nu_{i_{p+1}}}} \cdots \underline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}) + \varepsilon, \tag{33}$$

for an examination of the definition of an iterated lower limit will show that an operator, $\underline{\lim}_{\nu_r}$, when required to operate a second time, produces no alteration, just as $\underline{\lim}_{\nu_r}$ produces no alteration when applied to a constant, e. g. $\underline{\lim}_{\nu_r} 5 = 5$.

If, on the other hand, ν_r does not occur among the indices $\nu_{i_{p+1}}, \cdots \nu_{i_r}$, then, when $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_{r-1}$ are fixed in accordance with (Γ), both sides of (28) are simple sequences, such that (28) is valid for every ν_r greater than some n_r. From this fact, (33) follows. Thus in both cases, (33) is valid for $\nu_1, \cdots \nu_{r-1}$ chosen in accordance with (Γ). Now just as (33) was derived from (28), we can derive from (33) the following inequality,

$$\underline{\lim_{\nu_{r-1}}} \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{\lim_{\nu_{r-1}}} \underline{\lim_{\nu_r}} (\underline{\lim_{\nu_{i_{p+1}}}} \underline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}) + \varepsilon \tag{34}$$

which will be valid, if $\nu_1, \cdots \nu_{r-2}$ are chosen in accordance with (Γ). Proceeding step by step, we conclude that

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} (\underline{\lim_{\nu_{i_{p+1}}}} \cdots \underline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}) + \varepsilon. \tag{35}$$

In the right-hand member, let us remove from the set of operators, $\underline{\lim}_{\nu_1}, \underline{\lim}_{\nu_2}, \cdots \underline{\lim}_{\nu_r}$, those which are redundant, namely, $\underline{\lim}_{\nu_{i_{p+1}}}, \cdots \underline{\lim}_{\nu_{i_r}}$, which have already operated. The operators which remain are $\underline{\lim}_{\nu_{i_1}}, \underline{\lim}_{\nu_{i_2}}, \cdots \underline{\lim}_{\nu_{i_p}}$, which, moreover, occur in this order, because of the hypothesis that

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_p.$$

Hence (35) may be written

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{\lim_{\nu_{i_1}}} \cdots \underline{\lim_{\nu_{i_p}}} \left(\underline{\lim_{\nu_{i_{p+1}}}} \cdots \underline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \right) + \varepsilon . \tag{36}$$

Now since ε is arbitrary, (29) follows from (36). The proof of (b) is analogous.

§ 3.

Conditions for the equality of two iterated limits.

Theorem VI. If $\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ and $\lim_{\nu_{i_1}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ exist, finite or infinite, and if under condition (Γ)

$$| \alpha_{\nu_1 \cdots \nu_r} - \lim_{\nu_{i_{p+1}}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} | \leqq \varepsilon \tag{37}$$

then

$$\lim_{\nu_{i_1}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} . \tag{38}$$

Proof. Since, by hypothesis, $\lim_{\nu_{i_{p+1}}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ and $\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ exist, it follows that

$$\underline{\lim_{\nu_{i_{p+1}}}} \cdots \underline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_{i_{p+1}}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{\lim_{\nu_{i_{p+1}}}} \cdots \overline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} , \tag{39}$$

$$\underline{\lim_{\nu_1}} \cdots \underline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{\lim_{\nu_1}} \cdots \overline{\lim_{\nu_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} . \tag{40}$$

Now (37) being satisfied, it follows from (39) that (28) and (30) are satisfied, from which (29) and (31) follow. These, with (40), give

$$\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \underline{\lim_{\nu_{i_1}}} \cdots \underline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} , \tag{41}$$

$$\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \geqq \overline{\lim_{\nu_{i_1}}} \cdots \overline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} . \tag{42}$$

But

$$\underline{\lim_{\nu_{i_1}}} \cdots \underline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \leqq \overline{\lim_{\nu_{i_1}}} \cdots \overline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} ,$$

and thus the inequality signs must be removed from (41) and (42). Now since $\lim_{\nu_{i_2}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ exists, by hypothesis, it follows that

$$\underline{\lim_{\nu_{i_2}}} \cdots \underline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_{i_2}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{\lim_{\nu_{i_2}}} \cdots \overline{\lim_{\nu_{i_r}}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} , \tag{43}$$

this with (41) and (42) gives

$$\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \underline{\lim_{\nu_{i_1}}} \lim_{\nu_{i_2}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \overline{\lim_{\nu_{i_1}}} \lim_{\nu_{i_2}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} ,$$

from which (38) follows.

We have just proved that if $\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ and $\lim_{\nu_{i_1}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ were known to exist, then (37) was a sufficient condition for (38). It will now be shown that (37) is a necessary condition for (38), in case the iterated limits of (38) are finite. We shall prove that from (38) it follows that under condition (C), (37) is valid, and hence, a fortiori, (37) is valid under condition (Γ).

Theorem VII. If

$$\lim_{\nu_{i_1}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = \lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} \tag{44}$$

exists and is finite, then, under the condition (C),

$$| a_{\nu_1 \cdots \nu_r} - \lim_{\nu_{i_{p+1}}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} | \leqq \varepsilon. \tag{45}$$

Proof. Let us set

$$\lim_{\nu_{i_{p+1}}} \cdots \lim_{\nu_{i_r}} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = b_{\nu_{i_1} \cdots \nu_{i_p}}. \tag{46}$$

Then by hypothesis

$$\lim_{\nu_{i_1}} \cdots \lim_{\nu_{i_p}} b_{\nu_{i_1} \cdots \nu_{i_p}} = b \tag{47}$$

where b is finite and also

$$\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r} = b. \tag{48}$$

Then from Theorem IV, it follows that under condition (C),

$$| b - a_{\nu_1 \cdots \nu_r} | \leqq \varepsilon \tag{49}$$

and also that under condition (C),

$$| b - b_{\nu_{i_1} \cdots \nu_{i_p}} | \leqq \varepsilon. \tag{50}$$

It will be evident that (50) is valid, if we remember that

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_p.$$

Inasmuch as $b_{\nu_{i_1} \cdots \nu_{i_p}}$ does not possess theindices $\nu_{i_{p+1}}, \cdots \nu_{i_r}$, the choosing of $\nu_{i_{p+1}}, \cdots \nu_{i_r}$ in no way affects the sequence $\{b_{\nu_{i_1} \cdots \nu_{i_p}}\}$, and thus in (C) for (50), we may take $n_{i_{p+1}}$, or let us say

$$n'_{i_{p+1}} = n'_{i_{p+2}} = \cdots = n'_{i_r} = 1.$$

Let us suppose, now, that a positive ε is given. By (C), there exists an n_1 for (49) and an n'_1, say, for (50). Let n''_1 be the larger of the two, and take $\nu_1 > n''_1$, similarly n''_2 can now be found, and then $\nu_2 > n''_2$ be taken arbitrarily. And finally n''_r can be found, and if $\nu_r > n''_r$, then both

$$|b - a_{\nu_1 \cdots \nu_r}| \leqq \varepsilon$$

and

$$|b - b_{\nu_{i_1} \cdots \nu_{i_p}}| \leqq \varepsilon$$

and hence

$$|a_{\nu_1 \cdots \nu_r} - b_{\nu_{i_1} \cdots \nu_{i_p}}| \leqq 2\varepsilon.$$

This with (46) gives (45), after making the trivial change from 2ε to ε.

In Theorem VI, we supposed for the sake of definiteness, that $\lim_{\nu_1} \cdots \lim_{\nu_r} a_{\nu_1 \cdots \nu_r}$ was known to exist, and enquired about the existence of some other iterated limit. In practice, however, the iterated limit which was known to exist, might be, for example, $\lim_{\nu_3} \lim_{\nu_1} \lim_{\nu_2} a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}$, and we might wish to know about the existence of $\lim_{\nu_2} \lim_{\nu_3} \lim_{\nu_1} a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}$. It is obvious that the theorem could be restated, with the proper change among the indices throughout, to obtain our desired criterion. Another method of procedure is possible, which can be easily justified. Form a new sequence with terms, $b_{\nu_3 \nu_1 \nu_2} = a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}$. Then

$$\lim_{\nu_3} \lim_{\nu_1} \lim_{\nu_2} a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} = \lim_{\nu_3} \lim_{\nu_1} \lim_{\nu_2} b_{\nu_3 \nu_1 \nu_2} = \lim_{\mu_1} \lim_{\mu_2} \lim_{\mu_3} b_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$$

where $\mu_1 = \nu_3$, $\mu_2 = \nu_1$, $\mu_3 = \nu_2$. The problem is now to find whether $\lim_{\mu_3} \lim_{\mu_1} \lim_{\mu_2} b_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ exists, and for this purpose, Theorem VI is applicable. We shall now apply Theorem VI to double and triple sequences.

§ 4.

Application to double and triple sequences.

If $\lim_{\nu_1} \lim_{\nu_2} a_{\nu_1 \nu_2}$ and $\lim_{\nu_1} a_{\nu_1 \nu_3}$ exist, finite*) or infinite, and if for any positive ε, and any n_1, however large, there is a $\nu_1 > n_1$ and an n_2, so that if $\nu_2 > n_2$,

$$|a_{\nu_1 \nu_2} - \lim_{\nu_1} a_{\nu_1 \nu_2}| \leqq \varepsilon;$$

then

$$\lim_{\nu_2} \lim_{\nu_1} a_{\nu_1 \nu_2} = \lim_{\nu_1} \lim_{\nu_2} a_{\nu_1 \nu_2}.$$

We suppose now that

$$\lim_{\nu_1} \lim_{\nu_2} \lim_{\nu_3} a_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} = b,$$

finite or infinite, and give the criteria that each of the other five iterated limits should exist and equal b.

---

*) For another proof of this, in the case when $\lim_{\nu_1} \lim_{\nu_2} a_{\nu_1 \nu_2}$ and $\lim_{\nu_1} a_{\nu_1 \nu_2}$ are finite, see Bromwich, l. c.

(a) $$\lim_{\nu_1}\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} = b,$$

if $\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ exists (finite or infinite), and if for any $\varepsilon > 0$ there is an n_1, such that for any $\nu_1 > n_1$ and any n_2, there is a $\nu_2 > n_2$ and an n_3, such that if $\nu_3 > n_3$

$$|a_{\nu_1\nu_2\nu_3} - \lim a_{\nu_1\nu_2\nu_3}| \leqq \varepsilon.$$

(a′) $$\lim_{\nu_1}\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} = b,$$

if $\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ exists, and if for any $\varepsilon > 0$ there is an n_1, such that for any $\nu_1 > n_1$ and any n_2, there is a $\nu_2 > n_2$, so that for any n_3, there is a $\nu_3 > n_3$, such that

$$|a_{\nu_1\nu_2\nu_3} - \lim_{\nu_2}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}| \leqq \varepsilon.$$

(b) $$\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_1}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} = b,$$

if $\lim_{\nu_1}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ exists, and if for any $\varepsilon > 0$ and any n_1 there is a $\nu_1 > n_1$ and an n_2, so that for any $\nu_2 > n_2$ and any n_3, there is a $\nu_3 > n_3$, such that

$$|a_{\nu_1\nu_2\nu_3} - \lim_{\nu_1}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}| \leqq \varepsilon.$$

(c) $$\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_3}\lim_{\nu_1} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} = b,$$

if $\lim_{\nu_3}\lim_{\nu_1} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ exists, and if for any $\varepsilon > 0$ and any n_1, there is a $\nu_1 > n_1$ and an n_2, such that for any $\nu_2 > n_2$, there is an n_3 so that for any $\nu_3 > n_3$

$$|a_{\nu_1\nu_2\nu_3} - \lim_{\nu_1} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}| \leqq \varepsilon.$$

(c′) $$\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_3}\lim_{\nu_1} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} = b,$$

if $\lim_{\nu_3}\lim_{\nu_1} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ exists, and if for any $\varepsilon > 0$ and any n_1 there is a $\nu_1 > n_1$ and an n_2, such that for any $\nu_2 > n_2$ and any n_3, there is a $\nu_3 > n_3$, such that

$$|a_{\nu_1\nu_2\nu_3} - \lim_{\nu_3}\lim_{\nu_1} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}| \leqq \varepsilon.$$

(d) $$\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_1}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} = b,$$

if $\lim_{\nu_1}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ exists, and if for any $\varepsilon > 0$ and any n_1, there is a $\nu_1 > n_1$, so that for any n_2, there is a $\nu_2 > n_2$ and an n_3 such that for any $\nu_3 > n_3$

$$|a_{\nu_1\nu_2\nu_3} - \lim_{\nu_1}\lim_{\nu_3} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}| \leqq \varepsilon.$$

(e) $$\lim_{\nu_3}\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_1} a_{\nu_1\nu_2\nu_3} = b,$$

if $\lim_{\nu_2}\lim_{\nu_1} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ exists, and if for any $\varepsilon>0$ and any n_1, there is a $\nu_1>n_1$, so that for any n_2 there is a $\nu_2>n_2$ and an n_3 such that for any $\nu_3>n_3$

$$|a_{\nu_1\nu_2\nu_3} - \lim_{\nu_2}\lim_{\nu_1} a_{\nu_1\nu_2\nu_3}| \leqq \varepsilon.$$

For the case where b is finite, these conditions have been shown to be both necessary and sufficient.

§ 5.

Application to infinite series.

Let S be an r-fold infinite series, with terms $\alpha_{\mu_1\cdots\mu_r}$. Let

$$a_{\nu_1\cdots\nu_r} = \sum_{1\cdots 1}^{\nu_1\cdots\nu_r} \alpha_{\mu_1\cdots\mu_r}.$$

If $\lim_{\nu_1\cdots\nu_r} a_{\nu_1\cdots\nu_r} = s$, then s is said to be the sum of the series S. It is customary to require that s be finite*). Here, however, I shall permit s to be finite or infinite. It can be shown that the necessary and sufficient condition that

$$\sum_1^\infty{}_{\mu_1}\sum_1^\infty{}_{\mu_2}\cdots\sum_1^\infty{}_{\mu_r}\alpha_{\mu_1\cdots\mu_r} = b, \quad \text{(finite or infinite)}$$

is that

$$\lim_{\nu_1}\lim_{\nu_2}\cdots\lim_{\nu_r} a_{\nu_1\cdots\nu_r} = b.$$

Thus the criteria, just obtained for the equality of the iterated limits of r-fold sequences, are criteria for the equality of the iterated sums of infinite series.

New Haven, Ct., U. S. A., June 1904.

*) Cf. London, l. c. p. 359.

Zur Theorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen.

Von

Josef Kürschák in Budapest.

1. *Ist für die Monge-Ampèresche Differentialgleichung*

$$F = Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0 \tag{1}$$

der Ausdruck

$$G = K^2 - HL + MN \tag{2}$$

von Null verschieden, so geht die Gleichung (1) *bei jeder Berührungstransformation wieder in eine solche Monge-Ampèresche Differentialgleichung* $F_1 = 0$ *über, für die der entsprechende Ausdruck* G_1 *nicht gleich Null ist.*

In einer unlängst erschienenen hinterlassenen Arbeit bemerkte Lie*): „Es wäre wünschenswert, daß die Invarianz der Bedingung $G \neq 0$ direkt nachgewiesen würde." Im ersten Teile dieser Note soll nun gezeigt werden, wie sich das leicht machen läßt.

Der Zusammenhang von G und G_1, den wir finden werden, besagt mehr als nur die Invarianz von $G \neq 0$. Namentlich lassen sich aus diesem Zusammenhange bemerkenswerte Schlüsse ziehen betreffs der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Die Sätze, die ich so erhalten habe, bilden den zweiten Teil dieser Note.

I.

2. Die Größe G hat eine einfache algebraische Bedeutung. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Die linke Seite der Gleichung (1) *kann immer auf die folgende Gestalt gebracht werden:*

$$F = \begin{vmatrix} u_1\frac{dx}{dx} + u_2\frac{dy}{dx} + u_3\frac{dp}{dx} + u_4\frac{dq}{dx} & u_1\frac{dx}{dy} + u_2\frac{dy}{dy} + u_3\frac{dp}{dy} + u_4\frac{dq}{dy} \\ v_1\frac{dx}{dx} + v_2\frac{dy}{dx} + v_3\frac{dp}{dx} + v_4\frac{dq}{dx} & v_1\frac{dx}{dy} + v_2\frac{dy}{dy} + v_3\frac{dp}{dy} + v_4\frac{dq}{dy} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

*) S. Lie. *Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen.* Aus dem Nachlasse herausgegeben von Fr. Engel Mathematische Annalen Bd. 59 (1904), Seite 193—313.

Die angeführte Bemerkung befindet sich in der Fußnote Seite 281.

wo die u und die v nur

$$x, y, z, p, q$$

enthalten und wo

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q},$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q},$$

also

$$\frac{dx}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{dq}{dx} = s,$$

$$\frac{dx}{dy} = 0, \quad \frac{dy}{dy} = 1, \quad \frac{dp}{dy} = s, \quad \frac{dq}{dy} = t.$$

Bei jeder solchen Darstellung von F ist

$$2\sqrt{G} = \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_2 & u_4 \\ v_2 & v_4 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Die Forderung (3) läßt sich durch die folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$\begin{aligned} &H = u_3v_2 - v_3u_2, \quad K + w = u_1v_3 - v_1u_3, \quad M = u_1v_2 - v_1u_2, \\ &L = u_1v_4 - v_1u_4, \quad K - w = u_4v_2 - v_4u_2, \quad N = u_3v_4 - v_3u_4, \end{aligned} \tag{5}$$

wo w eine Hilfsgröße bedeutet. Zwischen den rechten Seiten dieser Gleichungen besteht eine wohlbekannte Identität, der zufolge

$$(K+w)(K-w) - HL + MN$$

verschwinden muß. Die Hilfsgröße w muß also gleich $\sqrt{G}$ gesetzt werden. Ist nun w so gewählt, so kann man bekanntlich die Gleichungen (5) durch passende u und v stets befriedigen, und die Subtraktion der beiden mittleren Gleichungen voneinander führt zur Formel (4).

3. Nun führe die Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q \tag{6}$$

die vorgelegte Gleichung (1) über in

$$F_1 = H_1r_1 + 2K_1s_1 + L_1t_1 + M_1 + N_1(r_1t_1 - s_1^2) = 0, \tag{7}$$

wo wir F_1 gleich in der Gestalt

$$F_1 = \begin{vmatrix} a_1\frac{dx_1}{dx_1} + a_2\frac{dy_1}{dx_1} + a_3\frac{dp_1}{dx_1} + a_4\frac{dq_1}{dx_1} & a_1\frac{dx_1}{dy_1} + a_2\frac{dy_1}{dy_1} + a_3\frac{dp_1}{dy_1} + a_4\frac{dq_1}{dy_1} \\ b_1\frac{dx_1}{dx_1} + b_2\frac{dy_1}{dx_1} + b_3\frac{dp_1}{dx_1} + b_4\frac{dq_1}{dx_1}, & b_1\frac{dx_1}{dy_1} + b_2\frac{dy_1}{dy_1} + b_3\frac{dp_1}{dy_1} + b_4\frac{dq_1}{dy_1} \end{vmatrix} \tag{8}$$

annehmen wollen. Hier bedeuten die a und b Funktionen von

$$x_1, y_1, z_1, p_1, q_1,$$

und $\frac{d}{dx_1}$, $\frac{d}{dy_1}$ sind Abkürzungen für

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial}{\partial z_1} + r_1\frac{\partial}{\partial p_1} + s_1\frac{\partial}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1} + q_1\frac{\partial}{\partial z_1} + s_1\frac{\partial}{\partial p_1} + t_1\frac{\partial}{\partial q_1}.$$

Drücken wir wieder alles in den alten Veränderlichen aus, so unterscheiden sich F und σF_1, wo

$$\sigma = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} \end{vmatrix}$$

ist, höchstens um einen solchen Faktor, der nur

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q$$

enthält. Wir können und wollen voraussetzen, dieser Faktor sei gleich 1. Dann erhalten wir

$$F = \sigma F_1 = \begin{vmatrix} a_1\frac{dX}{dx}+a_2\frac{dY}{dx}+a_3\frac{dP}{dx}+a_4\frac{dQ}{dx}, & a_1\frac{dX}{dy}+a_2\frac{dY}{dy}+a_3\frac{dP}{dy}+a_4\frac{dQ}{dy} \\ b_1\frac{dX}{dx}+b_2\frac{dY}{dx}+b_3\frac{dP}{dx}+b_4\frac{dQ}{dx}, & b_1\frac{dX}{dy}+b_2\frac{dY}{dy}+b_3\frac{dP}{dy}+b_4\frac{dQ}{dy} \end{vmatrix},$$

d. h.

$$F = \begin{vmatrix} u_1\frac{dx}{dx}+u_2\frac{dy}{dx}+u_3\frac{dp}{dx}+u_4\frac{dq}{dx}, & u_1\frac{dx}{dy}+u_2\frac{dy}{dy}+u_3\frac{dp}{dy}+u_4\frac{dq}{dy} \\ v_1\frac{dx}{dx}+v_2\frac{dy}{dx}+v_3\frac{dp}{dx}+v_4\frac{dq}{dx}, & v_1\frac{dx}{dy}+v_2\frac{dy}{dy}+v_3\frac{dp}{dy}+v_4\frac{dq}{dy} \end{vmatrix},$$

wo

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1(X_x+pX_z)+a_2(Y_x+pY_z)+a_3(P_x+pP_z)+a_4(Q_x+pQ_z), \\ u_2 &= a_1(X_y+qX_z)+a_2(Y_y+qY_z)+a_3(P_y+qP_z)+a_4(Q_y+qQ_z), \\ u_3 &= a_1X_p+a_2Y_p+a_3P_p+a_4Q_p, \\ u_4 &= a_1X_q+a_2Y_q+a_3P_q+a_4Q_q \end{aligned}$$

ist und die v sich in ähnlicher Weise aus den b ergeben. Die Indizes x, y, z, p und q bezeichnen hier partielle Differentiationen.

Werden diese Werte der u und v in die Formel (2) eingesetzt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2\sqrt{G} = {} & (a_3b_2-b_3a_2)[YP]+(a_1b_3-b_1a_3)[PX]+(a_1b_2-b_1a_2)[YX] \\ & +(a_1b_4-b_1a_4)[QX]+(a_2b_4-b_2a_4)[QY]+(a_3b_4-b_3a_4)[QP], \end{aligned}$$

wo [ ] den Poissonschen Klammerausdruck bedeutet. Hier ist bekanntlich

$$[YP] = [YX] = [QX] = [QP] = 0$$

und

$$[PX] = [QY] = \varrho,$$

wo ϱ von Null verschieden ist. Es ist also $2\sqrt{G}$ gleich dem Produkte von ϱ und von

$$2\sqrt{G_1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt aber die Invarianz der Bedingung $G \neq 0$ unmittelbar.

II.

4. Es bedeute f eine gegebene Funktion von

$$x,\ y,\ z$$

und den Ableitungen von z bis zu einer gewissen n^{ten} Ordnung. Soll nun die erste Variation von

$$J = \int\int f(x, y, z, p, q, r, s, t, \cdots)\, dx\, dy$$

verschwinden, so muß z die folgende Differentialgleichung befriedigen:

$$(9)\quad V(f) = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{dy}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{d^2}{dx\,dy}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial t} - \cdots = 0,$$

wo

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r\frac{\partial}{\partial p} + s\frac{\partial}{\partial q} + \cdots,$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + s\frac{\partial}{\partial p} + t\frac{\partial}{\partial q} + \cdots.$$

Bezeichnen wir $V(f)$ zur Abkürzung mit F, so ist*) der Differentialausdruck

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial z}u + \frac{\partial F}{\partial p}u_x + \frac{\partial F}{\partial q}u_y + \frac{\partial F}{\partial r}u_{xx} + \frac{\partial F}{\partial s}u_{xy} + \frac{\partial F}{\partial t}u_{yy} + \cdots,$$

in dem u eine unbestimmte Funktion von x und y bedeutet, sich selbst adjungiert. Aber auch umgekehrt gilt wenigstens für solche Funktionen, die nur

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t$$

aber keine höheren Ableitungen von z enthalten, der folgende Satz**):

Bedeutet

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)$$

eine solche Funktion, daß

$$(10)\qquad \delta F = \text{adj. } \delta F$$

ist, so läßt sich stets durch Quadraturen eine Funktion

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t)$$

ermitteln, vermöge deren F in der Gestalt

$$F = V(f)$$

darstellbar ist. Und zwar ist in diesem Falle F stets die linke Seite einer Monge-Ampèreschen Differentialgleichung, und auch f hat die Gestalt

---

*) A. Hirsch. *Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.* Math. Annalen Bd. 49 (1897), S. 49—72. — Siehe besonders Seite 53.

**) A. Hirsch, l. c. § 9. (Seite 66—68.)

$$f = Ar + 2Bs + Ct + D + E(rt - s^2),$$

wo A, B, C, D *und* E *nur*

$$x, y, z, p, q$$

enthalten.

Im Nachfolgenden will ich jede Monge-Ampèresche Differentialgleichung, deren linke Seite der Bedingung (10) genügt, die *Normalform einer Variationsgleichung* nennen.

Für die Gleichung (1) ist die Bedingung (10) äquivalent mit den vier Gleichungen*)

$$(11)\quad \begin{cases} (\alpha) & N_x + pN_z + K_q - L_p = 0, \\ (\beta) & N_y + qN_z - H_q + K_p = 0, \\ (\gamma) & H_x + pH_z + K_y + qK_z - M_p = 0, \\ (\delta) & K_x + qK_z + L_y + qL_z - M_q = 0. \end{cases}$$

5. Ist $F = 0$ die Normalform einer Variationsgleichung, so wird es bei Berührungstransformationen nicht angezeigt sein, die transformierte Gleichung in der Weise zu schreiben, daß F gleich σF_1 wird. Es wäre dann nämlich $F_1 = 0$ im allgemeinen nicht mehr die Normalform einer Variationsgleichung. Setzen wir aber

$$F = \varrho\sigma F_1,$$

so ist**) auch $F_1 = 0$ wieder die Normalform einer Variationsgleichung.

Es wird dann natürlich auch $\sqrt{G}$ nicht mehr dem Produkte von ϱ und $\sqrt{G_1}$ gleich sein, sondern die Gleichung

$$\sqrt{G} = \varrho^2\sqrt{G_1}$$

gelten, die wir noch so schreiben wollen

$$(12)\qquad G_1^{-\frac{1}{4}} = \varrho\, G^{-\frac{1}{4}}.$$

Betrachten wir G als charakteristische Funktion einer infinitesimalen Berührungstransformation, so können wir mit Hilfe eines bekannten Satzes***) den Inhalt dieser Formel in der folgenden Weise ausdrücken:

Ist die Monge-Ampèresche Differentialgleichung $F = 0$ *die Normalform einer Variationsgleichung und schreiben wir nach jeder Berührungstransformation die durch sie erhaltene Gleichung in der Gestalt, daß*

$$F = \varrho\sigma F_1$$

*) A. Hirsch, l. c. Formeln (48) auf Seite 67.

**) J. Kürschák, *Über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung.* Math. Annalen Bd. 56 (1903), S. 155—164.

***) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen.* Zweiter Abschnitt. Leipzig 1890. Seite 276.

wird und somit $F_1 = 0$ wieder die Normalform einer Variationsgleichung darstellt, so ist die Gleichung $F = 0$ mit der durch die charakteristische Funktion

$$G^{-\frac{1}{4}}$$

bestimmten infinitesimalen Berührungstransformation bei allen Berührungstransformationen invariant verknüpft.

Dieser Satz erleichtert das Studium der intermediären Integrale von $F = 0$ sehr, wie wir im folgenden sehen werden.

6. *Ist die Monge-Ampèresche Differentialgleichung $F = 0$ die Normalform einer Variationsgleichung, und ist $G \neq 0$, so kann*

$$u(x, y, z, p, q) = a$$

nur dann ein intermediäres Integral von $F = 0$ sein, wenn die Funktion u die infinitesimale Berührungstransformation $G^{-\frac{1}{4}}$ zuläßt.

Zufolge des soeben bewiesenen Satzes können wir uns auf den Fall $G = 1$ beschränken. Die infinitesimale Berührungstransformation $G^{-\frac{1}{4}}$ kann nämlich stets durch eine passende Berührungstransformation in diejenige infinitesimale Berührungstransformation übergeführt werden, deren charakteristische Funktion gleich 1 ist. Dabei erhalten wir, wie wir soeben erfahren haben, aus $F = 0$ die Normalform einer Variationsgleichung, für die $G_1 = 1$ ist; die intermediären Integrale ergeben aber wieder intermediäre Integrale.

Außerdem können wir $N \neq 0$ voraussetzen. Denn wäre $N = 0$, so kann dieser Umstand mit Hilfe einer Berührungstransformation, für die $\varrho = 1$ ist, aufgehoben werden. Damit haben wir zugleich erreicht, daß $F = 0$ nur solche intermediäre Integrale besitzen kann, die wenigstens eine Ableitung von z enthalten. Wäre nämlich

$$u(x, y, z) = a$$

ein intermediäres Integral, dessen linke Seite sich in der Umgebung des Punktes $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ regulär verhält, so wäre wenigstens in dieser Umgebung jeder Punkt ein Integralpunkt von $F = 0$. Dann müßte aber $F = 0$ eine lineare Monge-Ampèresche Gleichung sein.

Unter diesen Voraussetzungen ist bekanntlich $u = a$ dann und nur dann ein intermediäres Integral, wenn u einem der beiden Systeme genügt, die wir aus

$$(13) \qquad \begin{cases} A(u) = u_x + pu_z - \dfrac{L}{N} u_p + \dfrac{K + \sqrt{G}}{N} u_q = 0, \\ B(u) = u_y + qu_z + \dfrac{K - \sqrt{G}}{N} u_p - \dfrac{H}{N} u_q = 0 \end{cases}$$

dadurch erhalten, daß wir $\sqrt{G} = 1$ oder aber $\sqrt{G} = -1$ einsetzen. Aus $A(u) = 0$ und $B(u) = 0$ folgt aber auch

$$A(B(u)) - B(A(u)) =$$

$$\left(A\left(\frac{K-\sqrt{G}}{N}\right) + B\left(\frac{L}{N}\right)\right)u_p - \left(A\left(\frac{H}{N}\right) + B\left(\frac{K+\sqrt{G}}{N}\right)\right)u_q + (A(q) - B(p))u_s = 0. \tag{14}$$

Multiplizieren wir den Koeffizienten von u_p mit N^2, so ergibt sich

$$NA(K) + NB(L) - (K-\sqrt{G})A(N) - LB(N),$$

wo

$$NA(K) + NB(L) = N(K_x + pK_z) - LK_p + (K+\sqrt{G})K_q + N(L_y + qL_z) + (K-\sqrt{G})L_p - HL_q$$

und

$$(K-\sqrt{G})A(N) + LB(N)$$
$$= (K-\sqrt{G})\left(N_x + pN_z - \frac{L}{N}N_p\right) + \frac{K^2-G}{N}N_q$$
$$+ L\left(N_y + qN_z - \frac{K-\sqrt{G}}{N}N_p\right) - \frac{H}{N}N_q$$
$$= (K-\sqrt{G})(N_x + pN_z) + L(N_y + qN_z) - MN_q.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (11) lassen sich die soeben berechneten Ausdrücke auch so schreiben:

$$NA(K) + NB(L) = NM_q - LK_p + (K+\sqrt{G})K_q + (K-\sqrt{G})L_p - HL_q$$

und

$$(K-\sqrt{G})A(N) + LB(N) = (K-\sqrt{G})(L_p - K_q) + L(H_q - K_p) - MN_q.$$

Es ist also

$$N^2A\left(\frac{K-\sqrt{G}}{N}\right) + N^2B\left(\frac{L}{N}\right)$$
$$= 2KK_q - HL_q - LH_q + MN_q + NM_q = \frac{\partial G}{\partial q} = 0.$$

In ähnlicher Weise ist

$$A\left(\frac{H}{N}\right) + B\left(\frac{K+\sqrt{G}}{N}\right) = 0.$$

Endlich haben wir

$$A(q) = \frac{K+\sqrt{G}}{N}, \quad B(p) = \frac{K-\sqrt{G}}{N}.$$

Es ist demnach

$$A(B(u)) - B(A(u)) = \frac{2\sqrt{G}}{N}u_z,$$

so daß die Gleichung (14) der folgenden äquivalent ist

$$u_z = 0. \tag{15}$$

Diese Gleichung besagt aber eben, daß u die infinitesimale Berührungstransformation

$$G^{-\frac{1}{4}} = 1$$

zuläßt.

7. *Ist $F = 0$ die Normalform einer Variationsgleichung und $G \neq 0$, so kann die vorgelegte Monge-Ampèresche Differentialgleichung nur dann ein allgemeines intermediäres Integral von der Gestalt*

$$v - \varphi(u) = 0$$

besitzen, wenn sie die infinitesimale Berührungstransformation $G^{-\frac{1}{4}}$ zuläßt. Hier sind u und v Funktionen von x, y, z, p, q; φ bedeutet eine willkürliche Funktion.

Es muß nämlich sowohl u wie auch v die besagte infinitesimale Berührungstransformation zulassen. Durch u und v ist aber F bis auf einen Faktor, der nur x, y, z, p, q enthält, vollkommen bestimmt. Also muß auch die Gleichung $F = 0$ selbst die infinitesimale Berührungstransformation zulassen.

Diese Bedingung ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Existenz von $v - \varphi(u) = 0$. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Ist $F = 0$ die Normalform einer Variationsgleichung, für die $G \neq 0$, und läßt die vorgelegte Differentialgleichung die infinitesimale Berührungstransformation $G^{-\frac{1}{4}}$ zu, so hat $F = 0$ zwei distinkte allgemeine intermediäre Integrale von der Gestalt

$$v - \varphi(u) = 0.$$

Bei dem Beweise dieses Satzes dürfen und wollen wir uns wieder auf den Fall $G = 1$, $N \neq 0$ beschränken. Läßt nun $F = 0$ die infinitesimale Berührungstransformation zu, deren charakteristische Funktion gleich 1 ist, so müssen

$$\frac{H}{N}, \frac{K}{N}, \frac{L}{N}, \frac{M}{N}$$

von z frei sein. (Das ist wegen $G = 1$ nur möglich, wenn bereits

$$H, K, L, M, N$$

z nicht enthalten.) Daraus folgt dann weiter, daß das System (13) nach Hinzufügung der Gleichung $u_z = 0$ in ein *vollständiges System* übergeht. Dieses System besitzt also sowohl im Falle $\sqrt{G} = 1$ wie auch im Falle $\sqrt{G} = -1$ je zwei unabhängige Lösungen: u_1, v_1; u_2, v_2. Demnach besitzt $F = 0$ im betrachteten Falle wirklich die intermediären Integrale

$$v_1 - \varphi_1(u_1) = 0, \qquad v_2 - \varphi_2(u_2) = 0.$$

Budapest, den 3. November 1904.

Untersuchungen aus der Mengenlehre*).

Von

Felix Bernstein in Halle a./S.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 118

Erstes Kapitel.

Über die allgemeinen Eigenschaften der Mengen.

§ 1. Der Äquivalenzsatz 120
§ 2. Die Division der Mengen durch endliche Zahlen 121
§ 3. Über die Ungleichungen der Mengenlehre 129
§ 4. Über die Vergleichbarkeit der Mengen 131
§ 5. Anwendungen auf das Kontinuum 133

Zweites Kapitel.

Das Kontinuum und die Ordnungstypen.

§ 6. Ein Satz von G. Cantor 134
§ 7. Ordnungstypen und Ordnungsfunktionen 138
§ 8. Beweis des Satzes 1 (§ 6) auf Grund der Eigenschaften der Ordnungsfunktionen 140
§ 9. Verallgemeinerung und zweiter Beweis des Satzes 1 (§ 6) 143

Drittes Kapitel.

Die Mengen im Kontinuum und das Ultrakontinuum.

§ 10. Die Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen 146
§ 11. Die Mengen erster und zweiter Kategorie 149
§ 12. Das Ultrakontinuum 150

*) Der gegenwärtige Abdruck meiner Inaugural-Dissertation, die im Jahre 1901 erschienen ist, ist bis auf einige Verbesserungen und Bemerkungen hinsichtlich der seitdem erschienenen Arbeiten, die auf den Gegenstand Bezug haben, eine unveränderte Wiedergabe des bisherigen Textes.

Einleitung.

Gegenwärtig stehen zwei Probleme innerhalb der Mengenlehre im Vordergrund des Interesses. Das eine bezieht sich auf das *Kontinuum*, d. h. die Menge, welche aus allen reellen Zahlen besteht, das andere bezieht sich auf die *Grundlagen* der Mengenlehre.

Das erste ist bereits im Jahre 1873 von dem Schöpfer dieser Disziplin G. Cantor*) in seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand gestellt worden. Es beruht auf der dort gezeigten Tatsache, daß es zwar möglich ist, jeder reellen *algebraischen* Zahl eine bestimmte, für sie völlig charakteristische natürliche Zahl zuzuordnen, daß es aber unmöglich ist, auf diese Weise *alle* reellen Zahlen mit den ganzen rationalen Zahlen in eine umkehrbar eindeutige Beziehung zu setzen. Bezeichnet man zwei aus irgend welchen Dingen bestehende Mengen, welche aufeinander umkehrbar eindeutig abbildbar sind, als *äquivalent* oder von *gleicher Mächtigkeit*, und rechnet man alle äquivalenten Mengen in eine Klasse, so drängt sich sofort die Frage auf:

„Wieviel verschiedene Klassen dieser Art kann man aus reellen Zahlen bilden?“

Das ist das Cantorsche Kontinuumproblem.

Es ist für einen großen Teil der bisherigen Forschungen in der Mengenlehre der Leitstern gewesen. Zur Inangriffnahme desselben boten sich naturgemäß zwei verschiedene Wege dar.

Erstens konnte man hoffen, durch Untersuchung der speziellen verschiedenartigen Mengen, die sich im Kontinuum darbieten, für immer umfassendere Gebiete von Mengen die Frage nach der Zahl der Klassen zu lösen, und so durch eine *Art vollständiger Induktion* des Problems Herr zu werden.

Das wichtigste Resultat nach dieser Richtung ist der Satz von G. Cantor:

Alle *abgeschlossenen* Mengen, d. h. alle diejenigen Mengen, welche ihre Grenzelemente enthalten, sind entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.

G. Cantor hat die Vermutung ausgesprochen, daß für alle Mengen im Kontinuum das gleiche Resultat zu erwarten sei. Es hat dies jedoch bis jetzt nicht bewiesen werden können. Die Hauptschwierigkeit der Untersuchung bieten die *in sich dichten* Mengen, diejenigen, bei denen

*) Hinsichtlich der Literatur verweise ich sowohl auf die Originalabhandlungen G. Cantors als auf das zusammenfassende Referat von A. Schönflies, Jahresberichte d. d. Mathvgg. 1900 Bd. 8, H. 2.

jeder Punkt Grenzpunkt von Punkten der Menge ist. Hier hat eine neuerdings von Baire getroffene Unterscheidung in Mengen erster und zweiter Kategorie mannigfaches Interesse.

Der zweite Weg, der ebenfalls von G. Cantor eingeschlagen wurde, geht von der Menge der natürlichen Zahlen aus. Es gelingt von hier aus neue Mengen zu konstruieren, welche sich in bezug auf ihre Mächtigkeit als die unmittelbare Fortsetzung der erstgenannten Menge erweisen. Man gelangt zu einer ganzen *Reihe von ansteigenden Mächtigkeiten*, die sich in *lückenloser* Folge unbegrenzt aneinander schließen, der Reihe der sog. *Aleph*. Das Kontinuumproblem spitzt sich hier insbesondere auf die Frage zu, die Beziehung der auf die abzählbare Mächtigkeit *zunächst* folgenden, mit Aleph-Eins bezeichneten Menge zum Kontinuum festzustellen. —

Die Untersuchung der *Grundlagen* der Mengenlehre ist aus verschiedenen Gründen zum Bedürfnis geworden.

Mit allen Disziplinen, die sich im Anfang ihrer Entwicklung befinden, teilt die Mengenlehre das Schicksal, daß der Fortschritt in ihr mehr durch sinnreiche Einfälle als durch systematische Methoden erzielt wird. Zwar sind auch in der letzteren Richtung bemerkenswerte Ansätze vorhanden. Die Einführung des *Potenzbegriffes*, der Beweis des später noch zu erwähnenden *Äquivalenzsatzes* haben es gestattet, Schlüsse, die früher nur auf mühsamen Umwegen erreichbar waren, jetzt in einem fast elementaren Kalkül zu erlangen.

Um diesem Kalkül die wünschenswerte Abrundung zu verleihen, ist es notwendig, *diejenigen voneinander unabhängigen Sätze in möglichst vollständiger Zahl aufzustellen und zu beweisen, welche für alle Mengen Gültigkeit haben.*

Die in die neueste Zeit fallende Entdeckung von Mengen, wie z. B. der Menge aller Ordnungszahlen, welche sich in wesentlichen Punkten den für alle Mengen bisher als richtig angesehenen Gesetzen nicht fügen, verleiht den Sätzen, welche für alle Mengen *ohne* Ausnahme gelten, ein wichtiges *theoretisches* Interesse. Besonders fällt hierbei ins Gewicht, daß die Frage noch offen ist, ob das Kontinuum zu den jüngst untersuchten Mengen hinzugehört oder nicht. —

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Teile.

Im ersten Teil beschäftige ich mich mit Fragen, welche den Grundlagen angehören. Insbesondere beweise ich den allgemeinen Satz, *daß die Teilung der Menge in eine endliche Anzahl von gleichen Teilen im Sinne der Mächtigkeit eindeutig ist.* Hieraus fließt die Erkenntnis, daß das Kontinuum durch fortgesetzte endliche Teilung nicht verkleinert werden kann. Ferner läßt sich die Frage nach der *Addition der Ungleichungen* hieraus für *vergleichbare* Mengen erledigen.

Die Frage nach der Vergleichbarkeit von Mengen bietet außerordentliche Schwierigkeiten. Für gewisse Gebiete von Mengen, innerhalb deren Mengengleichungen gelten, läßt sich jedoch, wie ich ausführe, die Vergleichbarkeit allgemein zeigen.

Im zweiten Teil handelt es sich darum, das Kontinuum mit der Menge $\aleph_1$ in nähere Verbindung zu setzen. Dies geschieht durch einen Satz, welcher eine vollkommen *parallele Definition beider Mengen* aufzustellen gestattet. Die Zahlen der zweiten Zahlenklasse erfahren dabei eine *geometrisch-anschauliche* Deutung.

Im dritten Teil wird die Gesamtheit der Mengen, welche dem Kontinuum angehören und für die die Frage nach der Mächtigkeit gelöst werden kann, mit der Gesamtheit aller Teilmengen des Kontinuums verglichen. Es wird der Satz abgeleitet, *daß die Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen mit Hilfe der reellen Zahlen abgezählt werden kann.* Das Resultat des angestellten Vergleichs ergibt einen Maßstab der Beurteilung, wie weit man bisher in der Lösung des Kontinuumproblems auf diesem Wege gekommen ist.

Die Konstruktion eines höheren Typus für das Kontinuum soll zeigen, wie eine Erweiterung der bisherigen Resultate gewonnen werden kann.

Erstes Kapitel.

Über die allgemeinen Eigenschaften der Mengen.

§ 1.

Der Äquivalenzsatz.

Erklärung. Zwei Mengen M und N heißen dann *äquivalent* oder von gleicher *Mächtigkeit*, wenn es ein umkehrbar eindeutiges Beziehungsgesetz φ gibt, welches sie Element für Element aufeinander abbildet (G. Cantor*)). Unter einer *Teilmenge* einer Menge M versteht man eine Menge, deren Elemente sämtlich der Menge M angehören. Sind M und N zwei beliebige Mengen, so sind logisch die folgenden vier Fälle möglich:

1) Es ist M äquivalent einer Teilmenge N_1 von N, dagegen N keiner Teilmenge von M, in Zeichen:
$$N > M.$$

2) Es ist N äquivalent einer Teilmenge M_1 von M, dagegen M keiner Teilmenge von N, in Zeichen:
$$M > N.$$

*) G. Cantor, Journ. f. Math. Bd. 84, S. 242.

3) Es ist M äquivalent einer Teilmenge M_1 von N und ebenso N äquivalent einer Teilmenge N_1 von M.

4) Es ist M äquivalent keiner Teilmenge von N und N keiner Teilmenge von M.

Hinsichtlich des dritten Falles gilt der folgende Satz:

Satz 1. Ist M äquivalent einem Teile M_1 von N und N einem Teile N_1 von M, so ist M äquivalent N.

Dieser Satz ist zuerst von G. Cantor*) behauptet worden und wird auf seinen Vorschlag als *Äquivalenzsatz* der Mengenlehre bezeichnet. Bewiesen wurde derselbe unabhängig von E. Schröder**) und mir.***) Einen Beweis gibt ferner E. Zermelo.†) Auf eine Besonderheit des Beweises sei noch hingewiesen. Ist φ die Abbildung von M auf M_1 und ψ die Abbildung von N auf N_1, so wird die Abbildung χ von M auf N *eindeutig* aus φ und ψ hergeleitet. Ist eine Menge $\Phi = \{\varphi\}$ und eine Menge $\Psi = \{\psi\}$ von Abbildungen φ und ψ gegeben, so entspricht jeder Kombination von φ und ψ eine Abbildung χ, so daß eine Menge $X = \{\chi\}$ entsteht, von der Art, daß für die Kardinalzahlen die Beziehung

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\Phi}} \cdot \overline{\overline{\Psi}}$$

gilt.

§ 2.

Die Division der Mengen durch endliche Zahlen.

Vorbemerkung. Es gelten die folgenden Definitionen und Sätze (G. Cantor):

1. Sind M und N zwei Mengen und nennt man diejenige Menge, welche sowohl die Elemente von M als die von N enthält, die *Summe* $M + N$ dieser Mengen, so ist

$$M + N = N + M. \tag{1}$$

2. Sind M und N zwei Mengen, so nennt man diejenige Menge, welche alle Kombinationen (m, n) der Elemente m und n der beiden Mengen enthält, das *Produkt* $M \cdot N$ dieser Mengen; es ist

$$M \cdot N = N \cdot M. \tag{2}$$

3. Sind M und N zwei Mengen, so nennt man diejenige Menge, welche — im Sinne einer bekannten Ausdrucksweise — alle Kombina-

*) G. Cantor, Ztschr. f. Philosophie Bd. 91.

**) E. Schröder, Jahresb. d. d. Mathvgg. Bd. 5 (S. 81).

***) Vgl. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions. Eine Darstellung meines Beweises findet sich in dem Referat von Schönflies, Jahresb. d. d. Mathvgg. Bd. 8, Hft. 2.

†) E. Zermelo, Gött. Nachr. 1901, p. 1—5.

tionen von Elementen aus M zur N^{ten} Klasse enthält, die *Potenz* M^N (M hoch N). —

Es gelten hinsichtlich des aufgestellten Additions-, Multiplikations- und Potenzbegriffes das assoziative und kommutative Gesetz, wie bei endlichen Zahlen.

Wir untersuchen jetzt die *inversen* Operationen und stellen den folgenden die Division betreffenden Satz auf.

Satz 2. *Aus der Gleichung*

$$2M = 2N$$

folgt

$$M = N.$$

Dem Beweise schicken wir eine Reihe leicht zu beweisender Hilfssätze über umkehrbar eindeutige Abbildungen voraus.

Hilfssatz 1. Die umkehrbar eindeutigen Abbildungen eines Systems S in sich bilden eine *Gruppe* Φ_S.

Hilfssatz 2. Es sei eine Reihe von umkehrbar eindeutigen Abbildungen vorgelegt,

(1) $$1, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \cdots$$

und es mögen dieselben eine Gruppe bilden, d. h. es sei

(2) $$\chi_\mu \cdot \chi_\nu = \chi_\varrho;$$

ferner möge es zu jedem χ_μ *ein und nur ein* χ'_μ geben, so daß

(3) $$\chi_\mu \cdot \chi'_\mu = 1$$

ist (wo 1 die identische Abbildung bedeutet).

Ist nun s ein Element von S, für welches

(4) $$s \neq \chi_\nu(s) \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so ist

(5) $$\chi_\mu(s) \neq \chi_\nu(s) \quad (\nu \neq \mu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Hilfsatz 3. Sei $s \neq s'$ und sei

(6) $$s \neq \chi_\nu(s') \text{ für } \nu = 1, 2, 3, \cdots,$$

so ist auch

(7) $$\chi_\mu(s) \neq \chi_\nu(s') \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Denn aus

(8) $$\chi_\mu(s) \neq \chi_\nu(s')$$

folgt durch Multiplikation mit χ'_μ

$$s = \chi_\nu \cdot \chi'_\mu(s') = \chi_\varrho(s').$$

Erklärung. Sind

$$T_1, T_2, T_3, \cdots$$

eine Reihe von Teilmengen des Systems S, von denen keine mit einer andern ein Element gemeinsam hat, so nenne ich sie ein *getrenntes System* von Teilmengen.

Hilfssatz 4. Ist $T = (t)$ eine Teilmenge von S, und ist stets

$$t + \chi_\nu(t') \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots;\ t + t'), \tag{9}$$

so bilden die äquivalenten Teilmengen

$$T, \chi_1(T), \chi_2(T), \cdots \tag{10}$$

ein *getrenntes System.*

Hilfssatz 5. Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes ist

$$S = S + T. \tag{11}$$

Denn bezeichnet man mit $\aleph_0$ die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen, so entsteht durch wiederholte Anwendung der Gleichung (11) eine Zerlegung von der Form:

$$S = T \cdot \aleph_0 + R;$$

also ist

$$T + S = T(\aleph_0 + 1) + R = T\aleph_0 + R,$$

mithin

$$S = S + T.$$

Beweis des Satzes 2. Wir schreiben die Voraussetzungen in der Form

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ S = x_1 + x_2 = x_3 + x_4, \\ &\text{b)}\ x_1 = x_2, \\ &\text{c)}\ x_3 = x_4. \end{aligned} \tag{12}$$

Die den Gleichheitszeichen entsprechenden Abbildungen können als umkehrbar eindeutige Abbildungen des Systems S in sich aufgefaßt werden, wir bezeichnen sie mit $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$. Wie unmittelbar ersichtlich, ist

$$\varphi_a^2 = \varphi_b^2 = \varphi_c^2 = 1. \tag{13}$$

Wie die nachstehende Figur veranschaulicht, zerfallen gemäß der Gleichung (12a) die x in der folgenden Weise:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{13} + x_{14}, \\ x_2 &= x_{23} + x_{24}, \\ x_3 &= x_{31} + x_{32}, \\ x_4 &= x_{41} + x_{42}, \end{aligned} \qquad \text{wo } x_{ik} = x_{ki}. \tag{14}$$

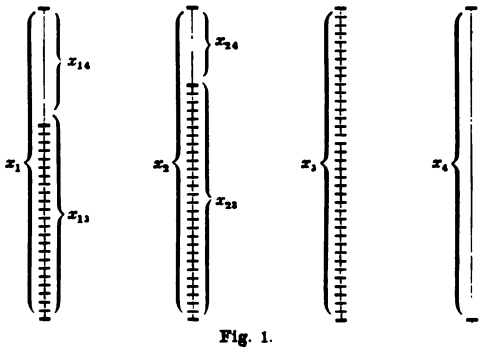


Fig. 1.

Bedeutet T_1 irgend eine Teilmenge von x_1 und T_2 eine äquivalente von x_2, *so kann man* x_1 *und* x_2 *dadurch transformieren, daß man die Elemente von* T_1 *gegen die von* T_2 *austauscht.* Es gelten für die transformierten x_1^* und x_2^* die Beziehung (12) sowie die Gleichungen

$$(14^*) \qquad \begin{matrix} x_1^* \sim x_1, \\ x_2^* \sim x_2; \end{matrix} \quad \text{und ebenso} \quad \begin{matrix} x_3^* \sim x_3, \\ x_4^* \sim x_4. \end{matrix}$$

Es ist also ausreichend, den Satz 2 für die x_1^*, x_2^* zu beweisen, um den Rückschluß auf die x_1 und x_2 machen zu können. In gleicher Weise gestatten auch die Mengen x_3 und x_4 solche Austauschtransformationen.

Das Ziel des Beweises ist, zu zeigen, daß wir nach geeigneten Transformationen eine solche Zerlegung der Form (14) bekommen, daß x_{13} sowohl gegen x_{14} als gegen x_{23} zu vernachlässigen ist, d. h. daß

$$x_1 = x_{13} + x_{14} \sim x_{14}$$

und

$$x_3 = x_{13} + x_{23} \sim x_{23}$$

ist. Denn hieraus folgen die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = x_{14},$$

$$x_3 = x_4 = x_{23}.$$

Damit sind aber für die Mengen x_2 und x_4 die Voraussetzungen des Äquivalenzsatzes gegeben. Es kann daher der Schluß

$$x_2 = x_4,$$

welcher die Behauptung enthält, gezogen werden.

Wir suchen zu unserem Zwecke die Menge x_{13} mit x_{14} und x_{23} in geeignete Beziehung zu setzen. Hierzu bilden wir aus den Abbildungen φ_b und φ_c alle möglichen Zusammensetzungen, die wir in zwei Reihen so anordnen:

$$(15) \qquad \begin{matrix} 1 = \chi_0, \ \varphi_b = \chi_2, \ \varphi_b\varphi_c = \chi_4, \ \varphi_b\varphi_c\varphi_b = \chi_6, \cdots \\ \varphi_c = \chi_3, \ \varphi_c\varphi_b = \chi_5, \ \varphi_c\varphi_b\varphi_c = \chi_7, \cdots \end{matrix}$$

Zu jeder Abbildung χ gibt es *eine* und *nur eine* inverse, denn es ist unter Berücksichtigung von (13)

$$(16) \qquad \begin{matrix} \chi_{4n+2}\chi_{4n+2} = 1, \\ \chi_{4n}\chi_{4n+1} = 1, \\ \chi_{4n+3}\chi_{4n+3} = 1. \end{matrix}$$

Im übrigen liefert die Zusammensetzung von irgend welchen Abbildungen χ wieder eine Abbildung derselben Reihe, die von 1 verschieden ist.

Es bilden infolge ihrer Entstehung die χ eine Gruppe von umkehrbar eindeutigen Abbildungen des Systems $S = x_1 + x_2$ in sich.

Es sind zwei Fälle hinsichtlich der Abbildung eines Elementes e_{13} von x_{13} möglich:

1) e_{13} wird durch eine Abbildung χ mit *endlichem* Index in ein Element von x_{24} übergeführt.

2) e_{13} wird *niemals* durch die Abbildungen der Reihe (15) in ein Element von x_{24} übergeführt.

Der wesentliche Gedanke besteht nun darin, *durch Austausch von Elementen aus x_{13} gegen Elemente von x_{24} es zu erreichen, daß lediglich der zweite Fall eintritt.*

Gesetzt nämlich, es trete für alle Elemente e_{13} der zweite Fall ein, so behaupte ich, daß die Bilder $\chi_{2\nu}(x_{13})$ (resp. $\chi_{2\nu+1}(x_{13})$) *abwechselnd* in x_{23} und x_{14} liegen, und dort ein *getrenntes System* von einfach unendlich vielen Teilmengen bilden. Hieraus folgt dann aber nach Hilfsatz 5, daß

$$x_{13} + x_{14} = x_{14},$$
$$x_{13} + x_{23} = x_{23}$$

ist, woraus, wie oben gezeigt, unser Satz resultiert.

In der Tat, durch die Abbildung χ_2 geht im zweiten Falle x_{13} *gänzlich* in x_{23} über. Durch x_4 gehen dann die Elemente von x_{23} in solche von x_{14} oder x_{24} über, mithin geht nach 2) $\chi_4(x_{13})$ in x_{14} auschließlich über.

Indem man so fortfährt zu schließen, gelangt man durch vollständige Induktion dahin, daß bei jeder Abbildung mit dem Index $4n$ die Menge x_{13} gänzlich in x_{23}, bei jeder Abbildung mit dem Index $4n+2$ die Menge x_{13} in x_{24} übergeht. Das ganz Analoge aber findet bei den Abbildungen χ_{4n+1} und χ_{4n+3} statt.

Die Reihe der Abbildungen χ erfüllt schließlich die Bedingung, daß sie umkehrbar eindeutige Abbildungen des Systems S in sich sind, außerdem bilden sie den Teil einer Gruppe von solchen Abbildungen, wo es zu jedem Element ein und nur ein inverses Element der Gruppe gibt. Bedenkt man noch, daß die Bilder von x_{13} niemals auf x_{13} zurückfallen, so ergibt sich, daß die Anwendung der Hilfssätze 1 bis 5 erlaubt ist, was zu den gewünschten Schlußfolgerungen führt.

Wir gehen nunmehr zu dem allgemeineren Falle 1) über. Wir verstehen unter x'_{13} diejenigen Elemente von x_{13}, welche durch χ_1 in x_{24} übergehen. Unter x''_{13} ferner verstehen wir diejenigen von x'_{13} verschiedenen Elemente, welche durch χ_2 in solche Elemente von x_{24} übergehen, welche noch nicht durch die Abbildung χ_1 getroffen worden sind. In gleicher Weise definieren wir $x^{(3)}_{13}, \cdots, x^{(\nu)}_{13} \cdots$ Wir erhalten folgendes Schema:

$$(17)\quad \begin{cases} x'_{13}, & \chi_1(x'_{13}) & \text{in } x_{24}, \\ x'_{13} + x''_{13}, & \chi_1(x'_{13}) + \chi_2(x''_{13}) & \text{in } x_{24}, \\ x'_{13} + x''_{13} + x'''_{13}, & \chi_1(x'_{13}) + \chi_2(x''_{13}) + \chi_3(x^{(3)}_{13}) & \text{in } x_{24}, \\ x'_{13} + x''_{13} + \cdots + x^{(\nu)}_{13}, & \chi_1(x'_{13}) + \chi_2(x''_{13}) + \cdots + \chi_\nu(x^{(\nu)}_{13}) & \text{in } x_{24}. \end{cases}$$

Wir bilden nunmehr die äquivalenten Summen

$$\bar{x}_{13} = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_{13}^{(\nu)} \quad \text{und} \quad \bar{x}_{24} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \chi_\nu(x_{13}^{(\nu)}).$$

Nunmehr vollziehen wir einen Austausch von $\bar{x}_{13}$ gegen $\bar{x}_{24}$; setzen wir

(18) $$x_{13} = \bar{x}_{13} + \bar{\bar{x}}_{13} \qquad x_{24} = \bar{x}_{24} + \bar{\bar{x}}_{24}$$

und bezeichnen wir die transformierten x mit x^*, so wird

(19)
$$\begin{aligned} x_{13}^* &= \bar{\bar{x}}_{13} \\ x_{14}^* &= x_{14} + \bar{x}_{14} \\ x_{24}^* &= \bar{\bar{x}}_{24} \\ x_{23}^* &= x_{23} + \bar{x}_{13}. \end{aligned}$$

Die neuen x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^* entstehen dann gemäß der Formel (14). Nach den eingangs gemachten Bemerkungen haben wir uns jetzt nur noch mit diesen zu beschäftigen. Untersucht man jetzt das Verhalten von $x_{13}^* = \bar{\bar{x}}_{13}$ gegenüber den Abbildungen (15), so findet man, daß jetzt nur noch der zweite Fall eintreten kann.

Denn gesetzt, es ginge irgend ein Element von $x_{13}^* = \bar{\bar{x}}_{13}$ durch χ_ν in $x_{24}^* = \bar{\bar{x}}_{24}$ über, so träte das in Widerspruch mit der Definition von $x_{13}^{(\nu)}$, denn $x_{13}^{(\nu)}$ soll *alle* Elemente von x_{13} enthalten, welche verschieden sind von $x_{13}' \cdots x_{13}^{(\nu-1)}$ und in Elemente von x_{24} übergehen, die nicht in $\sum_{\varkappa=1}^{\nu-1} \chi_\varkappa(x_{13}^{(\varkappa)})$ liegen.

Sind die betrachteten Mengen *endlich*, so muß der nach der angegebenen Vorschrift vollzogene Austausch zur Folge haben, daß x_{13} und dann aber auch x_{24} völlig verschwunden sind. Dies kann man sich leicht veranschaulichen. Im allgemeinen Falle verfahren wir, wie bereits angegeben. Es resultiert

$$x_1^* = x_3^*$$

und da nach (14*)

$$x_1^* \sim x_1, \quad x_3^* \sim x_3$$

ist, so folgt

(20) $$x_1 = x_3 = x_2 = x_4.$$

Satz 3. *Aus*

$$n \cdot M \sim n \cdot N$$

folgt

$$M \sim N,$$

wenn n eine beliebige endliche Zahl bedeutet.

Der *Beweis* ist eine genaue Verallgemeinerung des soeben geführten. Die einzige Schwierigkeit beruht in der richtigen Wahl der Reihe der Abbildungen χ.

Setzt man entsprechend an:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ x_1 = x_2 = x_3 &= \cdots = x_n \\ y_1 = y_2 = y_3 &= \cdots = y_n \end{aligned}$$

und bezeichnet die Abbildungen der Reihe der x mit

$$\varphi_{12}, \varphi_{13}, \cdots, \text{ die der } y \text{ mit } \psi_{12}, \psi_{13}, \cdots,$$

bildet man ferner die Zerfällungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn}, \end{aligned}$$

so hat man zu zeigen, daß nach gehörigen Vertauschungen

$$(3)\qquad x_{11} = x_{11} + x_{12},$$

nach weiteren Vertauschungen

$$x_{11} = x_{11} + x_{13}$$

usw. wird. Indem man alle Vertauschungen auf einmal vornimmt, bekommt man dann

$$(4)\qquad x_{11} = x_{11} + x_{12} = x_{11} + x_{13} = x_{11} + x_{14} \cdots$$

Dies hat aber, wie man unmittelbar sieht, zur Folge, daß

$$x_1 = x_{11} \quad \text{d. h.} \quad \leq y_1$$

wird. Die Symmetrie der Voraussetzungen erlaubt, denselben Weg bei den y einzuschlagen. Man gelangt dadurch zu der Relation

$$(5)\qquad y_1 = y_{11}, \quad \text{d. h.} \quad \leq x_1,$$

und folgert daraus nach dem Äquivalenzsatz

$$(6)\qquad x_1 = y_1.$$

Um die Vertauschungen zu finden, welche zu der Gleichung (3) führen, hat man zu bilden

$$(7)\qquad \chi_0 = 1, \ \chi_1 = \varphi_{12}, \ \chi_2 = \varphi_{12}\psi_{12}, \ \chi_3 = \varphi_{12}\psi_{12}\varphi_{13}, \cdots$$

und dann nach dem Schema (17) so auszutauschen, daß die Bilder von x_{12} entweder in x_{22} oder in x_{11} zu liegen kommen.

Satz 4. *Aus*

$$2x = x + a$$

folgt

$$x \geq a.$$

Dieser Satz, der die *Subtraktion* behandelt, zeigt aufs deutlichste den Unterschied der Gesetze der transfiniten und der endlichen Mengen.

Beweis. Wir schreiben die Voraussetzungen in der Form

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_3 + x_4, \\ (1) \qquad x_1 &= x_2, \\ x_2 &= x_3. \end{aligned}$$

Die Abbildungen $\begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_1 \end{pmatrix}$ bezeichnen wir mit φ,

„ „ $\begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_3 x_2 \end{pmatrix}$ „ „ „ ψ.

Wir werden dieselben als Abbildungen des Systems (x_1, x_2, x_3) in sich auffassen.

Die Zerlegungen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{13} + x_{14}, \\ x_2 &= x_{23} + x_{24} \end{aligned}$$

veranschaulicht die nachstehende Figur.

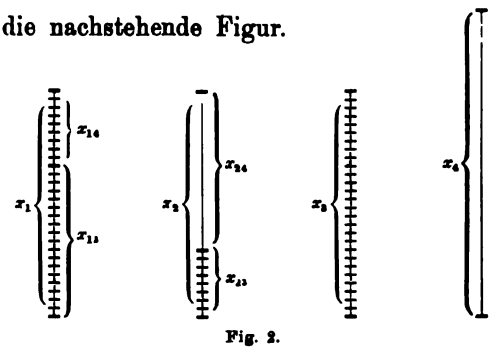


Fig. 2.

Wir bilden die Reihe der Abbildungen

$$\chi_0 = 1, \ \chi_1 = \varphi, \ \chi_2 = \varphi\psi, \ \chi_3 = \varphi\psi\varphi, \cdots$$

und unterscheiden zwei Fälle:

1) Es existieren in x_{14} Elemente e_{14}, welche durch eine Abbildung χ in x_{23} übergeführt werden.

2) Kein Element von x_{14} wird durch die Abbildungen χ in x_{23} übergeführt.

Im zweiten Falle erkennt man leicht, daß die Bilder

$$\chi_1(x_{14}), \ \chi_2(x_{14}), \cdots$$

abwechselnd in x_{13} und x_{24} liegen müssen. Letzteres hat dann (unter Hinzuziehung der Hilfssätze zu Satz 2) zur Folge, daß

$$(4) \qquad x_{14} + x_{24} = x_{24} = x_4$$

ist. Da x_{24} Teil von x_2 ist, so folgt also

$$x_2 \geq x_4,$$

d. h.

$$x \geq a.$$

Trifft der erste Fall zu, so führen wieder die dem Schema (17) entsprechenden Vertauschungen zu transformierten x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, und die für diese geltenden Beziehungen führen zu der Ungleichung

$$x_2^* \geq x_4^*,$$

welche wieder

$$x_2 \geq x_4,$$

$$x \geq a$$

nach sich zieht.

§ 3.

Über die Ungleichungen der Mengenlehre.

Erklärung 1. Nachdem der dritte der in § 1 bezüglich des Verhältnisses zweier Mengen M und N aufgestellten Fälle durch den Beweis des Äquivalenzsatzes erledigt ist, bedarf nur noch der vierte Fall

4) „M ist äquivalent keinem Teile von N und N keinem Teile von M“

einer Erläuterung.

Es ist bisher nicht gelungen, zu zeigen, daß dieser Fall bei den unendlichen Mengen ausgeschlossen ist. Man ist daher genötigt, bei gewissen Sätzen diesbezügliche Einschränkungen zu machen. Man bezeichnet das Statthaben resp. Nichtstatthaben desselben als *„Nichtvergleichbarkeit“* und *„Vergleichbarkeit“* der betreffenden Mengen.

Erklärung 2. Das *„Größer“* und *„Kleiner“* bei Mengen wird folgendermaßen definiert.

Tritt bei zwei Mengen M und N der erste Fall ein, so heißt

M kleiner als N,

in Zeichen

$$M < N.$$

Tritt hingegen der zweite Fall ein, so heißt

M größer als N,

in Zeichen

$$M > N.$$

Wir stellen nun das folgende Theorem auf:

Satz 1. *Sind a und b zwei Mengen, für die*

(1) $$a > b$$

gilt, und ist c eine weitere Menge, für die

(2) $$b \geq c$$

ist, so besteht die Ungleichung

(3) $$a + c > b + c.$$

Beweis. Wir schreiben die Voraussetzungen in der Form

(4) $$a = a' + a'' + a'''; \; b = a'' + a''', \; c = a'''.$$

Es ist jedenfalls

(5) $$a + c \geq b + c.$$

Das Gleichheitszeichen führt zum Widerspruch, denn sei

(6) $$a + c = b + c, \text{ d. h. } a' + (a'' + 2a''') = (a'' + 2a'''),$$

so folgt, indem man links für $(a'' + a''')$ seinen Wert $a' + (a'' + 2a''')$ einsetzt,

(7) $$2a' + a'' + 2a''' = a'' + 2a''';$$

durch Addition von a'' erhält man

(8) $$2(a' + a'' + a''') = 2(a'' + a'''),$$

d. h. $2a = 2b$ und dies erlaubt nach Satz 2 des vorigen Paragraphen auf $a = b$, also einen Widerspruch gegen die Gleichung (1), zu schließen. Es ist also in der Tat

$$a + c > b + c.$$

Satz 2. *Aus*

(1) $$a > b, \quad c > d$$

und aus der Beziehung

(2) $$b \text{ } \textit{vergleichbar mit } d,$$

$$\text{d. h. } b \gtrless d,$$

folgt

(3) $$a + c > b + d.$$

Beweis. Sei etwa

(4) $$b \geq d,$$

so folgt aus Satz 1

(5) $$a + d > b + d.$$

Ferner ist offenbar

(6) $$a + c \geq a + d,$$

also ist

$$a + c > b + d.$$

Satz 3. *Damit aus*

$$a > b; \quad c > d$$

folge

$$a + c > b + d,$$

ist es notwendig, daß b und d vergleichbar sind, oder solche nicht vergleichbare Mengen, für welche die Relation

$$2m > m$$

erfüllt ist.

Beweis. Gesetzt nämlich, es sind b und d solche unvergleichbare Mengen, für die außerdem

(1) $$2b = b, \quad 2d = d$$

ist. (Dieses letztere tritt beispielsweise ein, wenn $b = \aleph_0 b'$, $d = \aleph_0 d'$ ist.)

Dann setzen wir

$$a = b + d, \tag{2}$$
$$c = b + d,$$

dann ist sicher

$$a > b, \quad c > d.$$

Die Addition der Ungleichungen (2) liefert aber

$$a + c = (b + d)2 = b + d.$$

Bemerkung. Man kann mit Hilfe der im vorigen Paragraphen gegebenen Schlußweisen auch unmittelbar die Richtigkeit des Satzes 1 zeigen. Um dann den Satz 2 des § 1 zu zeigen, ist es nötig, aus

$$2x = 2a$$

die Vergleichbarkeit von x und a zu zeigen. Dies ist jedoch nur in speziellen Fällen $a = 2a$, $a = a^2$ usw. einfach.

§ 4.

Über die Vergleichbarkeit der Mengen.

Man kann auf die Vergleichbarkeit von Mengen M und N zuweilen aus Gleichungen schließen, die zwischen ihnen bestehen.

Satz 1. *Ist*

$$M + N = M \cdot N, \tag{1}$$

so ist

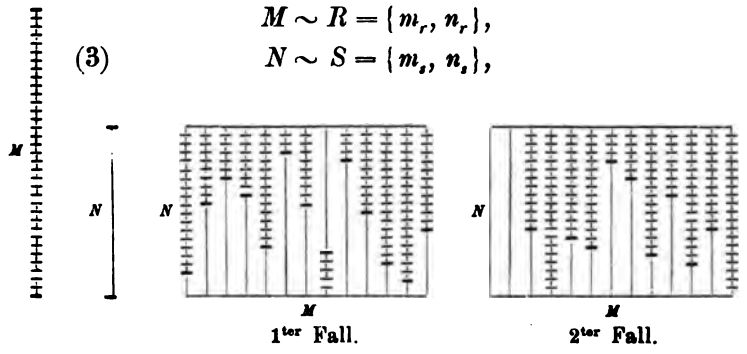
$$M \text{ vergleichbar } N.$$

Beweis. Wir setzen

$$M = \{m\}, \quad N = \{n\}. \tag{2}$$

Gemäß der Gleichung (1) zerfällt $M \cdot N$, wie die Figur veranschaulicht, in zwei Teile R und S. Wir setzen

$$M \sim R = \{m_r, n_r\}, \tag{3}$$
$$N \sim S = \{m_s, n_s\},$$



1ter Fall. 2ter Fall.

Es können nun zwei Fälle eintreten.

1. Es gibt für jeden Wert von m_r mindestens ein (m_r, n_r'), welches

nicht in R vorkommt. In diesem Falle gehört eine Menge $M \sim \{m_r, n'_r\}$, wo m_r alle Werte von M durchläuft, zu S. Sie bildet also eine Teilmenge derselben. Es ist mithin

$$M \leq S, \quad \text{d. h.} \quad M \leq N.$$

2. Es gibt einen Wert von m_r, m_r^*, so daß alle $\{m_r^*, n_r\}$, wo n_r die Werte von N durchläuft, zu R gehören. Es ist also

$$N \sim \{m_r^*, n_r\} \text{ eine Teilmenge von } R.$$

Mithin ist

$$N \leq R, \quad \text{d. i.} \quad N \leq M.^*)$$

Erklärung 1. Ein System S von Mengen derart, daß die Summe zweier Mengen des Systems wieder dem System angehört, heiße ein *vollständiges* System.

Erklärung 2. Ein System S von Mengen, welche alle untereinander vergleichbar sind, heiße ein *Bereich* von Mengen.

Satz 2. *Gilt für jede Menge M eines vollständigen Systems S von Mengen die Gleichung*

$$M^2 = M, \tag{1}$$

so bildet S einen Bereich.

Beweis. Seien a und b zwei Mengen des Systems S, so ist

$$a^2 + 2a \cdot b + b^2 = a + 2a \cdot b + b = a(1+b) + b(1+a). \tag{2}$$

Ferner folgt unter Benutzung des Äquivalenzsatzes aus

$$a^2 = a, \qquad b^2 = b,$$

und

$$2a > a^2, \qquad b^2 \leq 2b,$$

$$2a \leq a \cdot a, \qquad b \cdot b > 2 \cdot b$$

die Beziehung

$$a = a^2 = 2a, \qquad b = b^2 = 2b$$

und aus demselben Grunde

$$a = a + 1, \quad b = b + 1;$$

also ist

$$a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 2 \cdot a \cdot b = a \cdot b. \tag{3}$$

Andrerseits ist $(a+b)$ eine Menge des Systems S, also ist

$$a^2 + 2a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 = a + b, \tag{4}$$

*) Wie Herr Beppo Levi, Intorno alla teoria degli aggregati (Lomb. Ist. Rend. II, 35, p. 863) mit Recht bemerkt, wird hier von dem folgenden Schluß Gebrauch gemacht: Es zerfalle eine Menge A in Teilmengen s, von denen nicht zwei ein Element gemein haben; es sei $S = \{s\}$ die Menge dieser Teilmengen. Dann gibt es wenigstens eine Teilmenge von A, welche äquivalent S ist. Über die Bedeutung dieses Schlusses siehe ferner: F. Bernstein, Bemerkung zur Mengenlehre (Gött. Nachr. 1904, pg. 6).

mithin

$$a + b = a \cdot b, \tag{5}$$

woraus nach Satz I die Behauptung folgt.

§ 5.

Anwendungen auf das Kontinuum.

Die in Paragraph 1—4 bewiesenen Sätze beruhen lediglich auf den Eigenschaften der umkehrbar eindeutigen Abbildung. Sie haben daher für *alle* Mengen, gleichgültig welche Eigenschaften ihnen sonst zukommen, Gültigkeit. Dies hat namentlich Bedeutung für diejenigen Mengen, von denen nicht bewiesen ist, daß sie in wohlgeordnete Form gebracht werden können. Insbesondere erhalten wir für das Kontinuum den folgenden neuen Satz.

Satz 1. *Teilt man das Kontinuum in eine endliche Anzahl gleicher Teilmengen, so ist jede dieser Teilmengen gleich dem Kontinuum.**)

Es kann also das Kontinuum durch fortgesetzte endliche Teilungen nicht verkleinert werden.

Beweis. Bezeichnet c die Mächtigkeit des Kontinuums, so ist also

$$n \cdot x = c \tag{1}$$

und da

$$c = n \cdot c$$

$$nx = nc,$$

also nach § 1, Satz 3

$$x = c.$$

Des Interesses halber, welches der Satz 1 bietet, füge ich noch den folgenden einfachen Beweis desselben hinzu.

Hilfssatz. Aus

$$x^2 = 2y, \quad x > y \tag{2}$$

folgt

$$x = y.$$

Denn schreiben wir (2) in der Form

$$x \cdot x' = y + y,$$

so erkennt man mittels des in § 3, Satz 1 angewandten Verfahrens, daß entweder

$$y \geq x, \tag{3}$$

oder

$$y \geq x' = x$$

*) Diese Teilmengen sind nicht als Intervalle, sondern als ganz unregelmäßig verteilte Punktmengen vorzustellen.

ist. In Verbindung mit (2) ergibt dies

$$y = x.$$

Wir führen der Einfachheit halber den Beweis des Satzes 1 für den Fall $n = 2$. Es sei

$$2x = c. \tag{4}$$

Offenbar ist

$$x^4 = x^3 \cdot x \geq 2x \geq c. \tag{5}$$

Wir betrachten $16x^4$. Einerseits ist

$$16x^4 = c^4 = c.$$

Andrerseits ist

$$16x^4 \geq x^4 \quad \text{also} \quad c \geq x^4. \tag{6}$$

Es ist also nach (5) und (6)

$$c \geq x^4 \geq c,$$

d. h. es ist nach dem Äquivalenzsatz

$$x^4 = c = 2x. \tag{7}$$

Wir wenden jetzt die Formel des Hilfssatzes an, und erhalten so

$$x = x^2. \tag{8}$$

Es ist nun

$$x < 2x \leq x \cdot x,$$

also nach (8)

$$x = 2x = c.$$

Der Beweis, der hier geführt ist, benutzt allein die Eigenschaft des Kontinuums, daß es seinem Quadrat äquivalent ist. *Er hat für alle Mengen, für die $M^2 = M$ ist, Gültigkeit.*

Zweites Kapitel.

Das Kontinuum und die Ordnungstypen.

§ 6.

Ein Satz von G. Cantor.

Für das folgende bedürfen wir eines von G. Cantor herrührenden bisher unpublizierten Theorems. Dasselbe verdanke ich einer freundlichen persönlichen Mitteilung des Autors. Wir schicken die folgenden Erläuterungen voraus.

Erklärung 1. Ist eine *abzählbare* Menge M einfach geordnet, d. h. gilt für die Ordnung der Elemente das Gesetz:

$$\text{aus} \quad a > b \quad \text{und} \quad b > c \quad \text{folgt} \quad a > c,$$

so gehört zu ihr ein ganz bestimmter *Ordnungstypus* μ. Derselbe entsteht, wenn man von der individuellen Beschaffenheit der Elemente abstrahiert. Zu allen abzählbaren, einfach geordneten Mengen, welche auf die vorgelegte Menge ähnlich d. h. unter Aufrechterhaltung der Rangbeziehung der Elemente, abgebildet werden können, gehört derselbe Ordnungstypus μ.

Der Satz von Cantor bezieht sich nun auf die Menge $O = \{\mu\}$, welche aus *allen* einfach geordneten Typen erster Mächtigkeit besteht, und setzt die Mächtigkeit derselben in Vergleich mit der des Kontinuums d. h. des Inbegriffs aller reellen Zahlen. Er lautet:

Theorem I. *Das Kontinuum ist äquivalent einer Teilmenge der Menge* $O = \{\mu\}$ *aller einfach geordneten Typen erster Mächtigkeit.*

Beweis. Man denke sich die reellen Zahlen etwa im dyadischen Zahlsystem dargestellt. Diese Darstellung ist eindeutig, bis auf eine für Mächtigkeitsfragen irrelevante Menge erster Mächtigkeit. Das Kontinuum sei durch die Zahlen der Einheitsstrecke repräsentiert. Jeder reellen Zahl x zwischen 0 und 1 entspricht dann eine einfach unendliche Folge von Nullen und Einsen. Diese umkehrbar eindeutige Beziehung schreiben wir symbolisch

$$x = (\mu_1, \mu_2, \cdots), \tag{1}$$

wo $\mu_1, \mu_2, \cdots$ Nullen oder Einsen bedeuten.

Wir erinnern ferner an die bekannten und leicht zu erweisenden Eigenschaften*) des Ordnungstypus ω der Reihe der natürlichen Zahlen. Versteht man unter ν eine endliche ganze Zahl, unter $\nu + \omega$ denjenigen Ordnungstypus, den man erhält, wenn man den Elementen von ω noch ν einfach geordnete Elemente vorausschickt, so ist

$$\nu + \omega = \omega.$$

Bei entsprechender Bedeutung des Summenzeichens erkennt man, daß

$$\omega + \nu \neq \omega$$

ist. Es folgt vielmehr, wenn λ eine andere ganze Zahl bedeutet, aus

$$\omega + \nu = \omega + \lambda$$
$$\nu = \lambda.$$

Die Eigenschaften von ω übertragen sich entsprechend auf den entgegengesetzten Typus ω^* der Reihe der negativen ganzen Zahlen.

Man erkennt nunmehr leicht die wichtige Eigenschaft des Typus $\omega^* + \omega = \pi$ der negativen und positiven ganzen Zahlenreihe:

---

*) G. Cantor, Grundlage einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.

Aus den Gleichungen

$$\nu + \pi = \lambda + \pi$$

oder

$$\pi + \nu = \pi + \lambda \tag{2}$$

folgt notwendig

$$\nu = \lambda.$$

Während also der Typus ω sich mit den vor ihm stehenden Elementen vereinigen kann, verschmilzt der Typus π weder mit irgend welchen vor ihm, noch mit irgend welchen hinter ihm stehenden Elementen.

Ihren allgemeinsten Ausdruck findet diese Eigenschaft von π in dem folgenden Satze:

„Bedeuten ν und ν' endliche ganze Zahlen, ζ und ζ' beliebige abzählbare einfach geordnete Typen, so folgt aus der Gleichung

$$\nu + \pi + \zeta = \nu' + \pi + \zeta' \tag{3}$$

sowohl

$$\nu = \nu'$$

als

$$\zeta = \zeta'.“$$

Beweis. Bei ähnlicher Abbildung bleibt die Anordnung der Elemente erhalten, also entspricht das niederste Glied der linken Seite von (3) dem niedersten Gliede der rechten Seite, das zweite dem zweiten usw. Daraus folgt sofort der erste Teil der Behauptung.

Zugleich reduziert sich die Gleichung (3) auf die folgende

$$\pi + \zeta = \pi' + \zeta',$$

$$\pi = \pi'.$$

Da die beiden ähnlich aufeinander abgebildeten Mengen eindimensional geordnet sind und die niedersten Elemente den niedersten entsprechen, so können nur die folgenden drei Fälle eintreten: Entweder fällt das Bild von π auf einen Teil von π', oder es ist π' enthalten in dem Bild von π, oder es ist π' selbst das Bild von π. Im ersten und zweiten Falle müßte es eine Zerlegung des Ordnungstypus π

$$\pi = \pi_1 + \pi_2,$$

$$\pi = \pi_1$$

geben. Geht man jedoch auf die Definition von $\pi = \omega^* + \omega$ zurück, so leuchtet ein, daß π nur auf *eine* — nämlich durch die Definition gegebene — Weise in zwei Summanden zerlegt werden kann.

Es wird also π auf π' abgebildet.

Infolgedessen wird aber auch ζ auf ζ' abgebildet, es ist, wie behauptet

$$\zeta = \zeta'.$$

Wir werden das ausgesprochene Theorem bewiesen haben, wenn wir ein Verfahren angeben können, zu jeder gegebenen reellen Zahl einen bestimmten, für sie charakteristischen Ordnungstypus zu finden. Es geschieht dies nach dem folgenden Gedanken.

Wir schieben in der rechten Seite von 1) hinter jedes μ_ν eine Menge vom Typus π ein. Es entsteht so das Aggregat

$$\mu_1 \pi\, \mu_2 \pi\, \mu_3 \pi \cdots$$

Die Gesamtzahl aller *von Null verschiedenen* Elemente dieses Aggregates bildet in der vorliegenden Reihenfolge eine einfach geordnete Menge. Wir bezeichnen den Ordnungstypus derselben mit μ und schreiben

$$\mu = \mu_1 + \pi + \mu_2 + \pi + \mu_3 + \cdots.^*)$$

Dann lassen wir der Zahl x den Ordnungstypus μ entsprechen.

Es erübrigt noch zu beweisen, daß auch wirklich zwei verschiedenen Zahlen x und x' zwei verschiedene Ordnungstypen μ und μ' entsprechen. Es sei

(4) $$x' = (\mu_1', \mu_2', \mu_3', \cdots),$$

(5) $$\mu' = \mu_1' + \pi + \mu_2' + \pi + \mu_3' + \cdots.$$

Die Gleichung

(6) $$\mu = \mu'$$

schreiben wir in der Form

$$\mu_1 + \pi + \zeta_1 = \mu_1' + \pi + \zeta_1'.$$

Indem wir nun den bewiesenen Hilfssatz anwenden, folgern wir

$$\mu_1 = \mu_1',$$
$$\zeta_1 = \zeta_1'.$$

Dann schreiben wir die letztere Gleichung

$$\mu_2 + \pi + \zeta_2 = \mu_2' + \pi + \zeta_2'$$

und folgern ebenso

$$\mu_2 = \mu_2',$$
$$\zeta_2 = \zeta_2'$$

usw. Aus den Gleichungen

$$\mu_1 = \mu_1',$$
$$\mu_2 = \mu_2',$$
$$\cdots\cdots$$

aber folgt

(7) $$x = x'.$$

*) Hierbei benutzen wir das Summenzeichen in der erweiterten Bedeutung, daß $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$ sein soll, wenn α irgend einen Typus bedeutet.

Es besteht somit eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den x und den μ, wir können demgemäß in der üblichen Weise schreiben

$$\{x\} \sim \{\mu\}. \tag{8}$$

Bezeichnet man die Kardinalzahl des Kontinuums mit $\mathfrak{c}$, diejenige von O mit $\mathfrak{o}$, so folgt unmittelbar

$$\mathfrak{c} = \overline{\overline{\{\mu\}}} \leq \mathfrak{o}. \tag{9}$$

Wie bereits erwähnt, hat das Problem, die Mächtigkeit des Kontinuums zu bestimmen, die spezielle Gestalt gewonnen, zu entscheiden, ob das Kontinuum größer oder gleich der auf die abzählbare Mächtigkeit zunächst folgenden Mächtigkeit $\aleph_1$ ist. Da das Kontinuum definiert ist als Begriff der *reellen Zahlen*, $\aleph_1$ hingegen als die Mächtigkeit des Inbegriffs aller *Ordnungstypen wohlgeordneter* abzählbarer Mengen, so ist es eine Vorbedingung zur Lösung dieser Frage, *eine solche Beziehung zwischen den reellen Zahlen und den Ordnungstypen zu gewinnen, daß beide Mengen als Systeme von Elementen gleicher Beschaffenheit erscheinen.*

Dies geschieht durch den folgenden Satz.

Satz 1. *Das Kontinuum ist äquivalent der Gesamtheit O aller Ordnungstypen einfach geordneter Mengen erster Mächtigkeit.*

Der Beweis dieses Satzes geschieht durch Anwendung des Äquivalenzsatzes. Die eine Hälfte der Behauptung, nämlich das Kleiner- resp. Gleichsein des Kontinuums gegenüber der Menge aller genannten Typen, ist von G. Cantor schon frühzeitig bewiesen worden. Der Beweis, daß das Kontinuum größer oder gleich der in Rede stehenden Gesamtheit von Ordnungstypen ist, wird im Anschluß an eine allgemeine Diskussion des Ordnungsbegriffes geführt werden, die uns zugleich eine anschauliche Deutung der transfiniten Ordnungszahlen liefern wird.

§ 7.

Ordnungstypen und Ordnungsfunktionen.

Alle Begriffe der Mengenlehre können zurückgeführt werden auf die folgenden drei:

Element, System, Abbildung (Funktion).

Die Ordnung einer Menge M stellt eine Bestimmung hinsichtlich der Paare (a, b) von Elementen dar, welche zwei Möglichkeiten $a < b$, $b < a$ bietet. Sie kann repräsentiert werden durch eine Funktion $f_{a,b}$ der Menge M^2 der Paare (a, b), welche gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem $a < b$ oder $a > b$ ist (und die für $a = b$ den Wert 0 erhält).

Das Gesetz — aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$ — drückt sich so aus:

(1) aus $f_{a,b} = f_{b,c}$ folgt $f_{a,c} = f_{b,c}$.

Es entsteht die Frage, wann repräsentieren zwei Ordnungsfunktionen, die sich auf dieselbe Menge beziehen, denselben Ordnungstypus? Dies beantwortet der

Satz: Zwei Ordnungsfunktionen f_1 und f_2 repräsentieren *dann und nur dann* denselben Ordnungstypus, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung φ der Menge M in sich gibt, so daß

(2) $f_{1\,\varphi(a),\varphi(b)} \equiv f_{2\,a,b}$ (wo a und b alle Werte von M durchlaufen).

Denn ist $\overline{M} = \{\bar{a}\}$ der zu M gehörige Ordnungstypus, und ist erstens

$$\psi(a) = \bar{a}$$

die *ähnliche* Abbildung, welche die nach $f_{2\,a,b}$ geordnete Menge auf $\overline{M}$ hat, so ist

(3) $$\psi[\varphi(a)] = \overline{\varphi(a)}$$

diejenige ähnliche Abbildung, welche die nach f_1 geordnete Menge auf den Ordnungstypus abbildet. Repräsentiert zweitens f_1 und f_2 denselben Ordnungstypus, so sind zwei Abbildungen ψ_1 und ψ_2 gegeben, so daß

(4) $$\begin{aligned} \psi_1(a) &= \bar{a}, \\ \psi_2(a) &= \bar{a}, \end{aligned}$$

welche die nach f_1 resp. f_2 geordnete Menge ähnlich auf den Ordnungstypus abbilden. Aus der Ähnlichkeit der Abbildung folgt dann, daß

$$f_{1\psi_1(a),\psi_1(b)} \equiv f_{2\psi_2(a),\psi_2(b)}$$

ist, wo $a, b,$ alle Werte von M durchlaufen.

Ich setze nunmehr $\psi_2^{-1}(a)$, $\psi_2^{-1}(b)$ an Stelle von a und b und erhalte

$$f_{1\psi_1\psi_2^{-1}(a),\psi_1\psi_2^{-1}(b)} = f_{2\,a,b}.$$

Diejenigen Ordnungsfunktionen, welche zu demselben Ordnungstypus gehören, sollen eine *Schar* von Ordnungsfunktionen heißen. Man erkennt aus dem Bewiesenen den

Satz: Die Gesamtheit aller Ordnungsfunktionen einer Schar bilden eine Menge von der gleichen Mächtigkeit, wie die Gruppe der umkehrbar eindeutigen Abbildungen der Menge in sich.

Der Ordnungstypus erscheint hier als die Invariante der Schar.

Bevor ich die obigen Sätze auf die Zahlen der zweiten Zahlenklasse anwende, möchte ich erwähnen, daß mit Hilfe der eingeführten Begriffe das Problem, das Kontinuum in eine wohlgeordnete Menge zu verwandeln, eine einfache Gestalt gewinnt.

Eine wohlgeordnete Menge können wir nämlich auch als eine solche definieren, in welcher jede Teilmenge ein niederstes Element besitzt.

Legen wir nun das Kontinuum in der Form der Einheitsstrecke mit ihren Punkten zugrunde, so können wir sagen:

Es wird die Existenz einer eindeutigen Funktion $f(x, y)$ der reellen Variabelen x und y behauptet, welche

1) definiert ist für alle Punkte des Einheitsquadrates,

2) welche den Gleichungen

$$f(x, y) = -f(y, x) = \pm 1$$

genügt und auf der Geraden $x = y$ Null ist,

3) welche in bezug auf jede Teilmenge $P = (p)$ der Zahlen zwischen 0 und 1 für *ein und nur ein* Element p der Gleichung $f(p, q) = +1$ genügt (wo q alle Werte von P durchläuft).

Solche Funktionen will ich mit $C(x, y)$ bezeichnen. Sie sind überall unstetige Funktionen, aber ihre sehr merkwürdigen Eigenschaften weichen von denen der bisher studierten unstetigen Funktionen in hohem Maße ab.

§ 8.

Der Beweis des Satzes 1 (§ 6) auf Grund der Eigenschaften der Ordnungsfunktionen.

Um die Ordnungsfunktionen für die abzählbaren Mengen darzustellen, sei eine einfach unendliche Teilmenge der reellen positiven Zahlen zugrunde gelegt. Besondere Einfachheit und Anschaulichkeit erreicht man, wenn man die Menge der rationalen Zahlen oder die Reihe der natürlichen Zahlen wählt. Bei letzteren insbesondere wird die Menge der Paare durch das ebene Punktgitter dargestellt, welches alle Punkte (x, y) mit positiven ganzzahligen x und y enthält. Man hat dann zur Repräsentierung der *natürlichen* Ordnung die Punkte $x < y$ mit der positiven, die Punkte $x > y$ mit der negativen Einheit zu belegen. Ist $f_1(x, y)$ eine beliebige Ordnungsfunktion derselben Menge, so wird sie durch eine Belegung des Punktgitters mit demselben oder dem entgegengesetzten Wert dargestellt, je nachdem die Rangordnung zwischen x und y mit der Größenbeziehung übereinstimmt oder entgegengesetzt ist.

Nicht jede Belegung des Punktgitters mit positiven oder negativen Einheiten stellt eine Ordnung dar. Vielmehr wird erstens

$$f_1(x, y) = -f_1(y, x) \text{ und } f(y, y) = 0$$

gefordert; zweitens muß auch die Bedingung des Einfachgeordnetseins (aus $a > b$, $b > c$ folgt $a > c$) zum Ausdruck kommen. Übersichtlich geschieht dies in der folgenden Weise. Man verbinde alle Punkte, welche den Wert $+1$ (oder 0) tragen, untereinander durch geradlinige Strecken und in gleicher Weise alle, welche den Wert -1 (oder 0) tragen. Man

nenne das eine Streckensystem das positive, das andere Streckensystem das negative. Versteht man ferner unter der zu der Strecke $(x_1 y_1 \cdots x_2 y_2)$ *konjugierten* Strecke die mit $(x_1 y_2 \cdots x_2 y_1)$ zu signierende, so kann man einfach sagen: die zweite Bedingung, damit eine Belegung eines Punktgitters mit positiven und negativen Einheiten eine Ordnungsfunktion darstelle, besteht darin, daß *niemals* eine Strecke des positiven Systems konjugiert ist mit einer Strecke des negativen Systems.

Denn haben wir ein derart beschaffenes Punktgitter, und sind a, b, c drei beliebige Elemente der Menge, so daß

$$f_{a,b} = f_{b,c} = \varepsilon = \pm 1$$

ist, so sei etwa

$$f_{a,c} = + \eta .$$

Wir betrachten das Viereck (a, b) (b, b) (b, c) (a, c); die Strecke $(ab \cdots bc)$ gehört zum ε-System, also muß die konjugierte Strecke $(bb \cdots ac)$ entweder selbst eine Strecke des ε-Systems, oder eine Verbindungsstrecke eines positiven mit einem negativen Punkte sein. Da jedoch $f_{b,b} = 0$ ist, so kann das letztere nicht stattfinden, also ist auch $f_{a,c} = \varepsilon$.

Ist umgekehrt das Ordnungsgesetz erfüllt, und ist

$$f_{x_1, y_1} = f_{x_2, y_2},$$
$$f_{x_1, y_2} = f_{x_2, y_1},$$

so folgt aus

$$f_{x_1, y_1} = - f_{x_1, y_2}$$

ein Widerspruch. Denn es ist einerseits

$$f_{x_1, x_2} = f_{y_1, x_2} = f_{x_1, y_1},$$

andererseits

$$- f_{x_1, x_2} = f_{x_2, x_1} = f_{y_2, x_1} = f_{x_2, y_2} = f_{x_1, y_1} .$$

Hieraus würde folgen $x_1 = x_2 = y_1 = y_2$, was mit der Annahme $(x_1 y_1) \neq (x_2 y_2)$ unverträglich ist.

Beweis des Satzes 1. Wir zeigen zunächst, daß

$$\mathfrak{o} = \overline{\overline{O}} \leq \mathfrak{c}$$

ist.

Nach den Ausführungen im vorigen Paragraphen gehörte zu jedem Ordnungstypus eine Schar von darstellenden Ordnungsfunktionen. Insbesondere gehört also zu jedem Ordnungstypus einer lineargeordneten abzählbaren Menge eine Schar von Punktgittern.

Die Mächtigkeit, welche eine Schar von Ordnungsfunktionen, aufgefaßt als Menge, besitzt, ist gleich der Mächtigkeit der Gesamtheit Π aller Permutationen der natürlichen Zahlenreihe. Den Wert von Π werden wir noch genauer bestimmen. Jedenfalls ist die Gesamtheit O der Ordnungstypen kleiner oder gleich der Gesamtheit der Ordnungsfunktionen:

$$O \leq \{f_{a,b}\} .$$

Es läßt sich aber noch eine zweite Auffassung der Ordnungsfunktionen bilden. Man fasse das Punktgitter als eine *Doppelreihe von Nullen, positiven und negativen Einheiten auf und verwandle es in der bekannten Weise in eine einfache Reihe.* Ersetzt man dann noch die -1 durch $+2$, so stellt die letztere eine bestimmte reelle Zahl zwischen Null und Eins im triadischen Zahlensystem dar. Diese Darstellung ist im wesentlichen eindeutig. Vergleicht man nun O mit dem Kontinuum, so erhellt daraus

$$\overline{\overline{O}} \leq \mathfrak{c}.$$

Wir ziehen nunmehr das Resultat aus § 6 heran

$$\overline{O} \geq \mathfrak{c}.$$

Der Äquivalenzsatz erlaubt jetzt den Schluß

$$\overline{O} = \mathfrak{c}.$$

Zusatz. Die Gesamtheit Π aller Permutationen der natürlichen Zahlenreihe hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Beweis. Die Gesamtheit aller Teilmengen der natürlichen Zahlenmenge hat die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Denn man setze für alle Zahlen der Reihe $(1, 2, 3 \cdots)$, welche in einer Teilmenge vorkommen, *Einsen*, für die nicht vorkommenden *Nullen*. Die so entstehende Folge von Nullen und Einsen stellt eine reelle Zahl im dyadischen System dar. So entsteht eine umkehrbare, im wesentlichen eindeutige Beziehung zwischen dem Kontinuum und der Menge der Teilmengen.

Der wesentlichste Punkt des Beweises ist, zu zeigen, daß jede Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen eine Permutation besitzt, bei der jede Zahl derselben den Platz wechselt. Man stellt eine solche dadurch dar, daß man in der Teilmenge die $(2n)^{\text{te}}$ Zahl mit der $(2n+1)^{\text{ten}}$ vertauscht.

Für zwei verschiedene Teilmengen sind die auf solche Weise definierten Permutationen natürlich verschieden. Es ist also Π größer oder gleich der Gesamtheit der Teilmengen, d. h. größer oder gleich dem Kontinuum. Daß aber Π auch kleiner oder gleich dem Kontinuum ist, folgt sehr einfach. Faßt man nämlich die Zahlen der Permutation in ihrer Reihenfolge als die Teilnenner eines Kettenbruchs auf, so erhält man für jede Permutation einen bestimmten Kettenbruch, der eine reelle Zahl darstellt. Jeder Permutation entspricht so eindeutig eine reelle Zahl. Die Gesamtheit Π entspricht einer Teilmenge der Gesamtheit der reellen Zahlen.

Da also Π erstens nicht kleiner, zweitens nicht größer ist als das Kontinuum, so folgt aus dem Äquivalenzsatz, daß

$$\Pi = \mathfrak{c}$$

ist.

§ 9.

Verallgemeinerung und zweiter Beweis des Satzes 1 (§ 6).

Nach der in § 2, 3 angeführten Definition des Potenzbegriffes läßt sich die Kardinalzahl des Kontinuums in die Form $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ setzen, wenn $\aleph_0$ die Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen bedeutet (G. Cantor*)).

Wir können demgemäß dem Satze 1 des § 6 auch die folgende Fassung geben:

Die Gesamtheit der Typen einfach geordneter Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_0$ *hat die Mächtigkeit* $2^{\aleph_0}$.

Die bekannte Definition der Kardinalzahl $\aleph_1$ lautet (G. Cantor**)):

Die Gesamtheit aller Typen der wohlgeordneten Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_0$ *hat die Mächtigkeit* $\aleph_1$.

Diese Parallelität der Definition von $\aleph_1$ und $2^{\aleph_0}$ überträgt sich ebenso auf die höheren Aleph. Es ist die Gesamtheit der einfach geordneten Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ die Potenz $2^{\aleph_\alpha}$, die Gesamtheit der wohlgeordneten Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ liefert die nächstfolgende Kardinalzahl $\aleph_{\alpha+1}$.

Der Beweis ist in jeder Beziehung analog dem im einfachsten Falle geführten, so daß derselbe hier übergangen werden kann.***)

Dagegen soll für den speziellen hier ausgeführten Fall ein zweiter einfacherer Beweis gegeben werden, der auf einer Eigenschaft des Typus η der rationalen Zahlen beruht. Es gelten die beiden folgenden Sätze (G. Cantor*)):

Hilfssatz 1. Liegt zwischen je zwei Elementen einer einfach geordneten *abzählbaren* Menge stets ein Element, so ist sie vom Typus η (d. h. man kann sie ähnlich auf die Menge der rationalen Zahlen abbilden), wenn man ihr niedrigstes und ihr höchstes Glied beseitigt.

Hilfssatz 2. Es ist die Menge

$$(\eta, 1, \eta) = \eta + 1 + \eta$$

---

*) Math. Ann. Bd. 46 (1895), S. 481.

**) G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.

***) F. Hausdorff hat in einer Arbeit: „Über eine gewisse Art geordneter Mengen" (Ber. d. k. s. Ges. d. Wiss. Leipzig; Math. Phys. Kl. 1901, p. 460—475) diesen Satz verallgemeinert, indem er ihn für alle „gestuften" Mengen beweist, die ihrem Quadrat äquivalent sind.

selbst vom Typus η, also

$$\eta + 1 + \eta = \eta.$$

Hierauf gründen wir den folgenden Satz.

Satz 1. Ist μ ein Ordnungstypus einer beliebigen abzählbaren, einfach geordneten Menge, so gibt es stets eine Teilmenge von η, welche den Typus μ besitzt.

Beweis. Wir gehen aus von dem Ordnungstypus μ und zeigen, daß wir durch Einschaltung von Elementen an geeigneten Stellen denselben zum Typus η umwandeln können.

Diejenigen Elemente, welche *zwischen* zwei Elementen e_1 und e_2 des Typus μ liegen, sind völlig bestimmt, wir nennen sie das Intervall $(e_1 e_2)$.

Enthalten sämtliche vorhandenen Intervalle Elemente, so ist der Typus μ nach Hilfssatz 1 von der Form η, oder $1 + \eta$, $\eta + 1$, $1 + \eta + 1$, da man durch Streichung der niedrigsten und höchsten Glieder von μ dann stets den Typus η erhält. Fügt man daher den Typus η sowohl vor als hinter den Typus μ hinzu, so ist sicher nach Hilfssatz 2

$$\eta + \mu + \eta = \eta.$$

Enthalten nicht sämtliche Intervalle Elemente der Menge, so schieben wir in alle elementfreien Intervalle Mengen vom Typus η ein. Die so entstehende Menge μ^* erfüllt sicher die Bedingungen des Hilfssatzes 1, daß in jedem Intervall Elemente vorhanden sind. Es ist also wieder

$$\eta + \mu^* + \eta = \eta.$$

Schließlich erinnern wir noch an den Satz:

Hilfssatz 3. Die Gesamtheit der Punkte eines abzählbar unendlich-dimensionalen Kontinuums besitzt die Mächtigkeit des Linearkontinuums. In Zeichen

$$(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Beweis zu Satz 1 (§ 6).

Der Typus η sei repräsentiert durch die Gesamtheit der rationalen Zahlen. Nach Satz 1 gibt es Teilmengen von rationalen Zahlen, welche einen beliebigen vorgelegten Typus μ darstellen. Die Menge O aller Typen μ ist daher kleiner oder gleich der Menge R aller Teilmengen aus rationalen Zahlen.

Wir denken uns nunmehr ein abzählbar unendlich-dimensionales Kontinuum. Jeder Teilmenge $(r_1, r_2, \cdots)$ der rationalen Zahlenmenge können eindeutig diejenigen Punkte zugeordnet werden, deren Ordinaten $(x_1, x_2, \cdots)$ in irgend einer Reihenfolge $(r_1, r_2, \cdots)$ sind.

Die Menge R aller Teilmengen aus rationalen Zahlen ist daher kleiner oder gleich der Menge der Punkte des unendlich-dimensionalen Kontinuums.

Nach Hilfssatz 3 ist also

$$R \leq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Nun war andererseits

$$O \leq R \quad \text{also} \quad O \leq \mathfrak{c}.$$

Hiermit sind wir aber unter Zuhilfenahme des Theorems I wieder zum Beweise des Satzes 1 gelangt.

Drittes Kapitel.

Die Mengen im Kontinuum und das Ultrakontinuum.

Die Behauptung von G. Cantor, daß im Kontinuum nur zwei verschiedene Mächtigkeiten vorkommen, ist eine Aussage, welche sich auf *alle* Teilmengen des Kontinuums bezieht. Man kann sie in der Form aussprechen:

Jede Teilmenge T des Kontinuums ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Bisher bewiesen ist dieser Satz nur für die *abgeschlossenen* Mengen A, d. h. diejenigen, welche alle ihre Grenzelemente enthalten.

Um nun den Umfang des bereits Geleisteten und des noch zu Leistenden abzuschätzen, wird man die Frage aufwerfen:

Welche Stellung nehmen die abgeschlossenen Mengen unter allen Teilmengen des Kontinuums ein?

Wir beantworten diese Frage mit Hilfe einer der Mengenlehre eigentümlichen *Betrachtungsweise*, die darin besteht, daß wir die *Häufigkeit* beider Arten von Mengen in Vergleich ziehen.

Wir bilden also diejenigen beiden Mengen $\{A\}$ und $\{T\}$, deren einzelne Elemente die Mengen A und T sind, und stellen das Verhältnis ihrer Mächtigkeiten fest.

Die Menge $\{T\}$ aller Teilmengen des Kontinuums war schon bei anderer Gelegenheit von G. Cantor untersucht, und er hatte gefunden, daß dieselbe eine höhere Mächtigkeit als das Kontinuum besitzt.

Von der Menge $\{A\}$ beweisen wir dagegen den folgenden Satz:

Die Gesamtheit $\{A\}$ aller abgeschlossenen Mengen hat die Mächtigkeit des Kontinuums.

Wir erhalten also das Resultat, daß die abgeschlossenen Mengen in *geringerer* Anzahl vorhanden sind, als die nichtabgeschlossenen. Das Verhältnis beider ist ein ähnliches wie das zwischen algebraischen und transzendenten Zahlen. Der Satz wird in der Art bewiesen, daß ein Verfahren angegeben wird, wie man zu jeder abgeschlossenen Menge eine bestimmte reelle Zahl finden kann, welche sie umgekehrt völlig charakterisiert.

Zu den abgeschlossenen Punktmengen gehören alle Kurven und Flächen im Raume von den mannigfachsten Formen und Gestalten, und es ist eine merkwürdige Tatsache, *daß somit eine einzige reelle Zahl ausreicht, um jede auch noch so komplizierte unter ihnen zu beherrschen.*

Dieselbe Betrachtungsweise, wie sie auf die abgeschlossenen Mengen angewendet wurde, läßt sich auch auf die von Baire eingeführten Mengen erster und zweiter Kategorie ausdehnen. Das Resultat ist hier ein *negatives*, es läßt sich mit Hilfe dieser Begriffe keine wesentliche Erweiterung der bisherigen Sätze erlangen.

Es fragt sich nun, *wie gelangt man zu einer Erweiterung der Sätze in dem angegebenen Sinne?*

Der hier eingeschlagene Weg besteht darin, daß das Kontinuum auf *eine andere Form* gebracht wird. Es wird ein höherer Typus konstruiert, innerhalb dessen es gelingt, für eine Teilmengenklasse, welche $2^{\aleph_1}$ Mengen enthält, die Mächtigkeitsfrage zu entscheiden.

Daß die Kardinalzahl $2^{\aleph_1}$ größer ist als die Kardinalzahl $2^{\aleph_0}$, ist sehr wahrscheinlich. Der Beweis hierfür steht jedoch noch aus.

§ 10.

Die Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen.

Erklärung 1. Zwei Teilmengen des Kontinuums betrachten wir als verschieden, wenn sie in irgend einem Punkte nicht übereinstimmen. Die *Gesamtheit* aller Teilmengen T_c bezeichnen wir mit $\{T_c\}$; ihre Mächtigkeit ist (G. Cantor)

$$2^c > c. \tag{1}$$

Erklärung 2. Eine Menge heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Grenzpunkte enthält. Die Gesamtheit der voneinander verschiedenen abgeschlossenen Mengen A bezeichnen wir mit $\{A\}$. Wir behaupten den folgenden Satz:

Satz 1. *Es ist*

$$\{A\} \sim c, \tag{2}$$

d. h.: *Die Gesamtheit aller abgeschlossenen Mengen ist von der Mächtigkeit des Kontinuums.**)

Dem Beweise schicken wir die folgenden Hilfssätze voraus.

---

*) Beppo Levi gibt (l. c.) einen Beweis dieses Satzes, bei welchem er unter Benutzung der Maßbestimmung im Kontinuum eine Abbildung von A auf c *eindeutig* herstellt, während hier unter alleiniger Benutzung des Ordnungstypus des Kontinuums eine Menge von Abbildungen erhalten werden, unter denen keine ausgezeichnet ist. (Hierüber vgl. F. Bernstein, Bemerkung zur Mengenlehre, Gött. Nachr. 1904, p. 6.)

Hilfssatz 1. Alle abzählbaren Teilmengen B_n eines n-dimensionalen Raumes C_n bilden in ihrer Gesamtheit eine Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Beweis. Die Mächtigkeit aller Punkte des n-dimensionalen Raumes beträgt nach den bekannten Sätzen $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Die Gesamtheit aller abzählbaren Teilmengen desselben $\{B_n\}$ ist jedenfalls kleiner oder gleich der Menge aller Kombinationen dieser Punkte zu Klassen von $\aleph_0$ Elementen. Nach der Cantorschen Definition des Potenzbegriffes ist also die Kardinalzahl $\overline{\{B_n\}}$

$$\overline{\{B_n\}} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0};$$

da aber

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c},$$

so ist erstens

$$\overline{\{B_n\}} \leq \mathfrak{c}.$$

Daß aber andererseits

$$\overline{\{B_n\}} \geq \mathfrak{c}$$

ist, erhellt daraus, daß jeder Punkt des $\aleph_0$-dimensionalen Kontinuums für sich genommen eine abzählbare Teilmenge des eindimensionalen Kontinuums repräsentiert, so daß die Anzahl der letzteren sicher die Anzahl $\mathfrak{c}$ der ersteren erreicht. Das Äquivalenztheorem liefert dann die Behauptung

$$\{B_n\} \sim \mathfrak{c}.$$

Erklärung 3. a) Jede abgeschlossene *lineare* Menge ist bestimmt durch die zugehörige Menge punktfreier Intervalle (G. Cantor*)) und b) jede Menge von getrennten Intervallen bestimmt eine abgeschlossene Menge, welche durch die Endpunkte der Intervalle und deren Grenzpunkte gebildet wird.

Hilfssatz 2. Die Gesamtheit aller Mengen, welche aus getrennten Intervallen bestehen, beträgt

$$\overline{\{I\}} = \mathfrak{c}.$$

Beweis. Jede Menge, welche aus getrennten Intervallen besteht, ist bekanntlich abzählbar. Das gleiche gilt infolgedessen auch für die Menge der Intervall-Endpunkte.

Werden zwei verschiedene Mengen von getrennten Intervallen durch dieselbe Menge E von Endpunkten bestimmt, so wollen wir sie *zusammengehörig* nennen.

Jedenfalls machen alle durch dieselbe Menge E bestimmten zusammengehörigen Intervallmengen höchstens eine Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ aus. Denn es gibt eine durch E eindeutig bestimmte Intervallmenge I^*, welche *alle* aneinander grenzenden, durch die Punkte von E getrennten Intervalle enthält. I^* enthält eine *abzählbare* Anzahl von

*) G. Cantor, Acta Math. Bd. 2.

Intervallen, die übrigen Intervallmengen entstehen durch Auslassung von Intervallen, d. h. sie stehen zu I^* in dem Verhältnis von Teilmengen. Ihre Gesamtheit ist daher höchstens $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Die Gesamtheit aller Intervallmengen ist also höchstens $\{E\}\,\mathfrak{c}$.

$$\overline{\{I\}} \leq \overline{\{E\}}\,\mathfrak{c}. \tag{9}$$

Die Menge E ist eine abzählbare Teilmenge des Kontinuums. Also ist nach Hilfssatz 1

$$\overline{\{E\}} \leq \{\overline{A}\} \leq \mathfrak{c}. \tag{10}$$

Mithin ist

$$\overline{\{I\}} \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}. \tag{11}$$

Ferner ist aber

$$\overline{\{I\}} \geq \mathfrak{c}. \tag{12}$$

Denn die kongruente stetige Verschiebung einer Intervallmenge stellt in jeder Lage eine andere Intervallmenge derselben Art dar.

Es folgt also

$$\overline{\{I\}} = \mathfrak{c}. \tag{13}$$

Beweis von Satz 1. Nach der Erklärung 3a) und 3b) gehört zu jeder Menge A eine Menge I umkehrbar eindeutig hinzu. Es ist also

$$\overline{\{A\}} = \overline{\{I\}}.$$

Mithin ist auch

$$\{\overline{A}\} = \mathfrak{c}. \tag{14}$$

Folgerung. Die perfekten Mengen, welche für die Analysis von vielfacher Verwendung sind, sind ein Spezialfall der abgeschlossenen Mengen. Es folgt aber für diese sofort

$$\overline{\{P\}} \leq \mathfrak{c}.$$

Andererseits ist, wie leicht zu sehen,

$$\overline{\{P\}} \geq \mathfrak{c}$$

und somit

$$\overline{\{P\}} = \mathfrak{c}.$$

Man kann also jede perfekte Menge durch eine einzige reelle Zahl völlig charakterisieren und ihre Gesamtheit durch die reellen Zahlen abzählen.

Zusatz 1. Der Satz 1 bleibt auch für die abgeschlossenen Mengen im n-dimensionalen Kontinuum gültig.

Um dies zu beweisen, beziehen wir uns auf den von G. Cantor gegebenen Satz.

Hilfssatz 3. Jede abgeschlossene Menge im C_n läßt sich als Ableitung einer abzählbaren Menge auffassen.

Jede Menge bestimmt ihre Ableitung eindeutig. Die Gesamtheit der Ableitungen der abzählbaren Mengen ist daher kleiner oder gleich der Gesamtheit c derselben.

Also ist auch

$$\overline{\{A_n\}} \leq \mathfrak{c}.$$

Und da nach Satz 1 die linearen Mengen die Mächtigkeit c haben, so ist auch

$$\overline{\{A_n\}} \geq \mathfrak{c}.$$

Mithin ist

$$\overline{\{A_n\}} = \mathfrak{c}.$$

§ 11.

Die Mengen erster und zweiter Kategorie.

Es werden für die Mengen erster und zweiter Kategorie (Baire*)) zweckmäßig folgende Definitionen gegeben:

Erklärung 1. Sind $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\nu, \cdots$ nirgends dichte Mengen und ist das kleinste gemeinschaftliche Multiplum $\mathfrak{M}(Q_\nu)$ derselben eine überall dichte Menge, so heißt $\mathfrak{M}(Q_\nu)$ eine Menge erster Kategorie.

Ist R die Komplementärmenge zu $\mathfrak{M}(Q_\nu)$, so soll R als eine Menge zweiter Kategorie bezeichnet werden.

Die Begriffe „überall dicht, nirgends dicht, Komplementärmenge" beziehen sich hier auf das Kontinuum. Legt man an Stelle desselben eine perfekte oder abgeschlossene Menge zugrunde, so wird man zu entsprechenden Begriffen geführt.

Erklärung 2. Für Mächtigkeitsuntersuchungen ist es zweckmäßig, von den Mengen Q_ν noch das *Abgeschlossensein* zu fordern. Man bezeichne die so entstehenden Mengen erster resp. zweiter Kategorie als *geschlossen*.

Baire hat bewiesen, daß die Mengen zweiter Kategorie stets die Mächtigkeit c haben. Die geschlossenen Mengen erster Kategorie haben offenbar stets die Mächtigkeit $\aleph_0$ oder c.

Satz 1. Die Gesamtheit aller *geschlossenen* Mengen erster resp. zweiter Kategorie bildet eine Menge von der Mächtigkeit c.

Beweis. Wir bezeichnen die fragliche Gesamtheit mit $\{K_1\}$. Zu jeder Menge erster Kategorie gibt es eine sie definierende einfach unendliche Reihe abgeschlossener Mengen Q_ν. Es ist daher $\{K_1\}$ kleiner oder gleich der Gesamtheit aller einfach unendlichen Reihen aus abgeschlossenen Mengen. Alle Kombinationen zu je $\aleph_0$ Elementen aus abgeschlossenen Mengen bilden eine Menge von der Mächtigkeit

$$\overline{\{A\}}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Es ist mithin

$$\{K_1\} \leq \mathfrak{c}.$$

*) Baire, Ann. di mat. Bd. 3 (1899), S. 67.

Daß aber $\{K_1\}$ nicht kleiner ist als $\mathfrak{c}$, folgt sehr leicht, wenn man bedenkt, daß kongruente Verschiebung einer Menge erster Kategorie in jeder Lage eine Menge erster Kategorie darstellt. Es ist also

$$\overline{\{K_1\}} = \mathfrak{c}.$$

Die Verallgemeinerung des Satzes 1 auf beliebige abgeschlossene Mengen vollzieht sich in der folgenden Weise.

Erklärung 3. Eine Menge Q heißt *nirgends dicht* in bezug auf eine abgeschlossene Menge P, wenn sie eine Teilmenge derselben ist und es kein Intervall der Menge P gibt, in welchem P und Q identisch sind. Sie heißt *überall dicht* in bezug auf P, wenn jedes Element von P der Menge Q oder ihrer Ableitung angehört. Sie heißt *abgeschlossen* in bezug auf P, wenn sie ihre in P liegende Ableitung enthält.

Satz 2. Die Gesamtheit aller geschlossenen Mengen erster resp. zweiter Kategorie in bezug auf eine abgeschlossene Menge bilden eine Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$.

Faßt man nun die Gesamtheit aller Mengen erster und zweiter Kategorie ins Auge, gleichgültig in welchen (abgeschlossenen) Mengen sie definiert sind, so sieht man:

Satz 3. *Die Gesamtheit aller Mengen K_1 ist* $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.*)

§ 12.

Das Ultrakontinuum.

Es handelt sich im folgenden zunächst um die Konstruktion einer Menge, welche dieselbe Mächtigkeit wie das Kontinuum, aber einen anderen Ordnungstypus besitzt. Zuvor leite ich einen Satz über alle Aleph mit endlichem Index ab.

Satz 1. *Es ist*

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu,$$

wo ν und μ endliche Indizes bedeuten.

Dem Beweise stelle ich die Hilfssätze voran:

Hilfssatz 1. Es sei n eine ganze endliche Zahl, so ist

$$\aleph^n = \aleph$$

für jedes Aleph.

Den Beweis des Satzes, den ich aus mündlicher Mitteilung von G. Cantor kenne, führt man analog wie im einfachsten Falle $\aleph = \aleph_0$ durch Verwandlung *einer Doppelreihe in eine einfache Reihe.* Man benutzt

*) Es ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes 8, daß auch alle einfach unendlichen Summen aus Mengen zweiter Kategorie, die geschlossen sind, eine Menge von der Kardinalzahl $\mathfrak{c}$ ausmachen. Ein von anderer Seite ausgesprochener Satz, der diesem Resultat widerstreitet, ist seitdem zurückgezogen.

dabei die aus den Zahlen der Zahlenklasse, welche die Mächtigkeit $\aleph$ darstellt, gebildete Folge.

Hilfssatz 2. Sind M und N irgend welche Mengen, so ist

$$\Sigma M \cdot n = M \Sigma n \quad \text{(wo } n \text{ alle Elemente von } N \text{ durchläuft).}$$

Hilfssatz 3. Ist

$$\aleph_\mu \geq \aleph_\nu,$$

so ist

$$\aleph_\mu \cdot \aleph_\nu = \aleph_\mu. \tag{3}$$

Dieser Satz folgt aus Hilfssatz 1 und dem Äquivalenzsatz; denn es ist

$$\aleph_\mu \aleph_\nu \geq \aleph_\mu$$

und

$$\aleph_\mu \aleph_\nu \leq \aleph_\mu^2 = \aleph_\mu.$$

Wir unterscheiden bei dem Beweise des Satzes 1 zwei Fälle. Erstens sei

$$\aleph_\nu \geq \aleph_\mu. \tag{4}$$

Dann ist auch

$$2^{\aleph_\nu} > \aleph_\mu, \tag{5}$$

also

$$(2^{\aleph_\nu})^{\aleph_\nu} \geq \aleph_\mu^{\aleph_\nu}.$$

Nach den Gesetzen für die Potenzen der Mengen und nach Hilfssatz 1 ist also

$$2^{\aleph_\nu} \geq \aleph_\mu^{\aleph_\nu}.$$

Also ist, da auch

$$2^{\aleph_\nu} \leq \aleph_\mu^{\aleph_\nu}, \tag{6}$$

$$2^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu}.$$ *)

Die Multiplikation mit $\aleph_\mu$ liefert dann

$$\aleph_\mu \cdot 2^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu}.$$

Nunmehr sei zweitens

$$\aleph_\mu > \aleph_\nu. \tag{7}$$

Es durchlaufe α_μ alle Zahlen der Klasse $\{\alpha_\mu\}$ von der Mächtigkeit $\aleph_\mu$. Versteht man unter $\overline{\alpha}_\mu$ die zu α_μ gehörige Kardinalzahl, so ist jedenfalls

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} \leq \sum_{\alpha_\mu} \overline{\alpha}_\mu^{\aleph_\nu}. \tag{8}$$

---

*) Man bemerkt, daß diese Ableitung auch für beliebige Aleph gültig ist, so daß stets aus

$$\aleph_\nu \geq \aleph_\mu,$$

$$2^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu}$$

folgt, was auch ν und μ für Indizes sein mögen. In einer interessanten Arbeit: On the Transfinite Cardinal Numbers of Well-ordered Aggregates (Philos. Mag. VII. 6. Serie (1904), p. 61—74 u. 294—302) hat Herr Ph. Jourdain den gleichen Satz gefunden. Dagegen ist der Satz 1 nicht, wie ich ursprünglich angenommen hatte, für beliebige Aleph beweisbar.

Denn jede Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_\nu$, gebildet aus den Elementen von $\aleph_\mu$, befindet sich, gemäß der Gleichung 7, in einem *Abschnitt* der wohlgeordneten Menge von Zahlen $\{\alpha_\mu\}$. Die Menge rechts ist aber offenbar äquivalent der Gesamtheit *aller* Teilmengen *aller* Abschnitte von $\{\alpha_\mu\}$. Es kommt daher jede der links stehenden Teilmengen auch rechts vor.

Wir nehmen nun an, der Satz 1 sei für alle $\aleph_\lambda < \aleph_\mu$ bereits bewiesen. Dann folgt nach dem Bemerkten sofort

$$\bar{\alpha}_\mu^{\aleph_\nu} = \bar{\alpha}_\mu 2^{\aleph_\nu}.$$

Hierdurch verwandelt sich (8) in

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \sum \bar{\alpha}_\mu 2^{\aleph_\nu}. \tag{9}$$

Nach Hilfssatz 2 folgt hieraus

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = 2^{\aleph_\nu} \cdot \sum \bar{\alpha}_\mu.$$

Es ist nun

$$\sum_{\alpha_\mu} \bar{\alpha}_\mu = \aleph_\mu.$$

Denn ersetzt man $\bar{\alpha}_\mu$ durch $\aleph_\mu$, so entsteht offenbar $\aleph_\mu^2$, welches gleich $\aleph_\mu$ ist. Hieraus erhellt unter Berücksichtigung der Definition von $\aleph_\mu$ sofort das Behauptete. Demgemäß gewinnen wir das Resultat

$$2^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu = \aleph_\mu^{\aleph_\nu}.$$

Wir werden hier nur von dem speziellen Falle des Satzes $\aleph_\nu = \aleph_0$, $\aleph_\mu = \aleph_1$ Gebrauch machen. Derselbe wurde jedoch allgemein bewiesen, um die Möglichkeit der Verallgemeinerung der hier bewiesenen Sätze auf höhere Aleph zu zeigen.

Wir treffen die folgenden Festsetzungen:

Erklärung 1. Sei $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ eine einfach unendliche Menge von Zahlen der zweiten Zahlklasse. Wir setzen als Element einer Menge X_α

$$x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots]. \tag{10}$$

Sind x und x' zwei Elemente der Menge, so heiße x größer als x', wenn für ein ungerades n

$$\alpha_1 = \alpha_1',$$
$$\alpha_2 = \alpha_2',$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}',$$

dagegen

$$\alpha_n > \alpha_n'$$

ist. Ist n gerade, so heiße $x < x'$. Offenbar ist entweder x größer oder kleiner oder gleich x'.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort, daß aus

$$x_1 > x_2 \quad \text{und} \quad x_2 > x_3$$

folgt

$$x_1 > x_3 .$$

Damit ist die Menge X_u als eine *einfach geordnete* charakterisiert.

Sind $x_1, x_2, \cdots$ eine einfach unendliche Reihe ständig wachsender (oder abnehmender) Elemente, und nennen wir ein Element x, welches größer ist als alle diese und unter all den größeren Elementen selbst das kleinste ist, den Limes von $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, so können wir den Satz beweisen:

Jede einfach unendliche Folge von ständig wachsenden Elementen hat einen Limes.

Der Beweis beruht auf der Eigenschaft der Zahlen der zweiten Zahlenklasse, daß je einfach unendlich viele derselben *ein* Grenzelement bestimmen.

Es sei

$$x_n = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \cdots)$$

gesetzt. Da die $\alpha_1^{(n)}$ wachsen, so sind sie entweder von einem gewissen n ab alle gleich α_1 oder sie haben einen von ihnen selbst verschiedenen Limes α_1. Im *zweiten* Falle setzen wir

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty} x_n = x = (\alpha_1, 0,0 \cdots), \ \alpha_1 = \operatorname{Lim}_{n=\infty} \alpha_1^{(n)}.$$

Im ersten Falle bestimmen wir α_2 auf dieselbe Weise aus $\alpha_2^{(n)} \cdots$ usw.

Es ist dann $x = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ der Limes von x_n.

Erklärung 2. Eine Teilmenge der Menge X_u ist offenbar die Menge der Zahlen x, welche nur eine endliche Anzahl von Zahlen α, im übrigen aber Nullen enthalten. Wir bezeichnen sie mit R_u und nennen die Zahlen die *ultrarationalen* Zahlen.

Es ist offenbar, daß zwischen je zwei Elementen der Menge X_u Elemente von R_u liegen. In bezug auf R_u gilt der Satz:

Satz 2. Es ist

$$\overline{\overline{R}}_u = \aleph_1 .$$

Beweis. Offenbar ist

$$\overline{\overline{R}}_u \equiv \aleph_0 \sum_{n=1}^{\infty} \aleph_1^n ,$$

da jedes Element r_u von R_u eine Kombination von einer endlichen Anzahl n von Elementen aus $\aleph_1$ darstellt, die sich auf $\aleph_0$ verschiedene Weisen auf die Stellen von r_u verteilen kann.

Da

$$\aleph_1^n = \aleph_1$$

ist, so erhalten wir

$$\bar{R}_u = \aleph_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \aleph_1 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1 .$$

Satz 3. Es ist

$$\bar{\bar{X}}_u = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} .$$

Beweis. Offenbar ist

$$\bar{\bar{X}}_u = \aleph_1^{\aleph_0} ,$$

da jede einfach unendliche Kombination von Zahlen aus $\aleph_1$ eine Zahl von X_u liefert. Es ist aber nach Satz 1

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1 2^{\aleph_0} .$$

Die Ungleichung

$$2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$$

liefert, wenn man sie mit $2^{\aleph_0}$ multipliziert,

$$2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^2 \geq \aleph_1 2^{\aleph_0} ,$$

woraus sofort

$$\aleph_1 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

und die Behauptung

$$\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \bar{\bar{X}}_u$$

folgt.

Die nähere Bestimmung des Ordnungstypus Θ_u der Menge X_u, welche wir als *Ultrakontinuum* bezeichnen, hat darum ein besonderes Interesse, weil es wahrscheinlich ist, daß es nur zwei völlig homogene Ordnungstypen einfach geordneter perfekter Mengen gibt, die von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ sind, nämlich das Kontinuum und das Ultrakontinuum.

Erklärung 3. Sei T eine Teilmenge von X_u. Unter der Ableitung T' von T verstehe ich die Menge der Grenzelemente von T.

Erklärung 4. Ist T' enthalten in T, so nenne ich T, wie üblich, *abgeschlossen;* ist $T \equiv T'$, *perfekt.*

Satz 4. Jede perfekte Menge P_u ist von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.

Ich kann den Beweis hier nur andeuten. Er beruht auf dem folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 4. Jede Menge in X_u, von der kein Element Grenzelement der übrigen ist, hat die Mächtigkeit $\aleph_1$, oder sie ist abzählbar.

Denn sie definiert eine mit ihr äquivalente Menge von aneinandergrenzenden Intervallen. In dem Innern derselben liegt mindestens *ein* ultrarationales Element. Also ist sie höchstens von der Mächtigkeit der letzteren, $\aleph_1$. Andererseits gibt es wirklich derartige Mengen von dieser Mächtigkeit, z. B. die Menge der ganzen ultrarationalen Zahlen erster Art.

Der Satz 4 kann nunmehr ganz analog bewiesen werden, wie im

Kontinuum der reellen Zahlen der entsprechende Satz. Ebenso ergibt sich das Theorem

Satz 5. Jede abgeschlossene Menge A_u ist entweder abzählbar, von der Mächtigkeit $\aleph_1$ oder von der des Kontinuums.

Derjenige Satz, welcher uns in diesem Zusammenhange am meisten interessiert, lautet:

Satz 6. Die Gesamtheit aller abgeschlossenen Mengen $\{A_u\}$ ist von der Mächtigkeit $2^{\aleph_1}$.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich durch Betrachtung der Intervallmenge J_u, welche die abgeschlossene Menge völlig bestimmt.

Unter Anwendung des Hilfssatzes 4 gelangen wir dazu, die Gesamtheit der Intervallmengen $\{J_u\}$ mit der Gesamtheit aller Teilmengen des Ultrakontinuums X_u von $\aleph_1$ Elementen in Beziehung zu setzen. Die letztere hat die Mächtigkeit

$$\overline{X_u^{\aleph_1}} = 2^{\aleph_0 \aleph_1} = 2^{\aleph_1}.$$

Es folgt durch leichte Betrachtung hieraus

$$\overline{\{A_u\}} \leq 2^{\aleph_1}.$$

Daß aber

$$\overline{\{A_u\}} \geq 2^{\aleph_1}$$

ist, sieht man sofort, wenn man bedenkt, daß jede Teilmenge der Zahlen a erster Art durch Hinzunahme geeigneter Zahlen zweiter Art zu einer abgeschlossenen Menge wird, und daß jede solche vervollständigte Teilmenge der Menge R_u angehört, also auch eine Teilmenge A_u von X_u darstellt.

Da das Ultrakontinuum die Mächtigkeit des Kontinuums hat, so existiert eine umkehrbar eindeutige Abbildung Φ, welche das Ultrakontinuum auf das Kontinuum abbildet.

Jede Menge A_u geht dabei in eine — im allgemeinen nicht abgeschlossene — Menge von reellen Zahlen über. Für diese gilt natürlich ebenfalls der Satz 5. Es ist also dann die Frage nach der Mächtigkeit derselben beantwortbar.

Ist, wie zu vermuten steht, $2^{\aleph_1}$ größer als $2^{\aleph_0}$, so wäre damit die Klassifikation nach Mächtigkeiten für ein größeres Gebiet von Mengen entschieden, als dies bisher möglich war.

Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem.

Von

JULIUS KÖNIG in Budapest.

Nach schweren Bedenken entschließe ich mich, das Folgende der Öffentlichkeit zu übergeben. Welche Aufnahme immer die darin enthaltene Auffassung finden möge, so glaube ich doch, daß die angeregten Fragen in der weiteren Entwicklung der Mengenlehre nicht übergangen werden können.

Daß das Wort „Menge" promiscue für ganz verschiedene Begriffe verwendet wird, und hieraus die scheinbaren Paradoxien dieses jungen Wissenschaftszweiges entstehen; daß ferner auch die Mengenlehre, wie jede exakte Wissenschaft, der axiomatischen Annahmen nicht entbehren kann, und daß für diese, wenn sie auch hier viel tiefer liegen, ebenso wie in anderen Disziplinen eine gewisse Willkürlichkeit vorhanden ist: — das alles will ich nicht als neu hinstellen. Doch glaube ich, in bezug auf diese Fragen auch in dieser fragmentarischen, vorläufigen Mitteilung neue Gesichtspunkte zu bieten. Insbesondere kann wohl die *spezielle* Theorie der wohlgeordneten Mengen nicht als vollständig begründet angesehen werden, solange die unter 4. behandelten Fragen nicht geklärt sind.

1. Ist $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ eine abzählbar unendliche Reihe positiver ganzer Zahlen (vom Typus ω), so sollen die Dinge

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots)$$

die als „Kontinuum" bezeichnete Menge definieren. Ist man von einer anderen Definition des Kontinuums ausgegangen, so sind die $(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$ Symbole, die die Elemente des Kontinuums einerseits eindeutig bestimmen, andererseits voneinander genau unterscheiden.

Ein Element des Kontinuums soll „endlich definiert" heißen, wenn wir mit Hilfe einer zur Fixierung unseres wissenschaftlichen Denkens geeigneten Sprache in endlicher Zeit ein Verfahren (Gesetz) angeben können, das jenes Element des Kontinuums von jedem anderen begrifflich sondert, oder — anders ausgedrückt — für ein beliebig gewähltes k die Existenz einer und nur einer zugehörigen Zahl a_k ergibt.

Dabei muß aber ausdrücklich betont werden, daß die hierin geforderte „endliche" begriffliche Sonderung nicht mit der Forderung eines wohl-

definierten oder gar endlichen Verfahrens zur Bestimmung der a_k verwechselt werden darf.

Man zeigt sehr leicht, daß *die endlich definierten Elemente des Kontinuums eine Teilmenge des Kontinuums von der Mächtigkeit* $\aleph_0$ *bestimmen*, die wir weiterhin mit E bezeichnen wollen.

Eine solche endliche Definition muß nämlich durch eine endliche Zahl von Buchstaben und Interpunktionszeichen, die selbst nur in bestimmter, endlicher Zahl vorhanden sind, vollständig gegeben sein. Man kann weiter jene verschiedenen endlichen Definitionen wieder so anordnen, daß jeder beliebigen Definition eine und nur eine bestimmte positive ganze Zahl als (endliche) Ordnungszahl entspricht.

Jedes endlich definierte Element des Kontinuums bestimmt, da ja für ein solches Element verschiedene „endliche" Definitionen existieren können und auch wirklich vorhanden sind, eine Reihe von positiven ganzen Zahlen, unter denen demnach die kleinste eindeutig bestimmt ist, und die wieder — durch die zugehörige Zeichenkombination — das betreffende endlich definierte Element des Kontinuums eindeutig bestimmt.

E ist daher einer Teilmenge der aus den positiven ganzen Zahlen bestehenden Menge äquivalent. Da aber

$$(a, a, \cdots, a, \cdots),$$

wo a eine beliebige positive ganze Zahl sein kann, ein endlich definiertes Element des Kontinuums ist, folgt hieraus weiter:

$$\mathfrak{e} = \aleph_0,$$

wenn wir die Mächtigkeit von E mit $\mathfrak{e}$ bezeichnen.

Da aber das Kontinuum seiner Definition nach nicht abzählbar ist, muß es Elemente des Kontinuums geben, die nicht endlich definiert sein können.

2. Wenn ich im Augenblick auch noch darauf verzichten muß, eine genaue und systematische Darstellung zu geben, ist es doch unbedingt notwendig, die in dem bisherigen Gedankengange enthaltenen axiomatischen Annahmen zu präzisieren.

a) Es wird vor allem die „Tatsache" angenommen, daß es in unserem Bewußtsein sich abspielende Prozesse gibt, die den formalen Gesetzen der Logik genügen und als „wissenschaftliches Denken" bezeichnet werden, und daß es unter diesen auch solche gibt, die mit anderen ebensolchen Prozessen, der Erzeugung jener früher beschriebenen Zeichenfolgen, in gegenseitig eindeutiger Beziehung stehen.

Die Frage, „wie" diese Beziehung zustande kommt, oder gar „wie weit" diese Beziehungen erstreckt werden können, wird dabei gar nicht berührt. (*Metalogisches Axiom.*)

b) Jede „beliebige" aus positiven ganzen Zahlen gebildete Folge vom Typus ω und der „Inbegriff aller dieser Folgen", den wir „Kontinuum"

nennen, sind „mögliche Begriffe", d. h. solche, die an sich zu keinem logischen Widerspruche führen. (*Kontinuum-Axiom.*)

Eine weitere gründliche Analyse dieser Behauptung ist — wie ich glaube — in jenen Entwicklungen enthalten, die Herr Hilbert dem III. Internationalen Mathematiker-Kongresse in Heidelberg vorgetragen hat. (Kongr.-Verh. pag. 174.)

Insbesondere enthält diese Definition des Kontinuums die Behauptung, daß dessen Mächtigkeit" $\aleph_0^{\aleph_0}$ ist.

Daß weiter dann $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$ ist, kann z. B. nach der in meiner Note „Zum Kontinuumproblem", Math. Ann. Bd. 60, p. 177, gegebenen Methode bewiesen werden.

Ich stelle mich damit in bewußten Gegensatz zu der Annahme, daß es *nicht* gestattet ist, über „endliche Gesetze" hinauszugehen. Mit dieser Annahme wird meiner Ansicht nach die Existenz des Kontinuums und des Kontinuumproblems geleugnet. Die hier benützte Annahme ist im Gegenteil die, daß es Elemente des Kontinuums gibt, die wir nicht „zu Ende denken" können, und die „trotzdem" widerspruchsfrei, also, wenn der Ausdruck in allerdings ganz neuem Sinne gestattet ist, „ideale" Elemente sind.

c) Wenn wir nun nach den bisherigen Annahmen von einem „beliebigen" Elemente des Kontinuums sprechen dürfen, benützen wir endlich die *logische Antithese*: „Ein beliebiges Element des Kontinuums ist entweder endlich definiert oder dies ist nicht der Fall." Nach a) und b) kann wohl diese Antithese nicht zurückgewiesen werden, um so weniger, da diese, ohne unsere Schlüsse zu ändern, auch subjektiv gefaßt werden kann: „Für ein beliebiges Element des Kontinuums ist eine endliche Definition sicher vorhanden, oder dies ist nicht der Fall."

3. Die bisher entwickelten Annahmen führen in merkwürdig einfacher Weise zu dem Schlusse, daß *das Kontinuum nicht wohlgeordnet werden kann.*

Denken wir die Elemente des Kontinuums als wohlgeordnete Menge, so bilden jene Elemente, die nicht endlich definiert werden können, eine Teilmenge jener wohlgeordneten Menge, die gewiß Elemente des Kontinuums enthält. Diese Teilmenge ist aber dann auch wohlgeordnet, und enthält ein und nur ein erstes Element. Man beachte ferner, daß nach den jetzt gültigen Annahmen das Kontinuum, wie jede wohlgeordnete Menge, eine lückenlose Folge bestimmter Ordnungszahlen definiert; und zwar in der Weise, daß jedem Elemente des Kontinuums eine und nur eine solche Ordnungszahl entspricht, wie auch umgekehrt. Es ist demnach „die einem endlich definierten Elemente des Kontinuums entsprechende Ordnungszahl", sowie auch „das einer endlich definierten solchen Ordnungszahl entsprechende Element des Kontinuums" endlich definiert. Es müßte

demnach in jener Folge eine erste nicht endlich definierbare Ordnungszahl vorhanden sein. Dies ist aber unmöglich.

Es gibt nämlich eine bestimmte (wohlgeordnete) Menge endlich definierter Ordnungszahlen, die von der ersten ab lückenlos aufeinander folgen. „Die der Größe nach auf alle diese zunächst folgende Ordnungszahl" wäre aber durch das Gesagte eben endlich definiert, während sie doch — der Annahme nach — nicht endlich definiert werden kann.

Die Annahme, daß das Kontinuum wohlgeordnet werden kann, hat demnach zu einem Widerspruch geführt.

4. Gegen die Richtigkeit der bisherigen Ausführungen erhebt sich beinahe unmittelbar der Einwand, daß dieselben ja Wort für Wort auf jede wohlgeordnete und nicht abzählbare Menge angewendet werden können, daß also solche Mengen überhaupt nicht existieren könnten. Da aber Cantors zweite Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ — „die Gesamtheit aller Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen von der Kardinalzahl $\aleph_0$" — widerspruchslos eine solche „Menge" definiert, muß in den bisherigen Schlüssen ein Denkfehler untergelaufen sein. Daß ein solcher Denkfehler aus diesem paradox scheinenden Resultate nicht folgen *muß*, soll noch ausführlicher auseinander gesetzt werden.

Das Wort „Menge" wird in den beiden Fällen für zwei total verschiedene Begriffe gebraucht.

Bei der Bildung des Kontinuumbegriffes ist die „beliebige" Folge $(a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots)$ das Primäre, Ursprüngliche. Aus dieser wird durch die Forderung, $a_1, a_2, \cdots$ durch bestimmte positive ganze Zahlen zu ersetzen, eine „bestimmte" Folge, ein Element des Kontinuums, das wir also, wenn überhaupt, auch von jedem anderen Elemente begrifflich gesondert denken. Die weitere Forderung, den *Inbegriff* dieser „wohlunterschiedenen" Objekte zu denken, führt dann zum Kontinuum.

Ganz anders steht die Sache bei der Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$. Ihre „Elemente" werden durch die „Eigenschaft", Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_0$ zu sein, bestimmt. Allerdings kennen wir solche Elemente: $\omega, \omega + 1, \cdots$; aber jene Eigenschaft ist nur eine Abstraktion, im besten Falle ein Mittel zur Unterscheidung zwischen in die Klasse gehörigen und anderen Dingen; gewiß aber keine Anweisung, nach der *jedes* Element von $Z(\aleph_0)$ gebildet werden kann. Hier ist das Primäre, Ursprüngliche der Kollektivbegriff, den ich — im Anschluß an Cantors Namengebung — eben deshalb gar nicht als „Menge", sondern als „Klasse" bezeichnen möchte; und erst aus diesem heraus werden *dann* der Klasse angehörende Elemente konstruiert.

Daß die zweite Zahlenklasse $Z(\aleph_0)$ als „fertige" Menge wohlunterschiedener, d. i. begrifflich durchweg gesonderter Elemente definierbar ist,

kann auch nach dem bisherigen Stande unserer mengentheoretischen Kenntnisse nicht als wahrscheinlich bezeichnet werden. Insofern die früher entwickelten Schlüsse richtig sind, wäre in dieser Darstellung sogar der Beweis enthalten, daß die zweite Zahlenklasse nicht als fertige Menge, d. i. als Inbegriff wohlunterschiedener, durchweg begrifflich gesonderter Elemente gedacht werden kann*).

Indem ich diese fragmentarischen Auseinandersetzungen schließe, gereicht es mir zur Genugtuung, konstatieren zu können, daß diese trotz ihres teilweise oppositionellen Charakters, soweit sie richtig sein mögen, nur den hohen Wert der genialen Cantorschen Schöpfung in neues Licht setzen. Die Opposition richtet sich nur gegen gewisse Vermutungen Cantors; der Inhalt der von ihm bewiesenen Sätze bleibt vollständig intakt. Ich bemerke noch endlich, daß die hier gegebene Unterscheidung zwischen „Menge" und „Klasse" die genannten Paradoxien („Menge aller Mengen" usw.) vollständig klärt.

Das Wesen des Vorstehenden habe ich in der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 20. Juni 1905 vorgetragen.

*) In dieser Tatsache liegt, wie ich glaube, der Ursprung jener Paradoxien in der Theorie der Ordnungszahlen, auf die zuerst Herr Burali-Forti aufmerksam gemacht hat.

Ich möchte hier noch einige kurze Bemerkungen hinzufügen, die das Verständnis der Ausführungen unter 4. vielleicht erleichtern.

Auch der Inbegriff der positiven ganzen Zahlen ist ursprünglich nur als „Klasse" gegeben. So definiert auch Herr Hilbert a. a. O. das „kleinste Unendlich". Doch scheint es, daß die Forderung, *diese* Klasse als fertige Menge zu denken, möglich, d. h. an sich widerspruchslos ist.

Hingegen wäre das Kontinuum nur als „fertige Menge", die zweite Zahlenklasse nur als Klasse oder (vielleicht ist der Ausdruck gestattet) „werdende Menge" denkbar.

Ich will noch auf einen sehr elementaren Kollektivbegriff hinweisen, der die Auffassung als „fertige Menge" gewiß *nicht* gestattet.

Wir gehen von der Gesamtheit aller endlichen Dezimalbrüche aus, die wir aber als unendliche Dezimalbrüche schreiben, indem wir an die unbesetzten Stellen überall die Ziffer 0 setzen.

Jede Stelle ist in diesen Gebilden frei besetzbar, d. h. wir können statt irgend einer Ziffer irgend eine andere Ziffer setzen, ohne aus der Gesamtheit der definierten Gebilde herauszutreten.

Trotzdem wäre es völlig unstatthaft, von einem Inbegriff aller Stellen als frei besetzbarer Stellen zu sprechen, offenbar wäre damit das in der Definition der frei besetzbaren Stellen enthaltene „Hemmungsprinzip" eliminiert. Dieses Hemmungsprinzip kann folgendermaßen gefaßt werden: „Die k^{te} Stelle kann frei besetzt werden, es muß aber eine positive ganze Zahl $l > k$ geben, so daß von der l^{ten} Stelle ab nur die Ziffer Null zur Verwendung gelangt."

Die Frage: „wieviel zugleich frei besetzbare Stellen gibt es?" kann durch keine Kardinalzahl (im Sinne Cantors) beantwortet werden und fordert die Schöpfung eines neuen „Zählbegriffs".

Schlömilch, Dr. Oskar, und Dr. **E. Naetsch,** Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. I. Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 3. Auflage, bearbeitet von Dr. E. Naetsch. Mit 85 Figuren im Text. [VIII u. 372 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 8.—

Schüssler, Dr. Rudolf, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u. 170 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 7.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. 3 Bände. gr. 8. [Von der 3. Aufl. an hat Prof. G. Scheffers in Darmstadt die Neubearbeitung übernommen.]

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. 3. Aufl. besorgt von G. Scheffers. Mit 85 Figuren im Text. [ca. 600 S.] geb. n. ℳ 10.—, in Leinwand geb. n. ℳ 11.— [Erscheint im Januar 1906.]

II. Band: Integralrechnung. 2 durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin. [XII u. 428 S.] 1899. geb. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 2. durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und E. Zermelo, Privatdozent an der Universität Göttingen. Mit 83 Figuren im Text. [XII u. 480 S.] 1904. geb. n. ℳ 9.—, in Leinwand geb. n. ℳ 10.—

Starke, Dr. H., Privatdozent in Berlin, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedr. Abb. [XIV u. 522 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 6.—

Stolz, Dr. Otto, und Dr. **J. Anton Gmeiner,** Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. In 2 Abteilungen. gr. 8.

I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. geb. n. ℳ 5.—

II. Abteilung. Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—612.] 1905. geb. ca. n. ℳ 9.—

Thomae, J., Geheimer Hofrat und Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. ℳ 2.80.

Vahlen, Karl Theodor, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 12.—

Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, vom 8. bis 13. August 1904. Herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses Prof. Dr. A. Krazer in Karlsruhe. Mit einer Ansicht von Heidelberg in Heliogravüre. [X u. 756 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 18.—

Wallentin, Dr. J., Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die Elektrizitätslehre. [X u. 344 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 12.—

Weber, H., Professor in Straßburg, und **J. Wellstein,** Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] 1903. geb. n. ℳ 8.— II. Band. Mit 38 Textfiguren. [XIV u. 600 S.] 1905. geb. n. ℳ 12.— [Bd. III. Unter d. Presse.]

Webster, Arthur Gordon, A. B. (Harv.) Ph. D. (Berol.), Professor of Physics, Clark University, Worcester, Mass., the dynamics of particles, and of rigid, elastic, and fluid bodies, being Lectures on Mathematical Physics. [XII u. 588 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 14.—

Wölffing, Dr. Ernst, Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts a. d. Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. 1. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI. 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 15.—

Mathematische Annalen Band 51 und Folge in der ganzen Serie oder einzeln zu kaufen gesucht. Gefällige Anerbieten unter N. 100 an die Verlagsbuchhandlung **B. G. Teubner** in **Leipzig** erbeten.

INHALT.

George Salmon. Von M. Noether in Erlangen 1

Sulle superficie algebriche che possieggono integrali di Picard della 2ª specie. Di Francesco Severi a Parma 70

Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades. Von Felix Klein in Göttingen 50

Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Sechster Bericht. Von Felix Klein in Göttingen 72

Über einen neuen Beweis der Kleinschen Relation zwischen den Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve. Von C. Juel in Kopenhagen 77

Ein Problem der Elimination. Von E. Netto in Gießen 88

On iterated limits of multiple sequences. By E. L. Dodd of New Haven (Connecticut) 95

Zur Theorie der Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen. Von Josef Kürschák in Budapest 109

Untersuchungen aus der Mengenlehre. Von Felix Bernstein in Halle a. S. (Mit 3 Figuren im Text) 117

Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem. Von Julius König in Budapest 158

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besondere Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 30 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 28.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf dem Titelblatt genannten Gesamtredaktion oder an **Dr. Otto Blumenthal**, Göttingen, Friedländerweg 33.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

61. Band. 2 Heft.

Mit 27 Figuren im Text.

Ausgegeben am 17. Oktober 1905.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

☛ **Generalregister zu den Mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammengestellt von *A. Sommerfeld*. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre.** *[XI u. 202 S.]* **gr. 8. geh. n. Mk. 7.—**

H. WIENERs Sammlung

Mathematischer Modelle

im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig.

Die Modelle der „Sammlung" sind für den geometrischen Unterricht an höheren Schulen und Hochschulen bestimmt und sollen dem Lernenden Raumformen und geometrische Beziehungen durch einfache und übersichtliche Darstellung nahe bringen.

Ebene Gebilde.

Drahtmodelle z. Projizieren. ℳ 6.— bis ℳ 10.—

Ebenflächige Gebilde.

Regelmäßige Vielflache Platons, Keplers und Poinsots, Modelle zur Theorie der Gruppen von Drehungen ℳ 7.— bis ℳ 24.—

Flächen 2. Ordnung.

Drahtmodelle, Hauptschnitte darstellend, Kugel mit Parallelschnitten ℳ 8.— bis ℳ 28.—. Bewegliche Modelle der Flächen 2. O. ℳ 25.— bis ℳ 48.—, und zwar Fadenmodelle (ohne Gewichte), Stabmodelle (mit „H. Wieners geschränktem Verbindungsgelenk"), Kreisschnittmodelle aus Drahtkreisen (mit demselben Gelenk).

Dreh- und Schraubenflächen.

Drehbare Drahtmodelle mit Meridian- und anderen ebenen Schnitten oder mit Haupttangentenkurven: Kreisring, Drehfläche eines zur Sinuslinie affinen Meridians, Wendelfläche, schiefe Regelschraubenfläche, Schrauben-Röhrenfläche. ℳ 30.— bis ℳ 175.—

Raumkurven und abwickelbare Flächen.

16 Fadenmodelle der abwickelbaren Flächen von Raumkurven, zur Darstellung ihrer Stellen mit Fortschreiten oder Rückkehr von Punkt, Tangente und Schmiegungsebene, und zwar bei endlicher Lage des Punktes, unendlich ferner Lage der Schmiegungsebene, oder der Tangente, oder des Punktes. ℳ 40.— bis ℳ 45.—

Sämtliche Modelle können einzeln oder in Reihen bezogen werden. Das ausführliche Verzeichnis mit Abbildungen und genauen Preisangaben wird auf Verlangen von B. G. Teubner in Leipzig, Poststr. 3, frei geliefert.

Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen.

Von

Gerhard Hessenberg in Grunewald bei Berlin.

Inhalt.

Seite
§ 1. Einleitung 161
§ 2. Andere Formulierung des Desarguesschen und Pascalschen Satzes 162
§ 3. Analoges Problem für den Raum 164
§ 4. Der affine Beweis 165
§ 5. Vorbereitung des projektiven Beweises 166
§ 6. Der projektive Beweis 169
§ 7. Einzelheiten zum projektiven Beweis 170

§ 1.

Einleitung.

Daß der Pascalsche Satz aus dem Desarguesschen durch reine Verknüpfung nicht gefunden werden kann, hat Herr Hilbert in den „Grundlagen der Geometrie" gezeigt. Daß aber umgekehrt der Desarguessche Satz eine Folge des Pascalschen ist und durch reine Verknüpfung aus ihm hergestellt werden kann, scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein. Wenigstens finden sich in allen den Gegenstand behandelnden Arbeiten Bemerkungen wie die, daß der projektive Fundamentalsatz aus dem Desarguesschen und Pascalschen Satz folgt, oder daß jeder ebene Schnittpunktsatz aus dem Pascalschen und Desarguesschen Satz bewiesen werden kann. Ferner finden sich zumeist beide Sätze nebeneinander zum Aufbau einer Streckenrechnung verwandt. Es darf also angenommen werden, daß der Desarguessche Satz als ein unentbehrlicher Bestandteil des Fundamentalsatzes ziemlich allgemein angesehen wurde.

Der hier gegebene Beweis des Desarguesschen Satzes ist zuerst auf projektivem Wege gefunden worden. Indem ich nach dem Vorbild der „Grundlagen" die Figur des Beweises affin spezialisierte*), erhielt ich den

*) d. h. indem eine der Geraden der Konfiguration als unendlichferne der euklidischen Geometrie gewählt wurde.

sehr einfachen und übersichtlichen Beweis, der im vierten Paragraphen dem projektiven Beweis vorangestellt ist. Den projektiven Beweis glaubte ich trotzdem nicht unterdrücken zu sollen, weil er einen tieferen Einblick in das ganze Verfahren gibt und besonders die Wahl der Hilfslinien methodisch rechtfertigt, während sie im affinen Beweis als Kunstgriffe erscheinen.

Aus dem affin spezialisierten Beweis läßt sich andererseits eine Folgerung ziehen, die sich aus dem projektivisch allgemeinen Beweis nicht so unmittelbar ergibt. Aus dem *affin spezialisierten* Desarguesschen Satz ergibt sich nämlich die Gültigkeit des *allgemeinen, weil er bereits die Existenz sämtlicher ebenen Zentralkollineationen nach sich zieht.**) Aus dem gleichen Grunde gilt dann aber auch zu *jedem* affin spezialisierten Schnittpunktsatz die projektive Verallgemeinerung, so daß wir speziell behaupten können, *daß die Gültigkeit des affinen Pascalschen Satzes*, indem sich aus ihr die des affinen Desarguesschen Satzes ergibt, *die des allgemeinen Pascalschen zur Folge hat. Der Pascalsche Satz in Herrn Hilberts spezieller Formulierung ist also mit dem projektiven Fundamentalsatz inhaltlich gleichwertig und genügt zum Beweise aller ebenen Schnittpunktsätze.*

§ 2.

Andere Formulierung des Desarguesschen und Pascalschen Satzes.

Der affin spezialisierte Desarguessche Satz lautet:

I) *Ist* $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_1A_3 \parallel B_1B_3$, *so ist auch* $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, *wenn* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 *durch einen Punkt* O *laufen, und umgekehrt.*

Die Figur dieses Satzes besteht aus zwei homothetischen**) Vier-

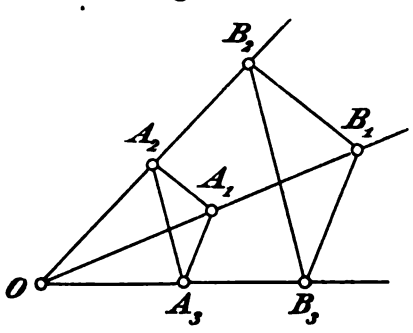


Fig. 1.

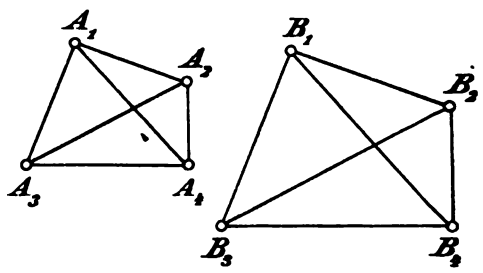


Fig. 2.

ecken in spezieller Lage: $OA_1A_2A_3$ und $OB_1B_2B_3$. Es ist nun aus den

*) Der Beweis steht implizite in Kap. V der „Grundlagen". Siehe hierzu auch meine Arbeit „*Desarguesscher Satz und Zentralkollineation*", Archiv. d. Math. u. Phys. III. Reihe, Bd. 6.

**) homothetisch = ähnlich und ähnlich gelegen.

Elementen der projektiven Geometrie bekannt, daß hieraus sofort der allgemeine Satz über homothetische Vierecke*) folgt:

Ia) *Ist* $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_1A_3 \parallel B_1B_3$, $A_1A_4 \parallel B_1B_4$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, $A_2A_4 \parallel B_2B_4$, *so ist auch* $A_3A_4 \parallel B_3B_4$.

Da (I) ein Spezialfall von (Ia) ist, sind die Sätze (I) und (Ia) äquivalent. Der Desarguessche Satz spricht also die Existenz homothetischer Vierecke aus, und diese Existenz bedarf darum eines besonderen Satzes, weil durch fünf Paar paralleler Seiten das sechste mitbestimmt ist, also der Bedingung der Parallelität zunächst nicht unterworfen werden kann.

In zwei Vierecken können nun die Seiten des einen denen des andern noch auf eine zweite Art parallel sein, die man als *Reziprozität* bezeichnet. Nennt man ein Paar von Seiten entsprechend, wenn sich die Ecken entsprechen, so ist im *homothetischen* Fall jede Seite zu ihrer entsprechenden, im *reziproken* Fall dagegen jede Seite zur *Gegenseite* ihrer entsprechenden parallel. Die Existenz reziproker Vierecke erfordert ebenso wie die der homothetischen einen besonderen Satz, und dieser lautet:

IIa) *Ist* $A_1A_2 \parallel C_3C_4$, $A_1A_3 \parallel C_2C_4$, $A_1A_4 \parallel C_2C_3$, $A_2A_3 \parallel C_1C_4$, $A_2A_4 \parallel C_1C_3$, *so ist auch* $A_3A_4 \parallel C_1C_2$.

Ein spezieller Fall dieses Satzes ist der Pascalsche, welcher lautet:

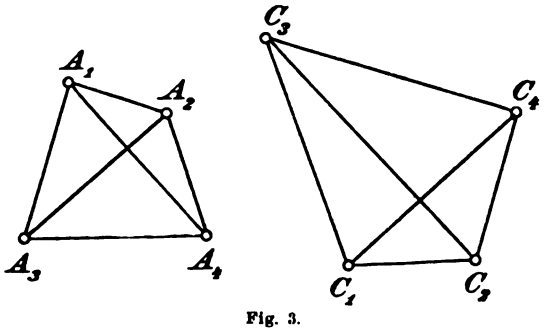


Fig. 3.

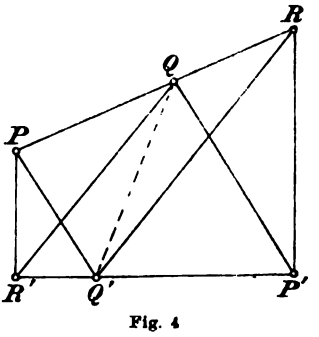


Fig. 4

II) *Liegen P, Q, R auf einer Geraden, und ist* $PQ' \parallel QP'$, $PR' \parallel RP'$, *so ist auch* $QR' \parallel RQ'$, *wenn P', Q', R' in einer Geraden liegen, und umgekehrt.***)

Die Figur dieses Satzes besteht nämlich aus zwei reziproken Vierecken in spezieller Lage, $PQQ'R'$ und $Q'P'RQ$, deren Ecken sich in der angeschriebenen Reihenfolge entsprechen.

Es ist aber (IIa) auch eine Folge von (II). Denn nach unserer Behauptung ist (I) eine Folge von (II), (Ia) eine Folge von (I). Auf Grund

*) „Viereck" steht hier stets im Sinne von „vollständiges Viereck".

**) Der Zusatz „*und umgekehrt*" ist in (I) wie in (II) logisch betrachtet unnötig

von (II) können wir zu jedem Viereck spezielle reziproke und zu diesen nach (Ia) alle homothetischen konstruieren. Damit erhalten wir aber alle zu dem ursprünglichen reziproken Vierecke, denn es gilt der Satz:

(III) *Sind zwei Vierecke zu einem dritten reziprok, so sind sie zueinander homothetisch.*

Umgekehrt erkennen wir jetzt aus den neuen Formulierungen des Desarguesschen und Pascalschen Satzes, (Ia) und (IIa), daß auf Grund von (III) der erste eine Folge des zweiten ist.

Das Verhältnis der beiden Sätze ist in mancher Hinsicht analog zu dem von Kongruenz und Symmetrie. Aus der Existenz symmetrischer folgt unmittelbar die kongruenter Dreiecke, das Umgekehrte aber nur unter Zuhilfenahme von Stetigkeitsbetrachtungen. Ebenso folgt aus der Existenz reziproker Vierecke die der homothetischen, die Umkehrung ist aber nur mit Verwendung der Stetigkeit möglich. Die Untersuchungen von Herrn Hilbert, Grundlagen Kap. VI und Anhang II, machen es indessen zum mindesten unwahrscheinlich, daß mehr als eine bloße Analogie vorliegt.

Die vorstehende Betrachtung spielt bei dem noch zu gebenden Beweis keine Rolle, ich habe sie daher vorweggenommen.

§ 3.

Analoges Problem für den Raum.

Der Desarguessche Satz ist in der räumlichen Geometrie aus den Verknüpfungsaxiomen nach Einführung idealer Elemente beweisbar. Für die räumlichen Verknüpfungsaxiome ist aber der wesentliche neue Grundbegriff die Ebene und diese kann durch Definition eingeführt werden, wenn folgender Grundsatz anerkannt wird:

(Ib) *Gibt es zu vier Punkten $ABCD$ einen fünften, X, der sowohl auf der Geraden AB wie auf der Geraden CD liegt, so gibt es auch einen Punkt Y, der mit AC sowohl wie mit BD in gerader Linie liegt.**)

Dem Pascalschen Satz entspricht dagegen folgender Raumsatz, der aus reinen Verknüpfungen, also auch aus (Ib) nicht herzuleiten ist:

(IIb) *Sind g_i, h_k, $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ zwei Quadrupel von Geraden, so folgt aus der Existenz von fünfzehn der Schnittpunkte $(g_i h_k)$ die des sechzehnten.*

Man kann nun hier die Frage aufwerfen, ob (Ib) in (IIb) enthalten ist, d. h. ob aus der Existenz der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung

---

*) Gauß, Werke, Bd. VIII. S. 162, 189, 194, 200, 224. (Zitiert nach Vahlen, Abstrakte Geometrie, S. 56.) Das Tatsächliche darf wohl als allgemein bekannt gelten. Ich bin Anfang der 90er Jahre von Dr. Zermelo auf die Bedeutung des Satzes (Ib) aufmerksam gemacht worden.

die der Ebene ohne Kongruenz und Stetigkeit gefolgert werden kann. Eine Antwort auf diese Frage vermag ich zur Zeit nicht zu geben. Bekannt ist bis jetzt nur, daß, *die Existenz der Ebene vorausgesetzt*, (II) mit (IIb) äquivalent ist.

§ 4.

Der affine Beweis.

Wir beweisen Satz I unter der Annahme, daß O ein wirklicher Punkt ist. Aus der Umkehrbarkeit des Satzes ergibt sich dann sofort seine Gültigkeit auch in dem besonderen Falle, daß A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 parallel sind.

Sodann setzen wir voraus, daß OA_2B_2 mit A_1A_3, B_1B_3 nicht parallel sei. Dies ist durch treffende Wahl der Bezeichnung nur dann *nicht* zu erreichen, wenn für *jede* Permutation (i, k, l) von $(1, 2, 3)$

$$OA_iB_i \parallel A_kA_l$$

und

$$OA_iB_i \parallel B_kB_l$$

wäre. In diesem Fall (der übrigens in einer Geometrie nicht möglich ist, in der die Anordnungssätze*) gelten) wäre aber die zu beweisende Behauptung bereits erfüllt.

Endlich sei hervorgehoben, daß A_iA_k nicht zu B_kB_l parallel sein darf, da sonst der Satz trivial wird. Wir gehen also von der die Allgemeinheit nicht beschränkenden Annahme aus, daß von den vier Geraden OA_1, OA_2, OA_3, A_1A_3 keine zwei parallel sind.

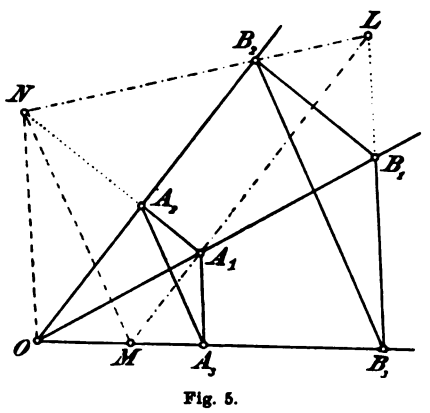


Fig. 5.

Wir ziehen sodann durch A_1 eine Parallele zu OA_2, die B_1B_3 in einem wirklichen Punkte L, OA_3 in einem wirklichen Punkte M schneidet. L fällt nicht nach B_2 und nicht auf die Gerade B_1B_2, da es in diesem Falle nur nach B_1 fallen könnte. Es ist also LB_2 eine eindeutig bestimmte, von B_1B_2 verschiedene, daher zu A_1A_2 nicht parallele Gerade. Sie trifft A_1A_2 in dem wirklichen Punkt N, den wir noch mit O und M verbinden.

---

*) Eine Geometrie, in der diese Singularität eintreten kann, ist in meiner Arbeit: „Über die projektive Geometrie" angegeben. Sitz.-Ber. der Berliner Math. Ges., Jahrg. II.

Nunmehr bilden O, A_1, B_1; L, B_2, N ein Pascalsches Sechseck. Es ist

A_1N parallel mit B_1B_2 nach Vorauss.,
A_1L „ „ OB_2 „ Konstr.

Also ist nach dem Pascalschen Satz

(1) ON parallel mit LB_1, d. h. mit B_1B_3.

Nach Voraussetzung ist daher auch

(2) ON parallel mit A_1A_3.

In dem Sechseck N, A_2, A_1; A_3, M, O ist

A_1M parallel mit OA_2 nach Konstr.,
A_1A_3 „ „ ON „ (2) ,

also ist nach dem Pascalschen Satz

(3) NM parallel mit A_2A_3.

Endlich ist in dem Sechseck O, M, B_3; L, B_2, N:

OB_2 parallel mit LM nach Konstr.,
ON „ „ LB_3 „ (1) ,

also ist nach dem Pascalschen Satz

(4) NM parallel mit B_2B_3,

und aus (3) und (4) folgt:

B_2B_3 parallel mit A_2A_3, w. z. b. w.

§ 5.

Vorbereitung des projektiven Beweises.

In diesem Paragraphen stellen wir diejenigen bekannten Betrachtungen kurz zusammen, die wir zur Durchführung des projektiven Beweises nötig haben. Wir bezeichnen mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_i, \cdots$ Punktreihen, mit kleinen Buchstaben x_i, y_i, z_i mit dem gleichen Index i die auf Γ_i gelegenen Punkte. Vorübergehend bezeichnet auch Γ_i die Gerade, auf der die Punktreihe liegt. Mittelpunkte von Strahlbüscheln werden mit großen Buchstaben P_{ik} bezeichnet, und die beiden Indizes bedeuten, daß das Strahlbüschel die Punktreihen Γ_i und Γ_k perspektiv aufeinander bezieht.

Dem projektiven Charakter der Betrachtung entsprechend wird hier zwischen eigentlichen und fingierten Punkten nicht unterschieden.

Eine perspektive Beziehung zweier Punktreihen $\Gamma_i\Gamma_k$ ist vollkommen und eindeutig beschrieben, wenn zwei nichtsinguläre Punktepaare x_ix_k, y_iy_k gegeben sind. Dabei ist als singuläres Punktepaar der Schnittpunkt $s_{ik} = s_i = s_k$ von Γ_i und Γ_k bezeichnet.

Projektiv heißen zwei Punktreihen Γ_1 und Γ_n, wenn sie Endglieder einer Folge $\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_n$ sind, in der jedes Glied zum vorhergehenden und folgenden perspektiv ist. *Notwendig* dafür, daß zwei projektiv bezogene Punktreihen auch perspektiv sind, ist die Bedingung, daß ihr Schnittpunkt sich selbst entspricht. Der projektive Fundamentalsatz erklärt diese Bedingung für *hinreichend*. Wiener und Schur haben bemerkt, daß es genügt, den projektiven Fundamentalsatz für eine dreigliedrige Folge $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ zu beweisen:

„Sind zwei Punktreihen Γ_1 und Γ_3 zu einer dritten Γ_2 perspektiv und entspricht ihr Schnittpunkt sich selbst, so sind sie zueinander perspektiv.

Jenachdem die Träger der drei Punktreihen durch einen Punkt laufen oder nicht, entsteht die Figur des Desarguesschen oder des Pascalschen Satzes. Betrachten wir zunächst die zweite. Γ_1 und Γ_2 haben das singuläre Paar $w_1 = w_2(w_{12})$, Γ_2 und Γ_3 das singuläre Paar $u_2 = u_3(u_{23})$ gemeinsam. Diese Paare sind voneinander verschieden

Im allgemeinen wird der Schnittpunkt von Γ_1 und Γ_3 sich nicht selbst entsprechen. Wenn dies eintreten soll, *so muß die Gerade $P_{12}P_{23}$ durch diesen Schnittpunkt $v_1 = v_3$ gehen*, denn sie stellt die beiden Projektionsstrahlen v_1v_2 und v_3v_2 vor, auf denen P_{12} und P_{23} liegen.

Um nun zu zeigen, daß Γ_1 und Γ_3 in der Tat perspektiv sind, konstruieren wir aus den nichtsingulären Paaren w_1w_3 und u_1u_3 den Punkt P_{13} und finden dabei, daß $P_{23}P_{13}$ durch w_{12}, $P_{13}P_{12}$ durch u_{23} gehen muß, da die Projektionsstrahlen w_1w_3 und u_1u_3 mit w_2w_3 d. h. $P_{23}w_{12}$ und u_1u_2 d. h. $P_{12}u_{23}$ identisch sind. *Es ist also notwendig, daß das Dreieck der Projektionszentren dem der Punktreihen umschrieben ist.*

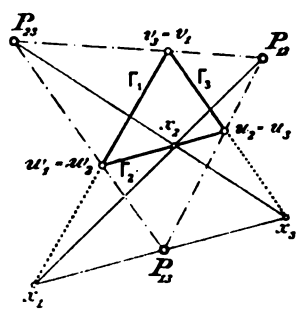


Fig 6.

Konstruieren wir jetzt zu x_1 über P_{12} den Punkt x_2, über P_{23} hierzu x_3, so entsteht die Figur des Pascalschen Satzes und x_1x_3 geht durch P_{13}, also sind Γ_1 und Γ_3 auf Grund des Pascalschen Satzes perspektiv.

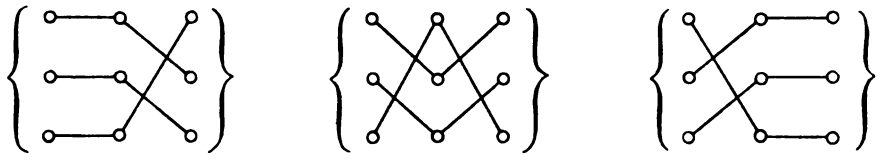
Sind zwei perspektive Punktreihen Γ_1, Γ_2, P_{12} und der Träger von Γ_3 gegeben, so kann auf diesem Γ_3 noch auf unendlich viele Arten so gewählt werden, daß es zu Γ_1 und Γ_2 perspektiv ist. Es sind nämlich nur die singulären Paare $u_2 = u_3$ und $v_1 = v_3$ vorgeschrieben, und wir dürfen zu einem beliebigen Paar x_1x_2 noch x_3 auf Γ_3 beliebig, aber natürlich von u_3, v_3 verschieden annehmen. Da nämlich P_{13} sich als Schnitt von x_1x_3 mit $P_{12}u_{23}$ und P_{23} sich als Schnitt von x_2x_3 mit $P_{12}v_{13}$ ergibt, sind zunächst die Projektionszentra P_{12}, P_{23} eindeutig festgelegt. $P_{12}P_{23}$ geht aber durch w_{12}, entweder eo ipso, wenn x_1x_2 das singuläre Paar $w_1 = w_2$

ist, oder auf Grund des Pascalschen Satzes, weil für ein nichtsinguläres Paar x_1, x_2 die Gerade $x_1 x_2$ durch P_{12} gehen muß.

Anmerkung. Diese bekannte Auffassung der Pascalschen Konfiguration als einer dreifachen Perspektivität wollen wir durch folgende symbolische, zwischen *geschweiften Klammern* zu schreibende Matrix zum Ausdruck bringen:

$$\begin{Bmatrix} P_{23} & P_{31} & P_{12} \\ u_{23} & v_{31} & w_{12} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{Bmatrix}$$

Jede Horizontale stellt ein Dreieck dar, dessen Ecken und Seiten der Konfiguration angehören. Je zwei Punkte einer Horizontalen sind also durch eine Gerade der Konfiguration verbunden, deren dritter Konfigurationspunkt in der dritten noch nicht berührten Vertikalen und eine Horizontale tiefer liegt (die erste Horizontale soll wieder unter der dritten stehend gedacht werden). Jedes Dreieck einer Horizontalen ist dem darüberstehenden ein-, dem daruntersteheuden umbeschrieben. Zwei Punkte einer Vertikalen sind nicht durch eine Konfigurationsgerade verbunden. Die Geraden der Konfiguration sind also im folgenden Schema enthalten:



Um die bekannte Sechseck-Auffassung der Konfiguration zu erhalten, verschieben wir eine Vertikale (etwa die mittlere) um eine Stelle nach oben und schreiben die so entstehende Matrix zwischen *Strichen:*

$$\begin{vmatrix} P_{23} & v_{31} & P_{12} \\ u_{23} & x_2 & w_{12} \\ x_1 & P_{13} & x_3 \end{vmatrix}$$

Dieses Schema ist bekannt: Die Geraden werden durch die drei Horizontalen und die sechs Glieder der entwickelten Determinante dargestellt. Je zwei Horizontalen stellen einen zerfallenen Kegelschnitt dar; unter jeder Ecke steht die Gegenecke und mit beiden in derselben Vertikalen der Schnittpunkt des Gegenseitenpaares, welches die beiden Ecken *nicht* enthält.

Diese beiden Schemata werden in § 7 zur schnelleren Beschreibung Pascalscher Konfigurationen verwandt.

§ 6.

Der projektive Beweis.

Es seien nunmehr $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ drei Punktreihen, die einen und denselben Punkt s gemeinsam haben. Wir nennen ihn je nach dem Zusammenhang auch s_1, s_2, s_3; s_{12}, s_{23}, s_{31}.

Der Desarguessche Satz behauptet: *Sind* Γ_1 *zu* Γ_2, Γ_2 *zu* Γ_3 *perspektiv, so ist erstens auch* Γ_3 *zu* Γ_1 *perspektiv, und zweitens liegen die drei Zentra* P_{12}, P_{23}, P_{31} *in einer Geraden.*

Es genügt, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Entweder nämlich gehen alle drei Geraden $P_{12}P_{23}$, $P_{23}P_{31}$ und $P_{31}P_{12}$ durch s; dann fallen sie zusammen, weil die drei Zentra verschieden von s sind. Oder es gehe etwa $P_{12}P_{23}$ nicht durch s, so schneidet es Γ_i in c_i, und es ist c_1 zu c_2, c_2 zu c_3, also c_3 zu c_1 entsprechend. Es geht darum nach der ersten Hälfte des Satzes c_3c_1 durch P_{31}, und da c_3 von c_1 (weil von s) verschieden ist, ist die Gerade c_3c_1 mit $P_{12}P_{23}$ identisch.

Für den zu führenden Beweis kommt es nun vor allem darauf an, eine Gerade h zu ziehen, die Γ_1, Γ_2, Γ_3 in drei Punkten p_1, q_2, r_3 trifft, von denen keine zwei einander entsprechen. Wir wählen zuerst den Schnittpunkt H dieser Geraden mit $P_{12}P_{23}$ willkürlich, aber von P_{12}, P_{23} und, falls s auf $P_{12}P_{23}$ liegen sollte, auch von s verschieden. (Dies

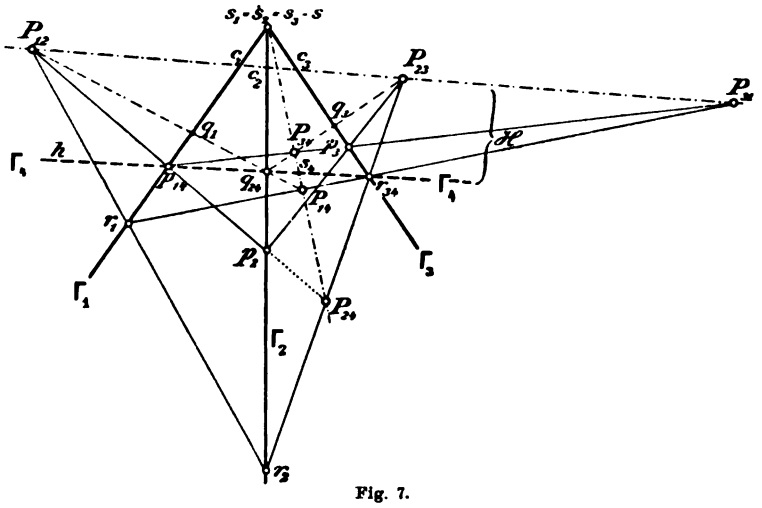


Fig. 7.

könnte nur in einer endlichen Geometrie unmöglich werden, in der eine Gerade nur drei Punkte enthält.*)) Die Gerade durch H und s entspricht

*) Es gibt nur eine solche und in dieser gilt nur ein Schnittpunktsatz. Vergl. „Über die projektive Geometrie", Sitzungsber. der Berliner Math. Ges., Jahrgang II.

der gestellten Bedingung nicht, ebensowenig die Gerade $HP_{12}P_{23}$. Jede andere aber genügt wenigstens der Bedingung, daß sich weder p_1 und q_2 noch q_2 und r_3 entsprechen.

Entweder ist es nun unmöglich, die Gerade h durch H so zu ziehen, daß auch p_1 und r_3 sich nicht entsprechen; *dann trifft aber die Behauptung des Desarguesschen Satzes zu*, und Γ_1, Γ_3 sind über H perspektivisch aufeinander bezogen. Oder es gibt eine Gerade der verlangten Eigenschaft, dann setzt der folgende Beweis ein.

Jeder der drei Punkte p_1, q_2, r_3 bestimmt ein Tripel p_i, q_i, r_i entsprechender Punkte, und alle neun Punkte sind voneinander verschieden. Wir wählen nun auf h eine Punktreihe Γ_4, die zu Γ_1 und Γ_2 perspektiv ist. Dann ist $p_1 = p_4$, $q_2 = q_4$ und es steht uns die Wahl eines dritten Tripels frei. Wir ordnen dem Paar r_1, r_2 den auf h gelegenen Punkt r_3 als r_4 zu.

Dies hat zur Folge, daß nach dem Pascalschen Satz Γ_4 auch zu Γ_3 perspektiv wird, denn es ist Γ_3 zu Γ_2 nach Voraussetzung, Γ_2 zu Γ_4 nach der Konstruktion von Γ_4 perspektiv, und Γ_4 und Γ_3 haben den Punkt $r_3 = r_4$ gemeinsam, der von $s_2 = s_3$ verschieden ist.

Danach ist also Γ_1 zu Γ_4, Γ_4 zu Γ_3 perspektiv. Da aber Γ_1 und Γ_3 den Punkt $s_1 = s_3$ gemeinsam haben und Γ_4 ihn nicht enthält, ist auch Γ_1 zu Γ_3 perspektiv, auf Grund des Pascalschen Satzes, und das war zu beweisen.

§ 7.

Einzelheiten zum projektiven Beweis.

Jede der drei Perspektivitäten $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4$, $\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$, $\Gamma_3\Gamma_1\Gamma_4$ gibt zu einer Pascalschen Konfiguration Anlaß, die wir aufschreiben wollen. In der ersten sind $p_1 = p_4$, $q_2 = q_4$, $s_1 = s_2$ die singulären Paare, $r_1, r_2, r_3 = r_4$ ist das nichtsinguläre Tripel. Das Schema lautet also:

$$(K_1) \qquad \begin{Vmatrix} P_{12} & P_{24} & P_{41} \\ s_{12} & q_{24} & p_{41} \\ r_4 & r_1 & r_2 \end{Vmatrix}, \text{ d. h. } \begin{Vmatrix} P_{12} & P_{24} & P_{41} \\ s & q_2 & p_1 \\ r_3 & r_1 & r_2 \end{Vmatrix},$$

und wir entnehmen daraus: P_{24} ist der Schnitt von $P_{12}p_1$ und r_2r_3, P_{41} ist der Schnitt von $P_{12}q_2$ und r_1r_3. *Die Punkte P_{14} und P_{24} liegen mit s in einer Geraden.*

In der zweiten Perspektivität sind $q_2 = q_4$, $r_3 = r_4$, $s_2 = s_3$ die singulären Paare, $p_2, p_3, p_4 = p_1$ ist nichtsingulär. Das Schema ist:

$$(K_2) \qquad \begin{Vmatrix} P_{32} & P_{24} & P_{43} \\ s_{23} & q_{24} & r_{43} \\ p_4 & p_3 & p_2 \end{Vmatrix}, \text{ d. h. } \begin{Vmatrix} P_{32} & P_{24} & P_{43} \\ s & q_2 & r_3 \\ p_1 & p_3 & p_2 \end{Vmatrix}.$$

Für P_{24} ergibt sich: es ist der Schnitt von $P_{23}r_3$ und p_1p_2. Dies sind aber die bereits genannten Geraden r_2r_3 und $P_{12}p_1$.

Für P_{43} ergibt sich: es ist der Schnitt von p_1p_3 und $P_{32}q_2$.

Endlich folgt: P_{24} *und* P_{34} *liegen mit* s *in einer Geraden.*

Wir ziehen hieraus und aus dem Ergebnis der Konfiguration (K_1) den wichtigen Schluß:

P_{14}, P_{24} *und* P_{34} *liegen in einer Geraden.* Dieselbe ist nichts anderes, als der Strahl $ss_4 = s_1s_4 = s_2s_4 = s_3s_4$. Das Ergebnis ist also zu erwarten gewesen.

Das Schema der dritten Perspektivität lautet:

$$(K_3) \qquad \begin{Bmatrix} P_{14} & P_{43} & P_{31} \\ p_{14} & r_{43} & s_{31} \\ q_3 & q_1 & q_4 \end{Bmatrix}, \text{ d. h. } \begin{Bmatrix} P_{14} & P_{43} & P_{31} \\ p_1 & r_3 & s \\ q_3 & q_1 & q_2 \end{Bmatrix}.$$

Wir entnehmen daraus als neues Resultat, daß P_{31} als Schnitt von p_1p_3, r_1r_3 auch auf q_1q_3 liegt. Für den weiteren Verlauf der Beweisführung ist dieses Resultat belanglos.

Wir sind jetzt in der Lage, ohne Betrachtung des degenerierten Dreiecks $c_1c_2c_3$ direkt aus der Figur zu erkennen, daß P_{12}, P_{23}, P_{31} in einer Geraden liegen. In der Figur findet sich nämlich folgende Pascalsche Konfiguration (K_4), die wir in der zweiten Schreibart zwischen Strichen darstellen:

$$(K_4) \qquad \left| \begin{matrix} P_{14} & P_{24} & P_{34} \\ p_1 & q_2 & r_3 \\ P_{23} & P_{31} & P_{12} \end{matrix} \right|.$$

Die sechs Punktetripel, die den Gliedern der entwickelten Determinante entprechen, liegen in Geraden, nämlich gerade in denjenigen, deren Schnitte die Punkte P_{14}, P_{24}, P_{34}, P_{13} ergaben. Von den drei Punktetripeln der Horizontalen liegt noch $p_1q_2r_3$ nach Definition in gerader Linie, für $P_{14}P_{24}P_{34}$ war die geradlinige Lage aus (K_1) und (K_2) erschlossen. Aus (K_4) folgt damit die geradlinige Lage von P_{12}, P_{23}, P_{31}.

Beachtet man, daß die Figur in den Dreiecken p_i und r_i eine Desarguessche Konfiguration enthält, und daß diese mit (K_1), (K_2) und (K_4) die Geraden p_1p_2 und r_2r_3 gemeinsam hat, so ergibt sich die Möglichkeit, den Beweis affin zu spezialisieren. Wählt man r_2r_3 als unendlichferne Gerade und setzt für

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad q_2 \quad r_1 \quad s \quad P_{12}. \quad P_{13} \quad P_{14} \quad P_{34}$$

die Bezeichnungen

$$O \quad A_2 \quad A_3 \quad N \quad B_1 \quad A_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad L \quad M,$$

so entsprechen den Punkten

	r_2	r_3	P_{23}	P_{24}
die Richtungen von	B_1B_2,	B_1B_3,	B_2B_3,	OA_2B_2,
	A_1A_2	A_1A_3	A_2A_3	LM,

und aus den Konfigurationen (K_1), (K_2), (K_4) werden genau diejenigen, die in § 4 nacheinander zum Beweise benutzt wurden.

Grunewald, April 1905.

Begründung der elliptischen Geometrie.

Von

Gerhard Hessenberg in Grunewald bei Berlin.

Inhalt.

Seite
§ 1. Einleitung 173
§ 2. Kreise und Kreisbüschel 174
§ 3. Pseudogeometrie 175
§ 4. Winkelvergleichung und Parallelverschiebung 177
§ 5. Allgemeine Streckenkongruenz 179
§ 6. Das Kreisbogenviereck 180
§ 7. Der Pascalsche Satz 182
§ 8. Der „kleine" Desarguessche Satz 183
§ 9. Übergang in die wirkliche Geometrie 184

§ 1.

Einleitung.

Nachdem Herr D. Hilbert die Geometrie der hyperbolischen Ebene vermittels der Endenrechnung allein auf ebenen Axiomen, zugleich unter Ausschluß des Archimedischen Axioms, aufgebaut hat, war zu erwarten, daß die analoge Aufgabe für die elliptische Ebene auch lösbar sei. Die Lehre von den Flächeninhalten und dem sphärischen Exzeß hat M. Dehn*) bereits in diesem Sinne dargestellt, so daß im wesentlichen noch der Nachweis der projektiven Geometrie für die elliptische Ebene zu erbringen blieb.

In der hier gegebenen Darstellung habe ich mich einer Pseudogeometrie bedient, eines Verfahrens, das auch Dehn**) mit Erfolg angewandt hat. Während Dehn die wirklichen Geraden auch als Pseudogeraden wählt, habe ich Kreise zu Pseudogeraden genommen. Dadurch erscheint zuletzt die wirkliche Geometrie in der Pseudogeometrie als

*) Über den Inhalt sphärischer Dreiecke, Math. Ann. 60.

**) Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, Math. Ann. 53.

ihr eigenes winkeltreues Bild. Zugleich gelingt durch die Übernahme der Winkelkongruenz aus der wirklichen in die Pseudogeometrie der Beweis des Pascalschen Satzes in recht einfacher Weise.

Die Einführung der Streckenvergleichung in die Pseudogeometrie habe ich völlig nach dem Dehnschen Vorgange ausgeführt. Als Hauptschwierigkeit stellt sich hier der Desarguessche Satz entgegen, der bei Dehn räumlich bewiesen wird. Nachdem mir unter ziemlichem Aufwand von Hilfsmitteln verschiedenster Art sein Beweis gelungen war, fand ich zuletzt, daß er eine Folge des Pascalschen Satzes ist; hierdurch ist die Arbeit schließlich bedeutend abgekürzt worden, vor allem ist die zuerst mit Erfolg angewandte Hilbertsche Streckenrechnung wieder in Wegfall gekommen.

§ 2.

Kreise und Kreisbüschel.

Die elliptische Geometrie von zwei Dimensionen ist im Euklidischen Raume als Sphärik verwirklicht, und zwar in derjenigen Form, bei der zwei „Gerade", d. h. für die Kugelgeometrie größte Kreise, sich stets in zwei und nur zwei Punkten schneiden. In dieser Form erleidet der Satz von der eindeutigen Bestimmung der Geraden durch zwei ihrer Punkte eine Ausnahme: diese Punkte dürfen keine Gegenpunkte sein.

Für die projektive Geometrie der Sphärik ist diese Ausnahme ohne Bedeutung. Ersetzt man das Grundelement „Punkt" durch „Punktepaar", so ist eine Gerade durch zwei voneinander verschiedene Punktepaare eindeutig bestimmt und zwei Gerade bestimmen ausnahmslos eindeutig ein Punktepaar. Durch die Zuordnung von Pol und Polare ist zugleich von vornherein das Reziprozitätsgesetz sicher gestellt. Jedem Punktepaare ist eine Gerade eindeutig zugeordnet und umgekehrt und ineinander liegenden Elementen entsprechen ineinander liegende. Also gilt zu jedem Schnittpunktsatze der reziproke.

Für die metrischen Fragen ist die sphärische Form der elliptischen Geometrie vorteilhafter als diejenige Form, in der zwei Gerade sich nur einmal schneiden. Denn die elliptische Ebene hat in der sphärischen Form den Zusammenhang einer zweiseitigen Fläche. Jede geschlossene Linie, auch die Gerade, teilt sie in zwei Teile. Dadurch ist der Betätigung der Raumanschauung bei der Beweisführung eine wesentliche Erleichterung geschaffen.

Vor allem aber gilt in der sphärischen Form der Satz:

I. *Durch drei Punkte geht stets ein und nur ein Kreis.*

Hierbei sind die Geraden mit zu den Kreisen gerechnet. Aus (I) folgt sofort, daß zwei Kreise sich höchstens in zwei Punkten schneiden

können. In der anderen Form der elliptischen Geometrie gehen dagegen durch drei Punkte vier Kreise, es gilt also weder (I) noch seine Umkehrung. Dies veranlaßt uns, im folgenden die sphärische Form zugrunde zu legen. In welcher Weise die Gültigkeit der gefundenen Resultate auf die einseitige elliptische Ebene zu übertragen sein wird, darf als bekannt gelten.

Zwei Kreise, die einen Punkt P gemeinsam haben, sind sicher nicht konzentrisch. Da die beiden Mittelpunkte eines Kreises ein Punktepaar bilden, ist also die Zentrale der beiden Kreise eindeutig bestimmt. Liegt zunächst P nicht auf der Zentrale, so erhält man durch Spiegelung von P an der Zentrale einen zweiten Punkt Q, der auch auf beiden Kreisen liegt. Die Kreise schneiden sich also zweimal.

Liegt zweitens P auf der Zentralen, so können beide Kreise keinen anderen Punkt gemein haben. Wir sagen dann, sie berühren sich in P. Berührt ein Kreis zwei andere in demselben Punkt P, so berühren sich diese beiden untereinander. Denn sind M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte, so liegt P auf M_1M_2 und auf M_1M_3, daher liegen $M_1M_2M_3$ mit P in einer Geraden, wenn von Nullkreisen abgesehen wird.

Damit erhalten wir die beiden Formen des Kreisbüschels mit reellen und mit zusammenfallenden Grundpunkten. Nennen wir die Gesamtheit aller Kreise durch einen festen Punkt P, deren Zentra auf einer festen Geraden p liegen, einen Kreisbüschel, so liegt entweder P auf p, und alle Kreise berühren sich in P. Jeder Kreis, der einen des Büschels in P berührt, gehört selbst zum Büschel. Oder P liegt nicht auf p. Dann sei Q der an p gespiegelte Punkt P. Alle Kreise des Büschels gehen durch P und Q, und jeder Kreis durch P und Q gehört dem Büschel an. Für beide Arten von Büscheln gilt:

II. *Durch jeden Punkt der Ebene geht ein und nur ein Kreis des Büschels.*

§ 3.

Pseudogeometrie.

Wir konstruieren nun folgende Pseudogeometrie in der elliptischen Ebene: Als Punkte der Pseudogeometrie wählen wir die Punkte der elliptischen Ebene unter Ausschluß eines bestimmten, an sich willkürlichen, der mit U bezeichnet wird. Sein Gegenpunkt heiße O.

Als Pseudogerade wählen wir die Kreise der wirklichen Geometrie, die U enthalten. Dann sind die Geraden durch O auch Pseudogerade und umgekehrt, und jede Pseudogerade, die zugleich Gerade ist, enthält O.

Durch zwei Punkte der Pseudogeometrie geht eine und nur eine Pseudogerade, auf Grund von Satz I.

Jeder Kreis durch U bestimmt einen Berührungsbüschel, nämlich den aller Kreise, die ihn in U berühren. Alle diese Kreise sind, da sie U enthalten, Pseudogerade, und da sie außer U keinen Punkt gemeinsam haben (nach II), sind sie *nichtschneidende* Pseudogerade der Pseudogeometrie. Wir nennen nichtschneidende Pseudogerade „parallel". Der Zusatz „*pseudo*" ist überflüssig, da die wirkliche Geometrie keine Parallelen hat.

Nunmehr folgt aus II: *Zu einer gegebenen Pseudogeraden kann durch einen Punkt nur und stets eine Parallele gezogen werden.*

Es gilt also in der Pseudogeometrie das Parallelenaxiom, und wir definieren danach in bekannter Weise die uneigentlichen Elemente der Pseudogeometrie: ein Berührungsbüschel mit dem Grundpunkte U heißt ein „*unendlichferner Punkt*" der Pseudogeometrie, die Gesamtheit aller unendlichfernen Punkte heißt die „*unendlichferne Gerade*".

Wir können jetzt die Elemente der wirklichen Geometrie denen der Pseudogeometrie in einfacher Weise zuordnen. Jeder Geraden p der wirklichen Geometrie entspricht ein Kreisbüschel, dessen Zentrale sie ist und dessen einer Grundpunkt U ist. Liegt U auf p, so ist der Büschel ein unendlichferner Punkt, den wir p zuordnen. Liegt U nicht auf p, so spiegeln wir U an p nach P und ordnen P der p zu. P ist ein zweiter Grundpunkt des Büschels, und der Büschel besteht aus allen Pseudogeraden durch P. Hierdurch ist jeder wirklichen Geraden ein Pseudopunkt zugeordnet und umgekehrt.

Jeder Pseudogeraden ordnen wir ein Punktepaar der wirklichen Geometrie zu, nämlich ihre beiden Mittelpunkte, die ihr als wirklichem Kreise zugehören. Damit ist umgekehrt jedem Punktepaare PQ der um P und Q als Mittelpunkte durch U gehende Kreis als Pseudogerade zugeordnet. Nur das Paar OU versagt. Diesem ordnen wir die unendlichferne Gerade zu.

Da jetzt ineinander liegenden Elementen wieder ineinander liegende entsprechen, muß jedem Schnittpunktsatz der einen Geometrie der reziproke Satz der anderen entsprechen. Ist also die projektive Geometrie für die Pseudogeometrie als gültig nachgewiesen, so gilt sie auch in der wirklichen.

Es mögen noch zwei Sätze hervorgehoben werden, wenngleich eine Anwendung von ihnen nicht gemacht werden wird:

III. *In der Pseudogeometrie gilt das Reziprozitätsgesetz.*

Denn es gilt in der wirklichen Geometrie.

IV. *Gilt in der Pseudogeometrie ein affin spezialisierter Schnittpunktsatz, so gilt seine projektive Verallgemeinerung.*

Als „affine Spezialisierung" bezeichnen wir mit Vahlen die Voraussetzung, daß eine Gerade unendlichfern sei. In den „Grundlagen der Geometrie" hat Herr Hilbert mit Erfolg die affine Spezialisierung des Pascal-

schen und Desarguesschen Satzes durchgeführt. Die affine Spezialisierung bedeutet für die wirkliche Geometrie, daß U ein Punkt der Figur sei. Da U beliebig gewählt werden darf, ist die Beschränkung auch für die Pseudogeometrie aufgehoben.

Von Satz III erfolgt eine Anwendung nicht, weil der fundamentale Pascalsche Satz ebenso wie der Desarguessche zu sich selbst reziprok ist. Satz IV ist dadurch überflüssig, daß der Pascalsche Satz wie auch der Desarguessche, sofern er affin spezialisiert gilt, auch allgemein gültig ist.

§ 4.

Winkelvergleichung und Parallelverschiebung.

Um in der Pseudogeometrie Strecken- und Winkelmessung einzuführen, stellen wir zunächst die Anordnungsaxiome her: Sind A, B, C drei Punkte auf einer Pseudogeraden, *so liegt B zwischen A und C, wenn es durch A und C von U getrennt ist.* Auf Grund dieser Definition erweisen sich in der Tat die Anordnungsaxiome der Euklidischen Geometrie für die Pseudogeometrie als gültig.

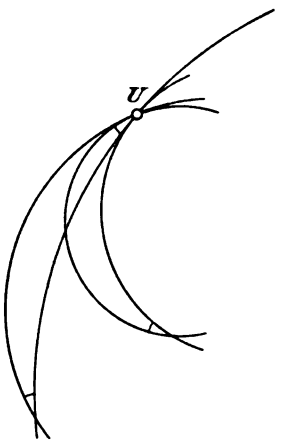


Fig. 1.

Wollen wir bei der Einführung der Winkelvergleichung mit der Euklidischen Geometrie in Übereinstimmung bleiben, so müssen wir dafür sorgen, daß Winkel mit gleichgerichtet-parallelen Schenkeln kongruent sind. Dies erreichen wir durch die Festsetzung, *daß Winkel im Sinne der Pseudogeometrie kongruent heißen sollen, wenn sie es im Sinne der wirklichen Geometrie sind.* Es ist nämlich eine einfache Folgerung aus den Kongruenzsätzen, daß zwei sich schneidende Kreise sich an beiden Schnittpunkten unter gleichen Winkeln treffen. Der Winkel zweier Pseudogeraden, die sich in P treffen, tritt daher bei U nochmals auf und ist nur abhängig von den beiden Berührungsbüscheln, denen die beiden Pseudogeraden angehören. Wir folgern daher speziell den Satz von der Gleichheit der inneren Wechselwinkel an Parallelen, auf Grund dessen die Winkelsumme im pseudogeradlinigen Dreieck zwei Rechte beträgt*).

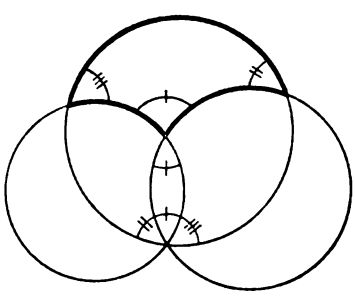


Fig. 2.

*) Vgl. hierzu die Bemerkung von Herrn Wallenberg in den Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges., Jahrg. IV, 2tes Stück, der Fig. 2 entnommen ist.

Wollen wir nun weiter die Streckenvergleichung so definieren, daß die Euklidische Geometrie zustande kommt, so schließen die bereits getroffenen Festsetzungen jede Willkür aus, und wir werden im Gegenteil zu zeigen haben, daß wir uns in keine Widersprüche verwickeln.

Seien zunächst PQ und RS zwei Strecken auf parallelen, voneinander verschiedenen Pseudogeraden. Stimmt noch die Richtung von P nach Q mit der von R nach S überein, so werden wir PQ und RS dann als pseudokongruent bezeichnen, wenn PR mit QS parallel ist. Denn dies trifft in der Euklidischen Geometrie zu. In Zeichen schreiben wir

$$PQ \parallel RS \text{ (gesprochen „parallel und gleich“).}$$

Da über verschieden oder entgegengesetzt gerichtete Strecken hiermit nichts ausgesagt ist, steht hiernach noch nicht fest, ob PQ zu QP kongruent ist.

Soll nun aus $PQ \parallel AB$, $RS \parallel AB$ auch $PQ \parallel RS$ folgen, so muß folgender Spezialfall des Desarguesschen Satzes gültig sein:

V. (Kleiner Desarguesscher Satz) *Laufen in zwei Dreiecken APR, BQS die Verbindungslinien homologer Ecken AB, PQ, RS parallel und sind zwei Seiten des einen, AP, AR, den homologen des anderen, BQ, BS, parallel, so ist auch das dritte Seitenpaar parallel.*

Daß dieser Satz in der Pseudogeometrie tatsächlich gilt, wird in § 8

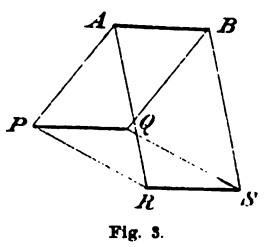


Fig. 3.

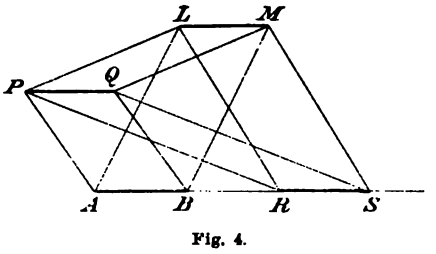


Fig. 4.

gezeigt werden. Vorläufig setzen wir seine Gültigkeit voraus und zeigen, daß sich nunmehr die Kongruenz auch für Strecken derselben Geraden definieren läßt.

Seien nämlich AB und RS zwei Strecken derselben Geraden, PQ eine Strecke außerhalb und $PQ \parallel AB$, so sagen wir, es sei

$$AB \parallel RS, \text{ wenn auch } RS \parallel PQ \text{ ist.}$$

Um zu zeigen, daß die Beziehung von der speziellen Wahl von PQ unabhängig ist, sei LM eine zweite außerhalb von AB und PQ gelegene Strecke und $LM \parallel AB$. Dann folgt aus $AB \parallel PQ$ weiter $LM \parallel PQ$ und aus $PQ \parallel RS$ weiter $LM \parallel RS$, also

$$AB \parallel LM \parallel RS.$$

Für Strecken LM auf PQ wende man das Beweisverfahren zweimal an.

§ 5.

Allgemeine Streckenkongruenz.

Nunmehr sind alle Strecken in Klassen parallelgleicher Strecken geordnet, wobei jede Strecke je nach der Stellung der Endpunkte als PQ und QP zu verschiedenen Klassen zu rechnen ist. Der Begriff der Kongruenz verschieden gerichteter Strecken kann nunmehr dadurch definiert werden, daß man aus jeder Klasse parallelgleicher Strecken einen Repräsentanten auswählt und für diese Gesamtheit der Repräsentanten die Kongruenz passend einführt.

Am nächstliegenden ist es, zu jeder Strecke eine parallelgleiche von O aus zu konstruieren. Dann haben alle Repräsentanten einen Endpunkt gemeinsam und sind auch Strecken im Sinne der wirklichen Geometrie, da die Pseudogerade durch O wirkliche Gerade sind.

Zwei entgegengesetzt gerichtete Repräsentanten OA und OB müssen nun dann als pseudokongruent erklärt werden, wenn im bisher definierten Sinne $AO \nparallel OB$ ist. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß durch einen an sich beliebigen Punkt P außerhalb von OA und OB eine Strecke $PQ \nparallel AO$ und $\nparallel OB$ gezogen werden kann. Wir treffen nun für P eine spezielle Wahl, indem wir durch O zwei Gerade OP', OQ' ziehen, derart, daß $\sphericalangle P'OA = \sphericalangle Q'OB = \alpha$ und OP' innerhalb des Winkels $Q'OA$ gelegen ist. Diese Gerade sind zugleich Pseudogerade, da sie durch O gehen.

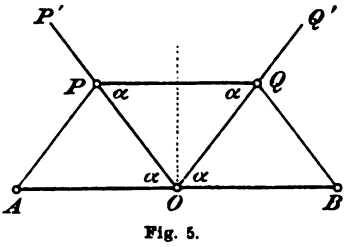


Fig. 5.

Nun ziehen wir durch A die Pseudogerade AP parallel mit OQ' bis zu P auf OP', dann PQ parallel mit AOB bis Q auf OQ'. Dann ist $PQ \nparallel AO$, und soll es auch $\nparallel OB$ sein, so ist QB parallel mit PO.

In dem pseudogeradlinigen Dreieck OPQ sind nun die Winkel bei P und Q einander gleich. Ziehen wir die wirkliche Gerade PQ, so bilden die Pseudo- und die wirkliche Gerade PQ bei P und Q als schneidende Kreise gleiche Winkel, also sind auch in dem wirklich geradlinigen Dreieck OPQ die Winkel bei P und Q gleich.

Errichten wir in O das Lot auf AB, so halbiert dies den Winkel POQ, steht also auf der wirklichen Geraden PQ senkrecht. Da es ferner durch U, den Schnittpunkt der Kreise AP und QB, geht, ergibt sich leicht, daß die ganze Figur im Sinne der wirklichen Geometrie symmetrisch, also OA zu OB wirklich kongruent ist.

Zuletzt betrachten wir den Fall zweier Repräsentanten OP, OQ, die nicht entgegengesetzt gerichtet sind. Sollen sie pseudokongruent sein, so

muß in dem pseudogeradlinigen Dreieck OPQ und nach dem eben gebrauchten Schlusse auch in dem wirklich geradlinigen Dreieck OPQ der Winkel bei P gleich dem bei Q sein, woraus folgt, daß OP zu OQ wirklich kongruent ist.

Damit finden wir, daß Strecken, die von O ausgehen, dann und nur dann als pseudokongruent zu bezeichnen sind, wenn sie wirklich kongruent sind. —

Nunmehr ist noch nachzuweisen, daß folgende zwei Kongruenzaxiome zutreffen:

a) Ist AB pseudokongruent PQ, BC pseudokongruent QR, C auf AB, B zwischen A und C, R auf PQ, Q zwischen P und R, so ist AC pseudokongruent PR.*)

b) Ist AB zu PQ, AC zu PR pseudokongruent und $\sphericalangle BAC$ gleich $\sphericalangle QPR$, so ist $\sphericalangle BCA$ gleich $\sphericalangle QRP$.**)

Nimmt man zunächst an, die Strecken, von deren Pseudokongruenz die Rede ist, seien auch parallel, so ergibt sich der erste Satz, weil aus $AP \parallel BQ$, $BQ \parallel CR$ auch $AP \parallel CR$ folgt; Satz (b) enthält die Figur des kleinen Desarguesschen Satzes, ist also richtig, sowie der fehlende Beweis für V erbracht ist.

Bringt man nunmehr im allgemeinen Fall durch Parallelverschiebung in (a) und (b) die Punkte A und P nach O, so ist zunächst leicht zu zeigen, daß die verschobenen Figuren im Sinne der wahren Geometrie kongruent sind; und daraus ergibt sich ihre Pseudokongruenz. Man beweist überhaupt ohne Mühe, daß jede wahre Rotation um O auch eine Pseudorotation und jede Spiegelung an einer Geraden durch O auch eine Pseudospiegelung ist.

§ 6.

Das Kreisbogenviereck.

Die Entwickelungen dieses Paragraphen sind vom Parallelenaxiom unabhängig und gelten daher ohne weiteres für die elliptische und die Euklidische Geometrie, was für § 9 von Bedeutung ist. (Für die hyperbolische Geometrie gelten unsere Resultate, sowie durch die Zusammenfassung der Kreise, Grenzkreise und Linien gleichen Abstands die Möglichkeit geschaffen ist, durch drei Punkte *stets* einen Kreis zu legen.)

Seien $ABCD$ vier Punkte, die durch Kreisbögen von irgend welchen Radien zu einem einfachen Kreisbogenviereck verbunden seien. Dann ist die Differenz der Gegenwinkelsummen dieses Vierecks nur von der Lage

*) Hilbert, Grundl., § 5 III, 3.

**) Ebenda, III, 6.

und Reihenfolge der vier Punkte, nicht aber von den Radien der verbindenden Kreisbögen abhängig. Ersetzt man nämlich irgend einen der Bögen, etwa AB, durch einen von anderm Radius, so ändern sich die Winkel bei A und B, also auch die Gegenwinkelsummen $\sphericalangle A + \sphericalangle C$ und $\sphericalangle B + \sphericalangle D$ um denselben Betrag; ihre Differenz bleibt also invariant. In diesem Sinne wollen wir den Ausdruck

$$(ABCD) = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA - \sphericalangle BCD - \sphericalangle DAB$$

als eine Invariante des Vierecks $ABCD$ bezeichnen.

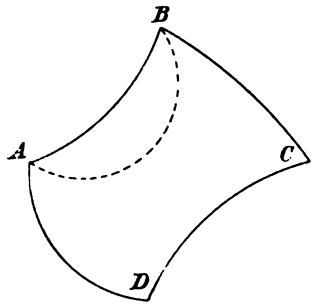


Fig. 6.

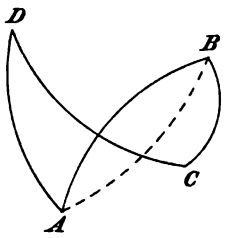


Fig. 7.

Die Figur 6 zeigt den Satz zunächst für den einfachen Fall, daß das Viereck sich nicht überschlägt. Beachtet man aber den Umlaufssinn der Winkel, so bleibt der Satz auch für das überschlagene Viereck formell unverändert, wenn man von Änderungen um den vollen Betrag von 2π absieht. Dies soll im folgenden auch geschehen, wo von dem „Verschwinden" der Invarianten die Rede ist.

Je nach der Anordnung der vier Punkte erhält man drei Invarianten:

$$(ABCD),\quad (ABDC),\quad (ACBD).$$

Von diesen gelten folgende wichtigen Sätze:

VI. *Die drei Invarianten verschwinden nur gleichzeitig.*

VII. *Das Verschwinden der Invarianten ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß A, B, C, D auf einem Kreise liegen.*

Liegen nämlich A, B, C, D auf einem Kreise, so bilden dessen Bögen die Seiten eines Kreisvierecks durch A, B, C, D. Im einfachsten Fall sind alle Winkel gleich π und die Invariante verschwindet. Aber auch bei überschlagener Anordnung der Ecken findet man stets die Invariante als Null oder 2π.

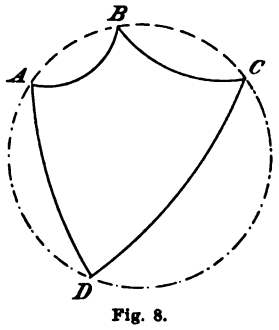


Fig. 8.

Ist umgekehrt $(ABCD) = 0$, so ersetze man die Bögen AB, BC durch die des Kreises ABC, die Bögen CD, DA durch die des Kreises CDA.

Dann folgt im einfachsten Falle, daß die Winkel bei B und D gestreckt, also die Summe der Winkel bei A und C ebenfalls gleich zwei gestreckten Winkeln ist. Nun sind die Winkel bei A und C als Winkel derselben Kreise einander gleich, also jeder gestreckt, woraus die Identität der beiden Kreise folgt. Im überschlagenen Fall ergeben sich einfache Modifikationen.

Hiermit ist Satz VII bewiesen, Satz VI ist eine Folge davon.

§ 7.

Der Pascalsche Satz.

Um nun die projektive Geometrie für die Pseudogeometrie nachzuweisen, stützen wir uns auf die Winkelkongruenz, das Parallelenaxiom und den Satz von der Winkelsumme. Dagegen dürfen wir von der Streckenkongruenz keinen Gebrauch machen.

Da nun jedes pseudogeradlinige Viereck im Sinne der wirklichen Geometrie ein Kreisbogenviereck ist und seine Winkel im Sinne der wirklichen Geometrie gemessen werden, gilt Satz VI für die pseudogeradlinigen Vierecke, und zwar mit der bekannten Modifikation, die durch das Hinzutreten des Satzes von der Winkelsumme entsteht. Für ein Viereck mit verschwindenden Invarianten sind nämlich die Gegenwinkel supplementär, wenn das Viereck nicht überschlagen ist, sie sind gleich im anderen Falle.

Hiernach aber kann der Beweis des Pascalschen Satzes auf demjenigen Wege geführt werden, den Herr Hilbert in den Grundlagen als dritten angibt. Um ihn nicht einfach abschreiben zu müssen, wollen wir ihn etwas anders darstellen.

Ob ein Viereck $ABCD$ verschwindende Invarianten hat, hängt, da jetzt das Parallelenaxiom gilt, nur von den Richtungen der Seiten ab. Und zwar bildet BC mit AB und CD dieselben Winkel, wie AD mit CD und AB. Wir wollen dafür kurz sagen, BC und AD seien *„antiparallel“* in bezug auf AB und CD. Die Bezeichnung lehnt sich an die kinematische des „Antiparallelogramms“ an. Satz VI nimmt nun folgende Form an:

VI*. *Ist in bezug auf AB und CD die Gerade AD zu BC antiparallel, so ist auch AC zu BD antiparallel.*

Ferner ist folgendes evident:

VIII. *Sind zwei Geraden zu einer dritten in bezug auf dieselben Richtungen antiparallel, so sind sie zueinander parallel.*

Sind nun g, g' zwei Gerade, ABC Punkte der ersten, $A'B'C'$ Punkte

der zweiten, AB' zu BA', AC' zu CA' parallel, so behauptet der Pascalsche Satz, daß auch BC' zu CB' parallel sei.

Im Beweis ist bei „antiparallel" stets „in bezug auf gg'" hinzuzudenken.

Wir ziehen AD' antiparallel zu BC', D' liege auf g'. Dann ist nach VI* BD' antiparallel zu AC'. Nach Voraussetzung folgt damit

(1) BD' antiparallel zu CA',

also nach VI*

BA' antiparallel zu CD'.

Damit nach Voraussetzung

(2) CD' antiparallel zu AB',

also nach VI*

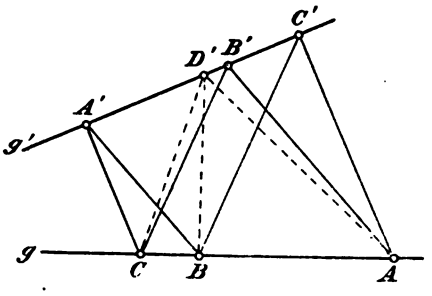


Fig. 9.

CB' antiparallel zu AD'.

Damit nach VIII:

BC' parallel zu CB', weil beide antiparallel zu AD'.

§ 8.

Der „kleine" Desarguessche Satz.

Nachdem der Pascalsche Satz bewiesen ist, gilt, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe*), auch der Desarguessche, folglich auch der kleine Desarguessche Satz V. Damit ist die Lücke ausgefüllt, die bei der Definition der Pseudokongruenz offen geblieben war.

Bei meinem Beweis des Desarguesschen Satzes in der affinen Spezialisierung wird vorausgesetzt, daß sich die Verbindungslinien homologer Ecken der parallelen Dreiecke in einem wirklichen Punkte schneiden. Nachdem unter dieser Annahme der Desarguessche Satz bewiesen ist, folgt, daß auch der bisher ausgeschlossene kleine Desarguessche Satz gilt, und zwar, genau genommen, durch apagogischen Beweis, weil durch wiederholte Umkehrung.

Ich habe mich überzeugt, daß auch der kleine Desarguessche Satz direkt beweisbar ist, doch ist mir der Beweis zur Wiedergabe nicht kurz genug. Dagegen ist es vielleicht angebracht, einen apagogischen Beweis des Satzes V direkt aus dem soeben bewiesenen Pascal anzugeben, da ja der allgemeine Desarguessche Satz hier nicht in Frage kommt, sein Beweis für diese spezielle Untersuchung also eigentlich ein Umweg ist. Wünschenswert wäre ein ganz einfacher Beweis des Satzes V direkt aus Satz VI*; einen wirklich einfachen besitze ich indes nicht.

*) Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, diese Zeitschrift, dieser Band, pg. 161.

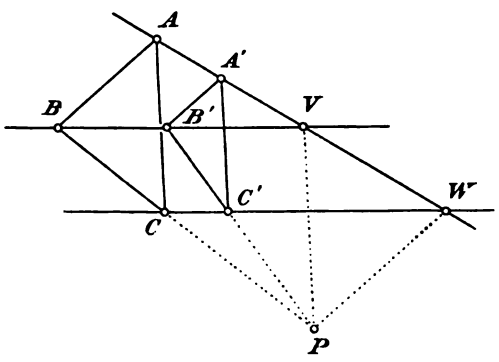


Fig. 10.

Wir beweisen folgenden Satz:

V*. *Es sei AB zu $A'B'$ AC zu $A'C'$, BB' zu CC' parallel. Dagegen sei AA' zu BB' und CC' nicht parallel, dann ist auch $B'C$ zu BC nicht parallel.*

Vorausgesetzt ist natürlich, daß A, B, C nicht in einer Geraden liegen.

Schneide AA' die BB' in V, die CC' in W. Wir ziehen $VP \parallel AC$, $WP \parallel AB$. P ist ein wirklicher Punkt, da AC und AB nicht parallel sind. Aus dem Pascalschen Sechseck $A'C'WPVB'$ folgt, daß P auf $B'C'$, aus dem Sechseck $ACWPVB$, daß P auf BC liegt. Also schneiden sich BC und $B'C'$, w. z. b. w. —

Durch Umkehrung folgt sofort Satz V.

§ 9.

Übergang in die wirkliche Geometrie.

Der Rückschluß von der Pseudogeometrie auf die wirkliche Geometrie erfolgt nun, nachdem der Aufbau der Euklidischen Geometrie in der Pseudogeometrie gesichert ist, am einfachsten über Satz VII, dessen Gültigkeit in beiden Geometrien jetzt feststeht. Jedes Viereck, dessen Seiten Kreisbögen von Kreisen durch U sind, ist ein pseudogeradliniges Viereck und umgekehrt, und seine Invarianten haben in beiden Geometrien gleiche Größe, verschwinden also in beiden gleichzeitig. Vier Punkte haben daher in beiden Geometrien gleichzeitig Kreislage, und aus Satz I schließen wir damit auf die Übereinstimmung der Kreise in beiden Geometrien:

IX. *Jeder eigentliche Kreis der Pseudogeometrie ist ein Kreis oder eine Gerade der wirklichen Geometrie, der U nicht enthält.*

Die Polare von O und U ist speziell ein Kreis H der Pseudogeometrie, für den alle Durchmesser auch wirkliche Gerade sind. Die Endpunkte eines jeden Durchmessers sind Gegenpunkte im Sinne der wirklichen Geometrie, daher sind alle Diametralkreise von H, und nur diese, die Geraden der wirklichen Geometrie; damit erhält man die bekannte Abbildung der Kugel auf ein Kreisnetz der Euklidischen Geometrie, aus der sich die Sphärik in bekannter Weise bis zur Trigonometrie weiter entwickeln läßt.

Grunewald, April 1905.

Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie.

Von

H. Liebmann in Leipzig.

Am Schluß meiner vorigen Abhandlung*) hatte ich, ermutigt durch Hilberts neue Begründung der hyperbolischen Geometrie, der Hoffnung Ausdruck verliehen, später einen rein geometrischen Beweis der Beziehungen erbringen zu können, die der bekannten einfachen Parallelenkonstruktion zugrunde liegen, einen Beweis, für den überdies räumliche Hilfskonstruktionen nicht erforderlich sein sollten. Die Hoffnung war nicht trügerisch: in der Tat kann die den Beweis stützende Beziehung zwischen dem rechtwinkligen Dreieck und dem Viereck mit drei rechten Winkeln auf ganz elementarem Weg gewonnen werden (§ 1), ja, der Beweis schließt sich sogar an einfache, schon von Lobatschefskij**) selbst ausgeführte Betrachtungen an. — Ich benütze die Gelegenheit, im Anschluß hieran auf eine neue Begründung der hyperbolischen Metrik hinzuweisen. Sowohl (§ 2) die Berechnung der Funktion $\Pi(p)$ (d. h. des Parallelwinkels zum Lot), wie die Aufstellung der trigonometrischen Grundformeln (§ 3) schließt sich an die Betrachtungen von selbst an.

*) Math. Annalen, Bd. 59, S. 128.

**) Vgl. S. 15—16 der i. f. mit „Lobatschefskij" angeführten Ausgabe von F. Engel (N. J. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von F. Engel, Leipzig 1899).

§ 1.

Nachweis der Beziehung zwischen dem Viereck mit drei rechten Winkeln und dem rechtwinkligen Dreieck. Anwendung auf die Parallelenkonstruktion usw.

Die absolute Parallelenkonstruktion*) beruht bekanntlich auf einer gewissen Zuordnung zwischen den Vierecken mit drei rechten Winkeln (und einem spitzen) und den rechtwinkligen Dreiecken. Wir knüpfen hier bei unserem neuen Beweis dieser bekannten Zuordnung an Beziehungen an, die Lobatschefskij beim rechtwinkligen Dreieck festgestellt hat (1), geben sodann die neuen Beziehungen für das Viereck (2), woraus endlich die gesuchte Zuordnung folgt. Außer der Parallelenkonstruktion (3) ergeben sich noch weitere wichtige Folgerungen (4).

1. *Das rechtwinklige Dreieck.* Die folgenden Beziehungen (1) bis (3′) hat Lobatschefskij einwandsfrei bewiesen und zwar mit Methoden, die wir sogleich (in 2) zur Ableitung von (I) bis (III′) anwenden werden. Daher darf ich mich wohl damit begnügen, die Formeln anzugeben und daneben zu schreiben, wo sie sich im Original — mit anderer Bezeichnung — vorfinden. Vorausgesetzt wird beim Beweis außer dem nichteuklidischen Parallelenaxiom nur die ohne Stetigkeitsbetrachtungen**) beweisbare Existenz des zu einem gegebenen Parallelwinkel $\Pi(p)$ gehörigen Lotes p.

Zur Abkürzung bezeichnen wir fortan die Lotstrecke mit dem lateinischen, den zugehörigen Parallelwinkel mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben, setzen also

$$\alpha = \Pi(a),\ \mu = \Pi(m) \text{ usw.},$$

und verstehen unter $a', p', \cdots$ die Strecken, deren Parallelwinkel die Parallelwinkel von $a, p, \cdots$ je zu einem rechten Winkel ergänzen, so daß demnach

$$\Pi(a) + \Pi(a') = \frac{1}{2}\pi \text{ usw.}$$

ist. Dann erscheinen die von Lobatschefskij bewiesenen Formeln für ein

*) Wir stellen einander gegenüber: Die *absolute* Parallelenkonstruktion und die *relative*: Sobald *irgend zwei parallele Gerade gegeben sind*, kann man mit Hilfe gewisser Sätze (Schnittpunkt der drei Höhen usw.) alle Konstruktionen ausführen, die das Ziehen von Parallelen erfordern (Math. Ann., Bd. 59, S. 116); diese Konstruktionen mögen als „relativ" bezeichnet werden. Hier dagegen handelt es sich darum, überhaupt zu einer Geraden die Parallele zu ziehen.

**) Lobatschefskij (S. 174) macht beim Beweis der Existenz der Lotstrecke, die zu dem Parallelwinkel $\Pi(p)$ gehört, von der Stetigkeit Gebrauch (vgl. die Bemerkung von Engel S. 332—333). Daß die Stetigkeit vermieden werden kann, zeigt auch Hilbert (Math. Annalen, Bd. 57, S. 142, Satz 3).

rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c, den Katheten a und b und den gegenüberliegenden Winkeln λ und μ in der folgenden Gestalt

$$\left.\begin{aligned} &(1) && \lambda + \Pi(c+m) = \beta, \\ &(1') && \mu + \Pi(c+l) = \alpha, \end{aligned}\right\} \text{ (a. a. O. S. 15, Gl. 1)}$$

$$\left.\begin{aligned} &(2) && \lambda + \beta = \Pi(c-m), \\ &(2') && \mu + \alpha = \Pi(c-l), \end{aligned}\right\} \text{ (S. 16, Gl. 2)}$$

$$\left.\begin{aligned} &(3) && \Pi(b+l) + \Pi(m-a) = \tfrac{1}{2}\pi, \\ &(3') && \Pi(m+a) + \Pi(l-b) = \tfrac{1}{2}\pi, \end{aligned}\right\} \text{ (S. 17, Gl. 5)}$$

wo (1'), (2'), (3') aus (1), (2), (3) einfach dadurch hervorgehen, daß man die beiden Katheten und zugleich die gegenüberliegenden Winkel untereinander vertauscht. Übrigens sind diese Formeln, was zu betonen vielleicht nicht überflüssig ist, in erster Linie nicht als (analytische) Gleichungen aufzufassen, sondern als bequeme Einkleidung geometrischer Aussagen.

2. *Das Viereck mit drei rechten Winkeln.* Es sei jetzt ein Viereck mit drei rechten Winkeln und mit dem spitzen Winkel β_1 gegeben (Fig. 1), bei dem wir die Bestimmungsstücke schon so bezeichnen, wie es für die in (3) abzuleitende Zuordnung zweckmäßig erscheint.*) Wie schon bemerkt wurde, behandeln wir dabei das Viereck genau in derselben Weise, wie Lobatschefskij a. a. O. das rechtwinklige Dreieck behandelt hat. Wir denken uns zuerst die Strecke c_1 um m_1 verlängert. Da die Winkel $\Pi(m_1)$ und $\Pi(m_1')$ nach der Definition der Strecke m_1' sich zu einem rechten ergänzen, so ist das im Endpunkt der verlängerten Viereckseite c_1 errichtete Lot nach der einen Seite hin zur Verlängerungvon a_1 parallel. Hieraus folgt

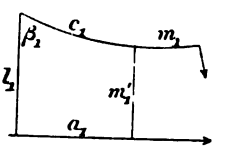


Fig. 1.

$$\lambda_1 + \Pi(c_1 + m_1) = \beta_1 .$$

Wir tragen dann (Fig. 2) m_1 auf c_1 nach der anderen Seite hin ab und errichten das Lot, das wegen der Definition von m_1 jetzt mit der Verlängerung von a_1 nach der anderen Seite hin parallel wird. Die Figur, in der wir noch durch den Scheitel des Winkels β_1 eine Parallele zu a_1 als Hilfslinie gezogen haben, ergibt dann unmittelbar die Beziehung

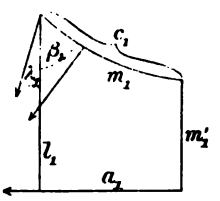


Fig. 2.

$$\lambda_1 + \beta_1 = \Pi(c_1 - m_1).$$

*) Ich verdanke diese Bemerkung Herrn Prof. Engel, der mich auch darauf aufmerksam machte, beim Nachweis der Zuordnung gerade die Stücke c und m' herauszugreifen (s. unten Nr. 3 dieses Paragraphen), aus denen einerseits das Dreieck, andererseits das Viereck wirklich konstruiert werden kann.

Man sieht (ganz ähnlich, wie dies Lobatschefskij für das rechtwinklige Dreieck gezeigt hat), daß diese unter einer ganz bestimmten Voraussetzung ($c_1 > m_1$) abgeleitete Beziehung auch noch für $c_1 < m_1$ bestehen bleibt, sobald die Festsetzung getroffen wird, daß unter dem Parallelwinkel einer negativen Strecke das Supplement des Parallelwinkels verstanden werden soll, der zur entsprechenden positiven Strecke gehört, wenn man also $\Pi(-a)$ durch die Formel

$$\Pi(-a) = \pi - \Pi(a)$$

definiert. (Diese Definition findet man z. B.: Lobatschefskij, S. 75.)

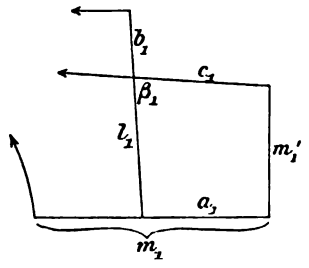


Fig. 3.

Wir verlängern endlich l_1 um b_1 und denken uns im Ende das Lot errichtet (Fig. 3), ebenso senkrecht auf der Verlängerung von a_1 die zu jenem ersten Lot parallele Gerade und erhalten so die Beziehung

$$\Pi(l_1 + b_1) + \Pi(m_1 - a_1) = \frac{1}{2}\pi.$$

Aus unseren drei Beziehungen folgen sofort drei weitere, weil es ja offenbar gestattet ist, darin gleichzeitig $c_1 m_1' a_1 l_1$ durch $l_1 a_1 m_1' c_1$ zu ersetzen. Es ergibt sich also:

(I) $$\lambda_1 + \Pi(c_1 + m_1) = \beta_1,$$

(I') $$\gamma_1 + \Pi(l_1 + a_1') = \beta_1,$$

(II) $$\lambda_1 + \beta_1 = \Pi(c_1 - m_1),$$

(II') $$\gamma_1 + \beta_1 = \Pi(l_1 - a_1'),$$

(III) $$\Pi(l_1 + b_1) + \Pi(m_1 - a_1) = \frac{1}{2}\pi,$$

(III') $$\Pi(c_1 + b_1) + \Pi(a_1' - m_1') = \frac{1}{2}\pi.$$

3. *Anwendung.* Mit Hilfe der Gleichungen (1)—(3) in 1. und (I)—(III) in 2. kann jetzt die in der Einleitung erwähnte, von Lobatschefskij auf anderem Weg erwiesene Zuordnung*) hergestellt werden.

Wir denken uns ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c und dem einen Winkel $\mu\left(<\frac{1}{2}\pi\right)$ konstruiert, was ja ohne weiteres ausgeführt werden kann, indem man an das eine Ende von c den Winkel μ anträgt und vom anderen Ende aus das Lot auf den zweiten Schenkel

*) Vgl. Lobatschefskij, S. 26 und F. Engel, Zur nichteuklidischen Geometrie. (Berichte der K. S. G. d. W., Math.-Phys. Klasse. Leipzig 1898, S. 181—198.)

des Winkels μ fällt. Die weiteren Bestimmungsstücke dieses Dreiecks wollen wir (nach 1.) mit a, b, λ bezeichnen. — Dann gibt es sicher ein Viereck mit rechten Winkeln, bei dem die in Fig. 1 mit c_1 bezeichnete Strecke gleich c ist und ebenso $m_1' = m'$. Wir können mit unseren Mitteln das Viereck zwar noch nicht konstruieren, weil wir nur die *Existenz* von m', aber noch keine *Konstruktion* dafür kennen; wir wissen aber, worauf es ankommt, nämlich daß dieses Viereck existiert und daß sein spitzer Winkel β_1 sowie die noch fehlenden Seiten a_1 und l_1 eindeutig bestimmt sind.

Jetzt zeigt uns ein Vergleich der Formeln (1) und (2) in Nr. 1 dieses Paragraphen mit (I) und (II) in Nr. 2, daß, wenn $c_1 = c$ und $m_1' = m'$ ist, die geometrisch durch das Dreieck bereits eindeutig bestimmten Stücke λ und β (oder l und b) genau in derselben Beziehung zu c und m' stehen, wie die durch das Viereck bestimmten Stücke λ_1 und β_1 (oder l_1 und b_1).

Hieraus folgt also

$$\beta_1 = \beta,\ \lambda_1 = \lambda \text{ (oder } b_1 = b,\ l_1 = l).$$

Die Gleichung (III), mit (3) verglichen, zeigt, daß dann auch noch

$$a_1 = a$$

ist.

Demnach haben wir den Satz:

Zu jedem rechtwinkligen Dreieck $(a, b, c; \lambda, \mu)$ gehört ein Viereck mit drei rechten Winkeln und einem spitzen Winkel β. Die Seiten des Vierecks sind, vom Scheitel des spitzen Winkels gerechnet, c, m', a, l. Umgekehrt gehört zu jedem Viereck mit den angegebenen Stücken ein entsprechendes rechtwinkliges Dreieck.

4. *Die Parallelenkonstruktion.* Wie an diese Zuordnung die verschiedensten Konstruktionen geknüpft werden können, das ist in der Literatur mehrfach ausgeführt worden. Es möge daher an dieser Stelle genügen, eine der verschiedenen leicht zu beweisenden Parallelenkonstruktionen einfach wiederzugeben*): „Um durch einen Punkt P außerhalb einer gegebenen Geraden g die eine der beiden Parallelen zu ihr zu ziehen, fälle man das Lot $PF(= m')$ auf die Gerade, errichte in P die Senkrechte g' auf PF, trage auf g von P aus eine beliebige Strecke $FG = c$ ab und fälle das Lot $GG' = l$ auf die Gerade g'. Die Strecke $G'P(= a)$ ist dann kleiner als c, so daß ein um P als Mittelpunkt konstruierter Kreis mit dem Halbmesser c die Strecke $G'G$ trifft, etwa in H. PH ist dann parallel zu FG."

4. *Weitere Folgerungen.* Die gefundene Zuordnung ergibt zugleich auch neue Beziehungen sowohl für das rechtwinklige Dreieck wie für das

*) Nach Engel (Lobatschefskij, S. 256.)

Viereck mit drei rechten Winkeln. Z. B. müssen jetzt die Gleichungen (I'), (II'), (III'), in denen die unteren Indizes einfach fort gelassen werden können, auch für das rechtwinklige Dreieck gelten, ebenso (1'), (2'), (3') für das Viereck. Weitere Beziehungen für das Viereck ergeben sich dann aus dem Umstand, daß man in (I'), (II'), (III') die Stücke a, b, l, m wieder durch b, a, m, l ersetzen kann usw.*)

Wir wollen von der Zuordnung Gebrauch machen, um eine von Lobatschefskij durch Benützung des *Raumes*, insbesondere eines gewissen rechtwinkligen sphärischen Dreiecks abgeleitete folgenreiche Zuordnung zweier rechtwinkligen (geradlinigen) Dreiecke zu erhalten.**)

Zum Dreieck gehört ein Viereck mit dem spitzen Winkel β und den Seiten c, m', a, l. Zu diesem Viereck muß sich dann aber ein zweites rechtwinkliges Dreieck konstruieren lassen, indem c und l wie auch m' und a ihre Rollen vertauscht haben. Das neue rechtwinklige Dreieck stimmt nur in einem Stück, nämlich in der Kathete b mit dem ersten überein, alle anderen haben sich geändert.***) Der Kathete b liegt jetzt der Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ gegenüber, die zweite Kathete ist m', der andere Winkel γ, die Hypotenuse ist gleich l.

Ebenso gehört zu dem gegebenen rechtwinkligen Dreieck $(a, b, c; \lambda, \mu)$ auch ein Dreieck $\left(a, l', m; \frac{1}{2}\pi - \beta, \gamma\right)$.

Geben wir alle Bestimmungsstücke in Form von Winkeln an, so haben wir den Satz:

Zu jedem rechtwinkligen Dreieck $(a, b, c; \lambda, \mu)$ *oder*

$$\frac{1}{2}\pi - \Pi(a),\ \lambda,\ \Pi(c),\ \mu,\ \frac{1}{2}\pi - \Pi(b) \tag{4}$$

gehört ein zweites mit den entsprechenden Stücken

$$\frac{1}{2}\pi - \Pi(a),\ \frac{1}{2}\pi - \Pi(b),\ \mu,\ \Pi(c),\ \lambda. \tag{4'}$$

Wir haben in (4) statt der Bestimmungsstücke zum Teil einfache Funktionen von ihnen verwendet. Dadurch und durch die gewählte Reihenfolge wird erreicht, daß man leicht einen gewissen Zyklus erkennt.

Schreibt man nämlich an die Seiten eines regulären Fünfecks die

---

*) Vgl. die Zusammenstellung von Engel (Lobatschefskij, S. 240).

**) Lobatschefskij, S. 210.

***) Stehen nur die am rechtwinkligen Dreieck abgeleiteten Beziehungen (1)—(3') zur Verfügung, so kann man beim zugeordneten Dreieck alle Stücke des ersten ausdrücken, nur der eine Umstand, daß in beiden Dreiecken dieselbe Kathete b auftritt, kann ohne weitere Hilfsmittel nicht bewiesen werden. (Vgl. Lobatschefskij, S. 17 und dazu Engels Bemerkung S. 239.)

Stücke in der Reihenfolge (4), so entsteht (4′) daraus durch Spiegelung der Figur am Mittellot der mit $\frac{1}{2}\pi - \Pi(a)$ bezeichneten Seite. (Die Stücke des auf der vorigen Seite zuerst gefundenen zugeordneten Dreiecks würden durch Spiegelung am Mittellot der mit $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)$ bezeichneten Seite erhalten werden.) Spiegelt man nochmals, jetzt am Mittellot der zuerst mit λ, dann mit $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)$ bezeichneten Seite, so erhält man ein neues rechtwinkliges Dreieck, und man könnte das Resultat, d. h. die Bestimmungsstücke einfach auch durch Drehung des Fünfecks erhalten. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man schließlich zu der

Regel*): Man schreibe an die in der angegebenen Weise mit den in (4) aufgezählten Stücken bezeichneten Seiten eines Fünfecks die Buchstaben

$$\frac{1}{2}\pi - \Pi(a_1),\ \lambda_1,\ \Pi(c_1),\ \mu_1,\ \frac{1}{2}\pi - \Pi(b_1)$$

in dieser Reihenfolge. Es darf dabei mit jeder beliebigen Fünfeckseite begonnen und jede der beiden Umlaufsrichtungen gewählt werden. Setzt man hierauf die an einer und derselben Seite stehenden Größen einander gleich, so sind a_1, b_1, c_1; λ_1, μ_1 wieder Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks.

Beispiel: Man kann setzen

$$a_1 = c',\quad b_1 = l',\quad c_1 = b';\ \lambda_1 = \mu,\ \mu_1 = \frac{1}{2}\pi - \Pi(a).$$

Das Fünfeck kann, wie leicht ersichtlich, auch dazu dienen, die Beziehungen (1′)—(3′) und (I′)—(III′) sowie alle weiter sich daraus ergebenden abzulesen, sobald (1)—(3) gegeben sind.

Bemerkung. Die wichtigen Zuordnungen (die hier zunächst durch die Gegenüberstellung von (4) und (4′) gekennzeichnet sind), werden neben der Parallenkonstruktion und der sich ebenfalls auf hier bewiesene Sätze allein stützenden Konstruktion des Parallelwinkels zum Lot bei vielen Aufgaben der hyperbolischen Geometrie gebraucht.**) Hier eröffnet sich auch ein Weg, die Theorie der hyperbolischen Kreisverwandtschaften ohne Anwendung räumlicher Hilfsmittel zu begründen und umgekehrt die hyperbolische Raumgeometrie aus der Kreisgeometrie der hyberbolischen Ebene zu entwickeln.***)

*) Vgl. Lobatschefskij, S. 346, wo Engel diese Regel angegeben hat.

**) Z. B. bei der Konstruktion des Dreiecks aus den drei Winkeln (Berichte der M. Ph. Klasse der K. S. G. d. W. Leipzig, 1901, S. 480ff.)

***) Ebendaselbst 1902, S. 244—260.

§ 2.

Die Berechnung der Funktion $\Pi(p)$.

Fassen wir von jetzt an die in § 1, 1 und 2 gegebenen und noch in § 1, 4 vervollständigten Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken eines rechtwinkligen Dreiecks (oder eines Vierecks mit drei Winkeln) nicht mehr nur als geometrische Aussagen sondern als Gleichungen zwischen meßbaren Größen auf*), so gewinnen wir damit eine Grundlage für die Berechnung der Funktion $\Pi(p)$. Auf sehr verschiedenen Wegen können wir nämlich zu einer ganzen Reihe von Funktionalgleichungen gelangen, die zwischen der Funktion $\Pi(p)$ und der inversen Funktion bestehen (1). Diese inverse Funktion sei fortan mit Δ bezeichnet, d. h. es ist

$$p = \Delta\{\Pi(p)\}$$

und ebenso

$$\alpha = \Pi(\Delta(\alpha)).$$

Die bekannte Lösung, die bei geeigneter Wahl der Längeneinheit die Form hat

$$\Pi(p) = 2 \operatorname{arc\,tan} e^{-p}, \tag{5}$$

ohne weitere Hilfsmittel aus einer der verschiedenen Gleichungen abzuleiten, dürfte schwer halten, obwohl es möglich sein muß. ($\Pi(p)$ ist für jede Länge p konstruierbar, deswegen muß die Funktion sich auch aus den Gleichungen, die für den Beweis der Konstruktion hinreichen, berechnen lassen.) Um uns aber nicht mit der wenig befriedigenden Bestätigung der Richtigkeit von Gl. (5) durch einfaches Einsetzen zu begnügen, nehmen wir die leicht — ohne Benützung des Raumes — abzuleitende Gleichung des Grenzkreises (2) zu Hilfe (3).

1. *Ableitung einiger Funktionalgleichungen für* $\Pi(p)$. Schon die Gleichungen (1)—(3′) allein reichen aus, eine Funktionalgleichung aufzustellen, freilich unter der Voraussetzung

$$\Pi(p) \geqq \tfrac{1}{4}\pi.$$

Betrachten wir nämlich das spezielle rechtwinklige Dreieck, in dem die Kathete b zu dem auf c im Scheitel des Winkels μ errichteten Lote parallel ist, setzen wir also voraus, es sei

$$\lambda = \Pi(c),$$

dann ist eben zufolge dieser Voraussetzung auch

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mu = \Pi(a).$$

*) Über die Axiome, auf Grund deren Größen z. B. Längen durch Zahlen (Maßzahlen) der Rechnung unterworfen werden dürfen, vgl. Hölder, Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß (Berichte d. K. S. G. d. W. Leipzig 1901, S. 1—64).

Die Gleichungen (1)—(3′) in § 1, 1 nehmen dann die Form an

$$(1) \qquad \Pi(c) + \Pi(c + a') = \Pi(b),$$

$$(1') \qquad \Pi(2c) + \Pi(a') = \Pi(a),$$

$$(2) \qquad \Pi(c) + \Pi(b) = \Pi(c - a'),$$

$$(2') \qquad \Pi(a') + \Pi(a) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$(3) \qquad \Pi(a' - a) + \Pi(b + c) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$(3') \qquad \Pi(a' + a) + \Pi(c - b) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

(Die Gleichungen (I′), (II′), (III′) würden übrigens keine weiteren Beziehungen geben.)

Von diesen sechs Gleichungen ist (2′) trivial; aus (3) und (3′) folgern wir

$$b + c = \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a' - a)\right)$$

$$c - b = \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a' + a)\right).$$

Hieraus kann $2c$ berechnet und in (1′) eingesetzt werden. Das gibt

$$\begin{aligned} 2c &= \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a' - a)\right) + \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(a' + a)\right) \\ &= \Delta\left(2\Pi(a) - \tfrac{1}{2}\pi\right); \end{aligned}$$

und wir haben unter der Voraussetzung $p' > p$ also die Funktionalgleichung

$$(6) \qquad \Delta\left(2\Pi(p) - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(p' + p)\right) + \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(p' - p)\right).$$

Ist $p > p'$, also $\Pi(p) < \frac{1}{4}\pi$, so kommt statt dessen

$$(6') \qquad \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - 2\Pi(p)\right) = \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(p + p')\right) + \Delta\left(\tfrac{1}{2}\pi - \Pi(p - p')\right).$$

In ganz ähnlicher Weise kann man auch das Viereck mit drei rechten Winkeln spezialisieren. Ist $l = a'$, eine Nebenbedingung, die diesmal der Größe a gar keine Beschränkung auferlegt, so wird, wie die Figur des Vierecks zeigt,

$$\beta + \Pi(c) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

und die Gleichungen I bis III′ führen durch einfache Rechnung auf

$$\begin{aligned} (7) \qquad 2\Pi(a') = &- \Pi\left(\Delta\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\Pi(2a')\right) + a'\right) \\ &+ \Pi\left(- \Delta\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\Pi(2a')\right) + a'\right). \end{aligned}$$

An dritter Stelle betrachten wir jetzt ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse $c(=2b_1)$ Sehne eines Grenzkreisbogens ist*), während die eine Kathete (a) einer Achse des Grenzkreises angehört; m. a. W. wir setzen voraus, es sei

$$\mu = \Pi\left(\frac{c}{2}\right),$$

woraus noch folgt

$$\lambda = \Pi\left(\frac{c}{2}\right) - \Pi(b).$$

Die Gleichung (1) erhält dann die Gestalt

$$2\Pi(b) = \Pi(b_1) + \Pi(3b_1). \tag{8}$$

2. *Gleichung des Grenzkreises.* Um eine zweite Beziehung zwischen b und b_1 zu erhalten, bedienen wir uns, den bisherigen Gedankengang verlassend, der Gleichung des Grenzkreises. Diese Gleichung kann aus der Formel**)

$$s' = s \cdot e^{-x}$$

für die Verjüngung äquidistanter Grenzkreisbogen, die von denselben Achsen begrenzt sind und den Abstand x haben, in folgender Weise abgeleitet werden.

Es sei (Fig. 4) $AB = s$ ein Grenzkreisbogen, der so klein sein soll, daß die von B ausgehende Tangente die Achse, die durch den Punkt A geht, noch trifft (in D). Wir denken uns dann den Grenzkreisbogen über B hinaus verlängert und zwar bis zu der Geraden, die nach der einen Seite hin mit der Tangente in B, nach der anderen Seite hin mit der Achse in B parallel ist. Das Bogenstück BC (das bekanntlich gleich der von Lobatschefskij gewählten Längeneinheit ist) bezeichnen wir mit S. Nun machen wir $B_1D = BD(= v)$ und legen durch B_1 den Grenzkreisbogen B_1C_1, der wieder gleich S ist, weil das in B_1 auf B_1A errichtete Lot zu C_1C und zu DB parallel ist.

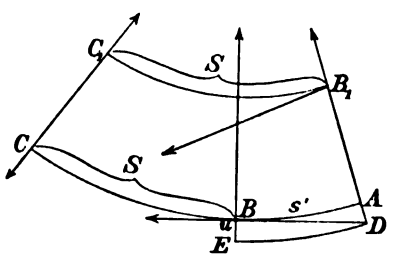


Fig. 4.

Bezeichnet man noch die Strecke AD mit u, so wird $AB_1 = v - u$ und daher

$$\text{Bogen } ABC = s + S = Se^{v-u}.$$

Jetzt kann man aber auch AD über D hinaus um die Strecke v ver-

*) Über den Grenzkreis vgl. die Entwicklungen von Lobatschefskij (S. 185 ff.).

**) Vgl. die Formeln Lobatschefskij, S. 348, ferner S. 189 und die klare Auseinandersetzung über den Begriff „Bogenlänge", S. 82.

längern und im Endpunkte das (zu BD parallele) Lot errichten, endlich noch die Gerade ziehen, die einerseits zu BD, andererseits zu DB_1 parallel ist. Durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie die soeben angestellte gelangt man zu der Formel

$$S - s = Se^{-u-v}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt

$$e^u = \frac{e^v + e^{-v}}{2}.$$

Für den Grenzbogen ED (Fig. 4) sind u und v die Strecken, die wir am Ende von Nr. 1 dieses Paragraphen mit a und b bzeichnet haben, also kommt die Gleichung

$$e^a = \frac{e^b + e^{-b}}{2}.$$

Der Bogen ED hat die Länge

$$(ED) = sc^a = S(e^{b-a} - 1)e^a = S \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2}.$$

Zu dem Grenzkreisbogen, der halb so groß wie (ED) ist, gehört daher statt der Ordinate $BD = b$ eine Ordinate, deren Länge b_1 gegeben ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right) = \frac{e^{b_1} - e^{-b_1}}{2}$$

oder

$$e^{b_1} - e^{-b_1} = \frac{e^b - e^{-b}}{2}. \tag{8'}$$

3. *Berechnung von* $\Pi(p)$. (8') ist eine Gleichung, deren linke Seite die Differenz zweier reziproker Zahlen ist, die nur von b_1 abhängen, ebenso die rechte Seite die halbe Differenz derselben Funktionen, gebildet für das Argument b. Statt nun etwa b_1 durch b auszudrücken und in (8) einzusetzen, wollen wir Umformungen vornehmen, die unmittelbar auf das Resultat führen.

Setzen wir zur Übersichtlichkeit

$$e^a = f(a),$$

so kann (8') geschrieben werden

$$\frac{1}{2}\left(f(b) - \frac{1}{f(b)}\right) = f(b_1) - \frac{1}{f(b_1)}$$

und der rechten Seite läßt sich eine Gestalt geben, die an ein trigonometrisches Additionstheorem erinnert, nämlich die Gestalt

$$\frac{e^{b_1} \cdot e^{3b_1} - 1}{e^{b_1} + e^{3b_1}} = \frac{f(b_1)f(3b_1) - 1}{f(b_1) + f(3b_1)}.$$

Aus (8) aber erhält man leicht

$$\frac{1}{2}\left(\cot\tfrac{1}{2}\Pi(b)-\frac{1}{\cot\frac{1}{2}\Pi(b)}\right)=\frac{\cot\frac{1}{2}\Pi(b_1)\cot\frac{1}{2}\Pi(3b_1)-1}{\cot\frac{1}{2}\Pi(b_1)+\cot\frac{1}{2}\Pi(3b_1)}.$$

Wir setzen, indem wir beide Formeln vergleichen,

$$\cot\tfrac{1}{2}\Pi(b)=e^{b}\quad(\text{nicht } e^{-b})$$

oder allgemein

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(p)=e^{-p}.$$

An und für sich bestand noch die Wahl zwischen e^{p} und e^{-p}, wir müssen aber, da $\Pi(p)<\frac{1}{2}\pi$ ist, den zweiten Wert nehmen.*)

Zusatz 1. Die gefundenen Werte der zu bestimmenden Funktionen, nämlich

$$\Pi(p)=2\operatorname{arc\,tang}e^{-p}$$

und

$$\Delta(\varphi)=\log\cot\tfrac{1}{2}\varphi$$

müssen natürlich jede der aufgestellten Funktionalgleichungen erfüllen. Wir wollen uns mit dem Nachweis für die eine Funktionalgleichung (7) begnügen, weil diese Gleichung für jeden Wert von a gilt. Schon um diese Bestätigung auszuführen, muß man die Gleichung umformen, wenn man sich nicht auf allzulange Rechnungen einlassen will.

Wir dividieren auf beiden Seiten mit 2 und setzen $a'=p$ und außerdem zur Abkürzung

$$\Delta\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\Pi(2p)\right)=\Delta(\varphi)=u.$$

Bilden wir die Tangenten, so kommt links

$$\operatorname{tang}\Pi(p)=\frac{2}{\cot\frac{1}{2}\Pi(p)-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(p)}=\frac{2}{e^{p}-e^{-p}},$$

und rechts

$$\operatorname{tang}\left\{\tfrac{1}{2}\Pi(p-u)-\tfrac{1}{2}\Pi(p+u)\right\}=\frac{e^{u-p}-e^{-u-p}}{1+e^{-2p}}$$

$$=\frac{2}{e^{p}+e^{-p}}\cdot\frac{e^{u}-e^{-u}}{2}.$$

*) Die Absicht, eine von Kunstgriffen ganz freie Berechnung der Funktion $\Pi(p)$ abzuleiten, ist leider nicht durchführbar gewesen.

Um die geforderte Gleichheit nachzuweisen, muß also nur die Richtigkeit der Formel

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{e^p + e^{-p}}{e^p - e^{-p}}$$

gezeigt werden:

Es ist

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = \cot\varphi = \frac{\cot\frac{1}{2}\Pi(2p) + 1}{\cot\frac{1}{2}\Pi(2p) - 1} = \frac{e^{2p}+1}{e^{2p}-1}$$

$$= \frac{e^p + e^{-p}}{e^p - e^{-p}}, \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz 2. Es mag noch erwähnt werden, daß die Berechnung von $\Pi(p)$ sich ganz bedeutend vereinfacht, wenn man außer der Gleichung des Grenzkreises noch den Umstand benützt, daß für sehr kleine Dreiecke die Euklidische Geometrie gilt.*) Den verschiedenen Ansätzen**), die diese Tatsache verwenden, mag bei dieser Gelegenheit ein neuer einfacher hinzugefügt werden.

Der zur Ordinate b gehörende Grenzkreisbogen hat nach Nr. 2 dieses Paragraphen die Länge

$$s = S \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2},$$

und es besteht außerdem die Gleichung

$$e^a = \frac{e^b + e^{-b}}{2}.$$

Wird jetzt der Grenzkreisbogen verlängert bis zu dem Punkt, dessen Abszisse $a + da$, dessen Ordinate $b + db$ ist, dann dieser neue Bogen $(s + ds)$ so verschoben längs der Abszissenachse, daß die Ordinate $(b + db)$ auf die Ordinate b und ihre Verlängerung zu liegen kommt, so sieht man: $\Pi(b)$ liegt in dem (unendlich kleinen) rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse db der Kathete ds gegenüber, der Kathete da an; demnach wird

$$\cos\Pi(b) = \frac{da}{db} = \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}}.$$

Hieraus folgt wieder

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(p) = e^{-p}.$$

---

*) Dies kann man z. B. auch aus den Formeln (1) — (3′) folgern, wenn man die linearen Abmessungen des Dreiecks sehr klein annimmt.

**) Vgl. die Literaturangaben Math. Annalen 59, S. 110.

§ 3.

Die Trigonometrie.

Nachdem die Funktion $\Pi(p)$ berechnet ist, bereitet es jetzt gar keine Schwierigkeit mehr, die trigonometrischen Formeln für das rechtwinklige Dreieck systematisch abzuleiten. Die Formeln (1) — (3′) reichen dazu vollkommen aus. Einige der Dreiecksrelationen wollen wir, um unsere Behauptung zu bestätigen, hier noch auf diesem Wege gewinnen.

So folgt z. B. aus Gl. (1):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Pi(c+m)=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(b)-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(l)}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(l)},$$

d. h.

$$e^{-c-m}=\frac{e^{-b}-e^{-l}}{1+e^{-b-l}},$$

ebenso aus Gl. (2)

$$e^{-c+m}=\frac{e^{-l}+e^{-b}}{1-e^{-b-l}}.$$

Die Multiplikation der beiden Gleichungen ergibt

$$e^{-2c}=\frac{e^{-2b}-e^{-2l}}{1-e^{-2b-2l}}$$

und die Division

$$e^{-2m}=\frac{e^{-b}-e^{-l}}{e^{-b}+e^{-l}}\cdot\frac{1-e^{-b-l}}{1+e^{-b-l}}.$$

Aus der durch Multiplikation erhaltenen Gleichung folgt

$$\frac{1-e^{-2c}}{1+e^{-2c}}=\frac{1-e^{-2b}}{1+e^{-2b}}\cdot\frac{1+e^{-2l}}{1-e^{-2l}},$$

oder, da

$$\cos\Pi(c)=\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\Pi(c)}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\Pi(c)}=\frac{1-e^{-2c}}{1+e^{-2c}}\text{ ist,}$$

$$\cos\Pi(c)=\frac{\cos\Pi(b)}{\cos\Pi(l)},\text{ d. h.}$$

$$\cos\Pi(c)\cdot\cos\lambda=\cos\Pi(b). \tag{9}$$

Aus der durch Division erhaltenen Gleichung folgt

$$\frac{1-e^{-2m}}{1+e^{-2m}}=\frac{e^{b}+e^{-b}}{e^{l}+e^{-l}},$$

d. h.

$$\cos\Pi(m)=\frac{\sin\Pi(l)}{\sin\Pi(b)}$$

oder

$$\sin\lambda=\cos\mu\cdot\sin\Pi(b). \tag{10}$$

Durch Elimination von b folgt aus (9) und (10)

$$\sin \Pi(c) = \operatorname{tang} \lambda \cdot \operatorname{tang} \mu. \tag{11}$$

Ferner wird

$$\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \frac{\sin \lambda}{\cos \mu} \cdot \frac{\sin \mu}{\cos \lambda} = \operatorname{tang} \lambda \cdot \operatorname{tang} \mu,$$

also

$$\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c). \tag{12}$$

Diese vier Beispiele (Gl. (9) — (12)) geben ein klares Bild, wie man bei der Aufstellung der trigonometrischen Formeln sich auf die geometrisch abgeleiteten Formeln (1) — (3') stützen kann.

Mit diesem Ausblick schließen wir die Betrachtung ab. Die Absicht dieser Ausführungen, nämlich zu zeigen, daß man die hyperbolische Ebene nicht zu verlassen braucht, auch infinitesimaler Betrachtungen nicht bedarf, um ausreichende Grundlagen für die Beantwortung der verschiedenartigsten Fragen der hyperbolischen Geometrie zu gewinnen, dürfte hiermit erreicht sein.*)

Leipzig, Januar 1905.

---

*) Schur hebt (Math. Annalen 59, S. 319) mit Recht hervor, daß Hilberts Nichteuklidisches Parallelenaxiom bereits sehr viel in sich schließt. Um so mehr dürfen die hier gegebenen Entwicklungen, insbesondere die des § 1, den Anspruch darauf erheben, als eine nicht ganz überflüssige Ergänzung anderer Darstellungen zu gelten. —

Zusatz (September 1905). Außer der hier gegebenen Ergänzung anderer Darstellungen, auf die ich bereits im Vorwort meiner Nichteuklidischen Geometrie (Sammlung Schubert 49) hingewiesen habe, sei an dieser Stelle noch einer vereinfachten Methode der Inhaltsbestimmung gewisser Figuren gedacht. Der Satz, daß der Inhalt eines Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ seinem Defekt, d. h. der Größe $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ proportional ist, kann auch für solche Dreiecke ganz elementar bewiesen werden, deren Eckpunkte sämtlich oder zum Teil im Unendlichen liegen (Vgl. Lobatschefskij, S. 268).

Über die in einem Reyeschen Komplexe enthaltenen Regelscharen.

Von

EUGEN MEYER in Charlottenburg.

Es ist bekannt, daß durch zwei beliebige einem tetraedralen (Reyeschen) Komplex angehörige Strahlen zwei verschiedene Flächen 2. O. hindurchgelegt werden können, von denen die eine dem Haupttetraeder des Komplexes umbeschrieben, die andere ihm einbeschrieben ist. Diese beiden Systeme von Regelscharen sind von 4. Stufe.*) Die Frage aber, ob es Regelflächen von der Art gibt, daß die Regelstrahlen sowohl wie die Leitstrahlen sämtlich demselben tetraedralen Komplexe angehören, die also zu ihm in analoger Beziehung stehen würden wie die Kugelflächen zum Komplex der Minimalgeraden, scheint bisher nicht gestellt worden zu sein. Sie wird für den Fall eines reellen Haupttetraeders durch den im folgenden bewiesenen Satz erledigt:

In einem tetraedralen Komplex mit reellem Haupttetraeder gibt es im allgemeinen keine geradlinige Fläche 2. O. der Art, daß ihre sämtlichen Geraden — Leitstrahlen und Regelstrahlen — dem Komplex angehören. Unter den zu demselben Haupttetraeder gehörenden gibt es vielmehr nur drei tetraedrale Komplexe, die solche Flächen enthalten. Es sind diejenigen, deren Strahlen die Tetraederebenen in harmonischen Punktwürfen treffen, und zwar enthalten sie sechs Systeme von je ∞^2 solchen Flächen. Die Flächen eines und desselben dieser Systeme berühren dieselben zwei Ebenen des Haupttetraeders des Komplexes in denjenigen Tetraederecken, die nicht auf der Schnittlinie dieser beiden Ebenen liegen. Je ∞^1 von den Flächen desselben Systems schneiden sich in demselben Kantenvierseit. Jede Komplexgerade gehört insgesamt sechs von diesen Flächen, und zwar je einer eines jeden Systems an. Außer den genannten gibt es in einem solchen Komplex keine Flächen 2. O., deren sämtliche Geraden Komplexstrahlen sind.

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., Leipzig 1892, 3. Abt. S. 5. Sturm, Liniengeometrie, Leipzig 1892, I, S. 335.

Es sei $ABCD$ das Haupttetraeder eines beliebigen tetraedralen Komplexes. Auf das Strahlenbüschel mit dem Scheitel A in der Ebene ACD läßt sich das Strahlenbüschel mit dem Scheitel B in der Ebene BCD projektiv so beziehen, daß der vorgelegte Komplex zusammenfällt mit dem Komplex aller Geraden, die zwei entsprechende Strahlen dieser Büschel schneiden.*)

Gibt es nun eine geradlinige Fläche 2. O. $F^{(2)}$, deren sämtliche Geraden dem Komplex angehören, so muß sie die Ebenen ACD und BCD in je einem Kegelschnitt k bezw. k_1 schneiden. Die Punkte von k und k_1 werden durch die eine Geradenschar von $F^{(2)}$, die „Regelschar", projektiv aufeinander bezogen, und diese Projektivität bestimmt gleichzeitig eine Kollineation K_1 zwischen den Feldern der Ebenen ACD und BCD. Durch K_1 werden, da die Regelschar dem Komplex angehören soll, die beiden Strahlenbüschel mit den Scheiteln A und B in derselben Weise wie durch den Komplex projektiv einander zugeordnet. Die Schnittpunkte mit CD sind den beiden Kegelschnitten gemeinsam; denn es sind die Schnittpunkte von CD mit $F^{(2)}$. Da jeder dieser beiden Schnittpunkte sich in der zwischen den Punktreihen k und k_1 bestehenden Projektivität selbst entsprechen muß, also auch die beiden durch ihn gehenden Strahlen der Büschel A und B einander zugeordnet sein müssen, so können diese Schnittpunkte nur C und D sein.

Die andere Schar von Geraden von $F^{(2)}$, die der „Leitstrahlen", bezieht die Punktreihe von k in einer von der vorigen verschiedenen Weise projektiv auf die von k_1, bestimmt daher eine zweite Kollineation K_2 zwischen den Feldern ACD und BCD, in welcher aber die Strahlen des Büschels A denjenigen von B wieder in derselben Weise wie vorher zugeordnet sind.

Vermittels der beiden Kollineationen K_1 und K_2 wird das Feld BCD kollinear auf sich selbst bezogen; diese Kollineation sei K_3. Schneidet nun irgend ein von AC und AD verschiedener Strahl des Büschels A k in den Punkten E und F, denen durch K_1 die Punkte E' bezw. F' zugeordnet seien, so werden durch K_2 den Punkten E und F die Punkte F' bezw. E' als entsprechende zugewiesen. Für K_3 sind also E' und F' einander involutorisch zugeordnete Punkte; B und alle Punkte der Punktreihe CD entsprechen sich selbst. K_3 ist also eine involutorische Kollineation, daher B der Pol von CD in bezug auf k_1 und folglich auch A derjenige von CD in bezug auf k. Mithin berührt $F^{(2)}$ die Ebenen ABC und ABD in C bezw. D.

Die durch C und D hindurchgehenden Geraden von $F^{(2)}$ bilden ein

*) Reye a. a. O. S. 6—7. Sturm a. a. O. S. 334, 338f.

windschiefes Vierseit, von dem zwei Ecken, G und H, auf AB liegen. Dann müssen aber CG und DH sowohl wie CH und DG zugeordnete Strahlenpaare der beiden Büschel mit den Scheiteln C und D (in den Ebenen CAB bezw. DAB) sein, deren Projektivität durch den Komplex wieder derart festgelegt ist, daß alle mit zwei zugeordneten Strahlen inzidenten Geraden dem Komplex angehören. Jene beiden Büschel erzeugen daher auf AB eine Punktinvolution, und da

$$g(A, B, C, D) \curlywedge (A, B, G, H)$$

ist, wenn g einen Komplexstrahl bedeutet*), so muß das Doppelverhältnis

$$g(A, B, C, D) = -1$$

sein.

Sollte es also eine geradlinige Fläche 2. O. geben, die mit allen ihren Geraden in einem tetraedralen Komplex enthalten ist, so müßte sie sowohl selbst als auch der Komplex jedenfalls die im obigen Satze angegebenen Eigenschaften besitzen.

Wählt man anderseits in einem Komplex mit dem Haupttetraeder $ABCD$ und dem konstanten Doppelverhältnis $g(A, B, C, D) = -1$ aus den projektiven Strahlenbüscheln mit den Scheiteln C und D zwei zugeordnete Strahlen CG und DH aus, wo G und H ihre Schnittpunkte mit AB seien, so gibt es ∞^1 geradlinige Flächen 2. O. mit dem gemeinsamen Vierseitsdurchschnitt $CGDH$, und ihre sämtlichen Geraden sind Komplexstrahlen. Läßt man G die Gerade AB durchlaufen, so erhält man dasjenige der im obigen Satze genannten Systeme von ∞^2 Flächen 2. O., das die Ebenen ABC und ABD in C und D berührt. Da sich die vier Tetraederebenen in sechsfacher Weise zu Paaren anordnen lassen, so gibt es sechs solche Systeme. In jedem von ihnen gibt es offenbar eine und nur eine solche Fläche, die eine beliebig ausgewählte Komplexgerade enthält.

Für dasselbe Haupttetraeder $ABCD$ existieren aber gerade drei Komplexe mit der genannten Eigenschaft, nämlich außer dem benutzten noch diejenigen, für die

$$g(A, C, D, B) = -1 \text{ bezw. } g(A, D, B, C) = -1$$

ist.

Charlottenburg, Januar 1905.

*) Sturm a. a. O. § 253.

Über die Hilbertschen Sätze in der Theorie der Flächen konstanter Gaußscher Krümmung.

Von

G. Prasad in Allahabad, Indien.

In seiner Abhandlung „Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung“*) hat Herr Hilbert zwei Sätze für analytische Flächen angegeben und streng bewiesen. Im folgenden handelt es sich darum, die Frage nach denjenigen Sätzen zu diskutieren, die für analytische Flächen mit den Hilbertschen Sätzen identisch werden, aber für viel allgemeinere Flächen**) gelten.

Vier Gruppen von Bedingungen.

1. Es seien die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes auf einer Fläche als Funktionen zweier unabhängiger Variabelen dargestellt. Dann werde ich die folgenden vier Gruppen von Bedingungen respektive (A), (B), (C) und (C_1) nennen; es ist leicht zu sehen, daß die Befriedigung von (A), (B) und (C) oder die Befriedigung von (A), (B) und (C_1) die Existenz der sämtlichen partiellen Differentialquotienten dritter Ordnung noch nicht nach sich zieht.

(A)

(I) In jedem Punkte sind die sämtlichen partiellen Differentialquotienten erster Ordnung x_u, x_v, y_u usw. endlich und kontinuierlich in (u, v); auch sind in jedem Punkte die sämtlichen partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung x_{uu}, x_{uv}, x_{vu}, x_{vv}, y_{uu} usw. vorhanden und endlich.

(II) Diejenigen Punkte, in welchen die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung x_{uu}, x_{uv}, x_{vu}, x_{vv}, y_{uu} usw. nicht alle kontinuierlich in (u, v) sind, bilden eine Menge g_0 vom Inhalt Null.

*) Trans. Amer. Math. Society, Vol. 2, 1901; Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl. Anhang V (S. 162—175).

**) Siehe meinen Brief an Herrn Hilbert „Über den Begriff der Krümmungslinien“ (Göttinger Nachrichten, Heft 3, 1904).

Der Kürze wegen sage ich, daß eine ebene Menge „vom Inhalt Null" ist, wenn ihre Teilmenge auf jeder Geraden der Ebene den (linearen) Inhalt Null hat.

(B)

In jedem Punkte einer überall dichten Menge G_1 sind die sämtlichen Differentialquotienten $x_{uvu}, x_{vuu}, x_{uvv}, x_{vuv}, y_{uvu}$ usw. vorhanden und endlich; und ferner, in jedem Punkte von G_1 ist

$$x_{uvu} = x_{vuu},$$
$$x_{uvv} = x_{vuv},$$
$$y_{uvu} = y_{vuu} \quad \text{usw.}$$

(C)

In jedem Punkte, der nicht zu g_0 gehört, ist

$$x_{uv} = \int_0^u \lambda_1 du = \int_0^v \lambda_2 dv,$$
$$y_{uv} = \int_0^u \mu_1 du = \int_0^v \mu_2 dv,$$
$$z_{uv} = \int_0^u \nu_1 du = \int_0^v \nu_2 dv,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ an allen Punkten endlich sind; und ferner ist die Menge der Punkte, wo $\lambda_1 = x_{uvu}$, $\lambda_2 = x_{uvv}$ usw., eine überall dichte Teilmenge von G_1.

(C_1)

In jedem Punkte, der nicht zu g_0 gehört, ist

$$x_{vu} = \int_0^u l_1 du,$$
$$x_{uv} = \int_0^u l_2 du,$$
$$y_{vu} = \int_0^u m_1 du \quad \text{usw.},$$

wo $l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2$ in allen Punkten endlich sind; und ferner ist die Menge der Punkte, wo $l_1 = x_{uvu}$, $l_2 = x_{uvu}$ usw., eine überall dichte Teilmenge von G_1.

Über Flächen von konstanter positiver Krümmung.

2. Zuerst spreche ich den folgenden Satz aus: *Eine Fläche, welche nicht ein Kugelstück ist, kann die folgenden Bedingungen nie gleichzeitig befriedigen:*

(I) In allen Punkten der Fläche, höchstens mit Ausnahme der Punkte einer Menge g_0 vom Inhalt Null, ist $K = +1$.

(II) In allen Punkten einer überall dichten Menge ist

$$E = \sinh^2\varrho,$$
$$G = \cosh^2\varrho;$$

wo die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Krümmungslinien sind und $\coth\varrho = r_1$ der größere der absoluten Werte der beiden Hauptkrümmungsradien ist.

(III) Es existiert ein Punkt (U, V) *im Inneren* der Fläche von der Beschaffenheit, daß die obere Grenze von r_1 für eine beliebig kleine Umgebung von (U, V) die obere Grenze von r_1 für die ganze Fläche ist.

(IV) $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ befriedigen (A), (B), (C).

Beweis:

Der Klarheit wegen unterscheide ich zwei Fälle.

Fall I.

Nehmen wir an, daß der Punkt (U,V) weder ein Punkt der Menge g_0 noch ein Grenzpunkt dieser Menge ist, dann ist es immer möglich, in der uv-Ebene den Punkt (U, V) mit einem genügend kleinen Kreise K_1 zu umgeben, so daß kein Punkt von g_0 innerhalb K_1 existiert.

Weil (A) befriedigt ist, ist r_1 in jedem Punkte innerhalb K_1 vorhanden und zwar der größere der absoluten Werte der Wurzeln der Gleichung

$$(DD'' - D'^2)r^2 - (ED'' + GD - 2FD')r + (EG - F'^2) = 0.\text{*)}$$

Mithin ist r_1 kontinuierlich in (u,v) innerhalb K_1. Deshalb ist für *alle* Punkte innerhalb K_1

$$E = \sinh^2\varrho,$$
$$G = \cosh^2\varrho.$$

Weil (B) befriedigt ist, können wir in der bekannten Weise**) die Gaußsche Fundamentalgleichung für diejenigen Punkte von G_1 herleiten, die innerhalb K_1 liegen. Deshalb ist an diesen Punkten

$$\text{(I)} \qquad \varrho_{uu} + \varrho_{vv} = \frac{e^{-2\varrho} - e^{2\varrho}}{4}.$$

*) Siehe meinen Brief an Herrn Hilbert, loc. cit.

**) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III D 1, 2 (*v. Mangoldt*), Nr. 34; Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 2. ed., vol. 1, § 56.

Nun ist klar, daß r_1 in (U, V) ein Maximum und deshalb ϱ ein Minimum hat. Es folgt dann, daß in dem Punkte (U, V)

$$\varrho_u = 0,$$
$$\varrho_v = 0$$

ist; und wir können auch einen Kreis R innerhalb K_1 beschreiben, so daß in allen Punkten, die auf R liegen, $\frac{\partial \varrho}{\partial R}$ positiv ist, wo R den Abstand zwischen (U, V) und (u, v) bedeutet.

Weil (C) befriedigt ist, folgt leicht aus (I), daß das auf das Gebiet innerhalb K_1 erstreckte Integral

$$\int \frac{e^{-2\varrho} - e^{2\varrho}}{4} du dv$$

gleich dem über R erstreckten Integral

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial R} ds$$

ist. Aber dies ist unmöglich, weil das erste Integral kleiner und das zweite größer als Null ist.

Damit ist gezeigt, daß Fall I nicht stattfinden kann.

Fall II.

Wir nehmen an, daß (U, V) entweder zu g_0 gehört oder ein Grenzpunkt von g_0 ist.

Nennen wir $(\bar{u}, \bar{v})$ diejenigen Punkte (u, v), die weder zu g_0 gehören, noch Grenzpunkte dieser Menge sind, dann muß, wenn

$$\operatorname*{Lim}_{\bar{u} = U,\, \bar{v} = V} r_1(\bar{u}, \bar{v})$$

nicht existiert, ein Punkt $(\bar{u} = \overline{U}, \bar{u} = \overline{V})$ existieren, wo $r_1(u, v)$ ein Maximum hat. Und mit dem Beweisverfahren von Fall I werden wir auf einen Widerspruch geführt.

Wenn

$$\operatorname*{Lim}_{u = U,\, \bar{v} = V} r_1(\bar{u}, \bar{v})$$

existiert, ist dieser Limes die obere Grenze von $r_1(\bar{u}, \bar{v})$, und es ist leicht zu sehen, daß wir den Punkt (U, V) mit einem Kreise K_2 so umgrenzen können, daß alle Punkte, die auf K_2 liegen, Punkte $(\bar{u}, \bar{v})$ sind und in allen diesen Punkten $\frac{\partial \varrho}{\partial R}$ positiv ist. Innerhalb K_2 können wir einen beliebig kleinen Kreis k_2 beschreiben, so daß kein Punkt, welcher nicht ein Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$ ist, entweder zwischen k_2 und K_2 oder auf k_2 liegt.

Nun ist leicht zu sehen, daß, wie im Fall I, wir das folgende Resultat bekommen:

Das über das Gebiet zwischen k_2 und K_2 erstreckte Integral

$$\int \frac{e^{-2\varrho} - e^{2\varrho}}{4} du dv$$

ist gleich der Summe der über k_2 und K_2 erstreckten Integrale

$$-\int_{(k_2)} \frac{\partial \varrho}{\partial R} ds \quad \text{und} \quad \int_{(K_2)} \frac{\partial \varrho}{\partial R} ds .$$

Weil k_2 und deshalb

$$\left| \int_{(k_2)} \frac{\partial \varrho}{\partial R} ds \right|$$

beliebig klein gemacht werden kann, werden wir wie im Fall I auf einen Widerspruch geführt.

Der eben bewiesene Satz lehrt offenbar folgende Tatsache:

Eine geschlossene Fläche, welche nicht eine Kugel ist, kann die oben gegebenen Bedingungen (I), (II), (III) *und* (IV) *nie gleichzeitig befriedigen.*

Über Flächen von konstanter negativer Krümmung.

3. Der Satz von Herrn Hilbert über Flächen konstanter negativer Krümmung lautet folgendermaßen:

Eine Fläche konstanter negativer Krümmung, die sich stetig und mit stetiger Änderung ihrer Tangentialebene in der Umgebung jeder Stelle überallhin ausdehnt, kann nicht überall analytisch sein.

Ich verallgemeinere diesen Satz, indem ich die folgende Aussage mache:

Eine Fläche, welche sich stetig und mit stetiger Änderung ihrer Tangentialebene in der Umgebung jeder Stelle überallhin ausdehnt, kann die folgenden Bedingungen nie gleichzeitig befriedigen:

(I) In allen Punkten der Fläche, höchstens mit Ausnahme der Punkte einer Menge g_0 vom Inhalt Null, ist $K = -1$.

(II) In allen Punkten einer überall dichten Menge ist

$$E = 1 ,$$
$$G = 1 ,$$

wo die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Asymptotenkurven*) sind; auch befriedigen $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ die Bedingungen (A), (B), (C_1).

(III) In allen Punkten einer überall dichten Menge ist

$$E = 1 ,$$

*) Unter einer Asymptotenkurve verstehe ich eine Kurve, welche durch die Differentialgleichung $D\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2D'\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D''\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0$ definiert ist.

wo u, v geodätische Polarkoordinaten*) sind; auch befriedigen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ die Bedingungen (A), (B), (C_1).

Das folgende Beweisverfahren ist im wesentlichen dasjenige, das Herr Hilbert benutzt hat, um seinen Satz zu beweisen: ich berechne den gesamten Inhalt der Fläche auf zwei Wegen und werde dadurch zu einem Widerspruch gelangen.**)

Der erste Weg:

Es folgt aus der Bedingung (II), daß, weil E und G kontinuierliche Funktionen von u, v sind, in *allen* Punkten

$$E = 1,$$
$$G = 1$$

ist; und mithin gilt der Satz von Dini und Enneper:

In jedem Vierecke, das von vier Asymptotenkurven der Fläche gebildet wird, sind die gegenüberliegenden Bogen einander gleich.

Weil (B) befriedigt ist, können wir in der bekannten Weise die Gaußsche Fundamentalgleichung für diejenigen Punkte herleiten, die zu G_1 gehören. Deshalb ist in diesen Punkten

$$\varphi_{uv} = \sin\varphi, \tag{II}$$

wo φ den Winkel zwischen den beiden Asymptotenkurven durch den Punkt u, v bedeutet. Weil (C_1) befriedigt ist, folgt aus (II) der Satz von Darboux:

Der Flächeninhalt eines aus Asymptotenkurven gebildeten Vierecks auf der Fläche ist gleich der Summe der Winkel des Vierecks vermindert um 2π.

Nachdem wir die Gültigkeit der Sätze von Dini-Enneper und Darboux für unsere Fläche festgestellt haben, ist es leicht zu sehen, daß wir die folgenden Sätze für unsere Fläche wörtlich in derselben Weise aus den Sätzen von Dini-Enneper und Darboux herleiten können, wie Herr Hilbert es für analytische Flächen konstanter negativer Krümmung getan hat:

(1) „Es gibt auf unserer Fläche keine geschlossene, d. h. in sich zurückkehrende Asymptotenkurve."

*) Hinsichtlich dieser Koordinaten sei bemerkt, daß ich unter einer geodätischen Linie eine Linie verstehe, welche durch die Differentialgleichungen

$$2\left(E\frac{d^2u}{ds^2} + F\frac{d^2v}{ds^2}\right) + 2E_v\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + E_u\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + (2F_v - G_u)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0$$

und

$$2\left(F\frac{d^2u}{ds^2} + G\frac{d^2v}{ds^2}\right) + 2G_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + (2F_u - E_v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + G_v\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0$$

definiert ist.

**) Vgl. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, S. 167—172.

(2) „Irgend zwei durch einen Punkt gehende Asymptotenkurven schneiden sich in keinem anderen Punkte unserer Fläche."

(3) „Eine Asymptotenkurve unserer Fläche durchsetzt sich selbst an keiner Stelle, d. h. sie besitzt keinen Doppelpunkt."

(4) „Wenn wir durch jeden Punkt einer Asymptotenkurve a die andere Asymptotenkurve ziehen und auf dieser nach der nämlichen Seite hin eine bestimmte Strecke s abtragen, so bilden die erhaltenen Endpunkte eine neue Asymptotenkurve b, die die ursprüngliche Asymptotenkurve a an keiner Stelle schneidet."

Aus diesen Sätzen folgt sofort das folgende Resultat:

„Die sämtlichen Asymptotenkurven unserer Fläche zerfallen in zwei Scharen. Irgend zwei derselben Schar angehörende Asymptotenkurven schneiden sich nicht; dagegen schneiden sich je zwei Asymptotenkurven, die verschiedenen Scharen angehören, stets in einem und nur einem Punkte der Fläche". (II′)

Nun bezeichnen wir mit $I(u, v)$ den Flächeninhalt desjenigen aus Asymptotenkurven gebildeten Vierecks auf unserer Fläche, dessen Ecken durch die Koordinaten

$$u, v; \quad -u, v; \quad -u, -v; \quad u, -v$$

bestimmt sind; so folgt leicht aus (II′), daß der Gesamtinhalt der Fläche

$$\operatorname*{Lim}_{u=\infty, v=\infty} I(u, v)$$

ist. Aber es folgt aus dem Satze von Darboux, daß $I(u, v) < 2\pi$ ist, wie groß u, v auch sein mögen; also muß der Gesamtinhalt unserer Fläche $\leqq 2\pi$ sein.

Der zweite Weg.

Es folgt aus der Bedingung (III), daß, weil E eine kontinuierliche Funktion von u, v ist, in allen Punkten

$$E = 1$$

ist. Weil (B) befriedigt ist, können wir in der bekannten Weise die Gaußsche Fundamentalgleichung für diejenigen Punkte herleiten, die zu G_1 gehören. Deshalb ist in diesen Punkten

$$(\text{III}) \qquad (\sqrt{G})_{uu} = \sqrt{G}.$$

Weil (C_1) befriedigt ist, folgt aus (III) der Satz von Gauß:

Der Flächeninhalt eines aus geodätischen Linien gebildeten Dreiecks auf der Fläche ist gleich dem Fehlbetrag der Winkelsumme an π.

Aus diesem Satze entnehmen wir die folgende Tatsache:

Irgend zwei von dem Anfangspunkte ausgehende geodätische Linien schneiden sich in keinem anderen Punkte unserer Fläche. (III′)

Nun bezeichnen wir mit $I(u)$ den Flächeninhalt des geodätischen

Kreises von dem Radius u, so folgt aus (III'), daß der Gesamtinhalt der Fläche

$$\operatorname*{Lim}_{u=\infty} I(u)$$

ist. Aber

$$I(u) = \int_0^{2\pi} \int_0^u \sqrt{G}\, dv\, du,$$

und es folgt aus (III) und (C_1), daß

$$\int_0^{2\pi} \int_0^u \sqrt{G}\, dv\, du = \int_0^{2\pi} (\sqrt{G})_u\, dv - 2\pi$$

ist; auch ist leicht zu sehen, daß

$$\operatorname*{Lim}_{u=\infty} \int_0^{2\pi} (\sqrt{G})_u\, dv = \infty$$

ist, weil die Funktion $(\sqrt{G})_u$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Ihre Diskontinuitäten in bezug auf u können nur von der zweiten Art sein.

2. Diejenigen Punkte, in welchen sie nicht kontinuierlich in (u, v) ist, bilden eine Menge vom Inhalt Null.

3. In jedem Punkte einer überall dichten Menge ist

$$(\sqrt{G})_{uu} > 0.$$

Der Gesamtinhalt unserer Fläche muß daher unendlich groß sein. Damit sind wir zu dem verlangten Widerspruch geführt.

Allahabad, den 13. Januar 1905.

Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben.

Von

A. Krilopf in St. Petersburg.

Einleitung und Problemstellung.

§ 1.

Die Schwingungen, welche ein elastischer Stab um seine Gleichgewichtslage ausführen kann, werden in zwei Klassen eingeteilt: die *freien* und die *erzwungenen* Schwingungen.

Unter *freien* Schwingungen versteht man diejenigen, welche nur durch die Anfangsabweichungen des Stabes von seinem Gleichgewichtszustande bedingt werden, aber von der Wirkung der äußeren Kräfte unabhängig sind.

Erzwungen heißen diejenigen Schwingungen, welche durch die dauernde Wirkung der äußeren Kräfte entstehen, aber von dem Anfangszustande des Stabes unabhängig sind.

Die freien Schwingungen von gleichförmigen Stäben sind nach Euler in sehr ausführlicher Weise in der *Mécanique* von Poisson und in der *Theory of Sound* von Lord Rayleigh behandelt.

Erzwungene Schwingungen bieten für praktische Anwendungen bei dem Eisenbahnbau und bei dem Brücken- und Schiffbau ein ebenso großes Interesse dar wie die freien Schwingungen für die Akustik, besonders wenn man den Fall der ungleichförmigen Stäbe auch mit in Betracht zieht.

Aber sogar die Behandlung der erzwungenen Schwingungen für den einfachsten Fall der gleichförmigen Stäbe ist in den Lehrbüchern nicht zu finden.

Den Gegenstand dieser Abhandlung bildet die Auseinandersetzung einer allgemeinen Methode für die Bestimmung der erzwungenen Schwingungen eines gleichförmigen elastischen Stabes, welcher der Einwirkung einer veränderlichen Kraft unterliegt.

Man wird sich sofort überzeugen, daß die Methode in der Hinsicht eine allgemeine ist, daß sie für analoge Probleme der mathematischen Physik z. B. die Schwingungen von Saiten, die Wärmeleitung in einem Stabe u. dgl. anwendbar ist.

Bei dieser Auseinandersetzung habe ich stets die praktischen Anwendungen und nicht die rein mathematische Seite in den Vordergrund gestellt, da die Abhandlung selbst aus einem Vorstudium für eine dienstliche Untersuchung von Schiffsvibrationen entstanden ist.

§ 2.

Es sei AB ein gleichförmiger, zylindrischer, ursprünglich gerader Stab, und es liege die x-Achse in der Mittellinie des Stabes, das Ende A dem Abszissenwerte $x=0$ und das Ende B dem Werte $x=l$ entsprechend. Es sei angenommen, daß dieser Stab einer anfänglichen (dem Augenblicke $t=0$ entsprechenden) Störung seines Gleichgewichtszustandes und der Wirkung einer veränderlichen Kraft unterliege; es sollen seine Schwingungen bestimmt werden.

Es wird ferner angenommen, daß die Richtung der Kraft überall der z-Achse parallel ist, und daß es sich um die ebenen Quer- oder Transversalschwingungen handelt, und daß sie in der zx-Ebene vor sich gehen.

Die auf den Stab wirkende Kraft sei in jedem Punkte auf die Längeneinheit bezogen und durch die Funktion

$$Z = F(x, t),$$

wo $F(x, t)$ eine gegebene Funktion der Abszisse x und der Zeit t ist, dargestellt.

Es ist wohl bekannt, daß dieses Problem mathematisch in folgender Art ausgesprochen wird: es soll z als Funktion der Unabhängigen x und t in der Art bestimmt werden, daß sie folgenden Forderungen Genüge leiste:

1°) *Sie soll der partiellen Differentialgleichung* (der Bewegungsgleichung)*)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{qs} F(x, t) \tag{1}$$

genügen. Hier bezeichnet q die Dichtigkeit des Stabmaterials, s die Querschnittsfläche, $b^2 = \frac{EJ}{qs}$ eine Konstante. E ist der Elastizitätsmodul, J das Trägheitsmoment der Fläche s um eine zu der Schwingungsebene senkrechte zentrale Achse.

*) Poisson, Mécanique § 519—529. Lord Rayleigh, Theory of Sound (2nd ed.) Chap. VIII.

2°) *Sie soll die Anfangsbedingungen, welche die Anfangsstörung darstellen, erfüllen.* Diese Bedingungen werden in folgender Art ausgesprochen: wenn t gleich Null ist, so muß z gleich einer gegebenen Funktion $\varphi(x)$ sein, und die partielle Ableitung $\frac{\partial z}{\partial t}$ muß gleich einer anderen gegebenen Funktion $\psi(x)$ sein. Diese Funktionen sind nur im Intervalle von $x = 0$ bis $x = l$ gegeben und, eine noch anzugebende Beschränkung ausgenommen, im übrigen willkürlich.

3°) *Sie soll den Grenz- oder Befestigungsbedingungen genügen.* Diese Bedingungen beziehen sich auf die Enden $A(x = 0)$ und $B(x = l)$ des Stabes und werden so ausgesprochen:

a) Für ein *freies* Ende müssen die (der Abszisse $x = 0$ oder $x = l$) entprechenden Werte von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und von $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ gleich Null werden.

b) Für ein *gestütztes* Ende müssen die entsprechenden Werte von z und von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ gleich Null werden.

c) Für ein *eingeklemmtes* Ende müssen die entsprechenden Werte von z und von $\frac{\partial z}{\partial x}$ gleich Null werden.

Diese Bedingungen sollen für alle Werte von t gelten. Die unter 2°) besprochenen Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, welche die Anfangsstörung darstellen, müssen diesen Grenzbedingungen auch genügen.

Allgemeiner Ansatz für die Lösung.

§ 3.

Die allgemeine Methode zur Lösung dieses Problems besteht im folgenden.

Man setze

$$z = z_1 + z_2 \tag{2}$$

und bestimme z_1 und z_2 durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_1}{\partial t^4} = 0 \tag{3}$$

und

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 z_2}{\partial x^4} = \frac{1}{qs} F(x, t). \tag{4}$$

Man bestimme außerdem die Grenz- und Anfangsbedingungen für z_1 und z_2 so, daß z_1 die freien und z_2 die erzwungenen Schwingungen darstelle. Das wird dadurch erreicht, daß man z_2 und z_1 folgenden Bedingungen unterwirft: 1°) z_2 allein genommen muß den gegebenen, für z geltenden Grenzbedingungen genügen, und was die Anfangsbedingungen anbetrifft,

so nehme man sie für z_2 derart, daß, wenn t gleich Null wird, dann z_2 und $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ auch gleich Null werden. Hierdurch wird z_2 völlig bestimmt sein. 2°) z_1 allein genommen muß den gegebenen für die Summe $z = z_1 + z_2$ geltenden Grenz- und Anfangsbedingungen genügen.

Wenn die Funktionen z_1 und z_2 in dieser Art bestimmt werden, so sieht man sogleich, daß ihre Summe $z = z_1 + z_2$ der Bewegungsgleichung (1) und den Anfangs- und Grenzbedingungen genügt, so daß $z_1 + z_2$ eine Lösung unseres Problemes ist. Diese Lösung ist dabei so beschaffen, daß z_1 nur von der Anfangsstörung $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ und nicht von der wirkenden Kraft $F(x, t)$ abhängt; z_2 dagegen hängt nur von dieser Kraft ab und ist im Gegenteil von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ d. h. von der Anfangsstörung unabhängig. Mit einem Worte: *z_1 wird die freien, z_2 die erzwungenen Schwingungen darstellen.*

Ansatz der freien Schwingung mittels Normalfunktionen.

§ 4.

Es werden zuerst die freien Schwingungen bestimmt, was auf folgende wohlbekannte Art geschieht: Man suche die allgemeinste Form des Ausdruckes

$$z_1 = \sum XT, \tag{5}$$

wo X eine Funktion von x allein und T eine Funktion von t allein bezeichnet, so daß diese Form der Gleichung (3) und den Grenzbedingungen genüge. Dann werden X und T durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{d^4X}{dx^4} - m^4X = 0 \\ \text{und} \\ \frac{d^2T}{dt^2} + b^2m^4T = 0 \end{cases} \tag{6}$$

bestimmt, wobei m einen beliebigen konstanten Wert haben kann.

Man erhält für X

$$X = C_1 \mathfrak{Cof}\, mx + C_2 \mathfrak{Sin}\, mx + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx \tag{7}$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4 willkürliche Konstanten sind und $\mathfrak{Cof}$, $\mathfrak{Sin}$ in gewöhnlicher Weise die hyperbolischen Funktionen bezeichnen.

Der entsprechende Wert von T ist:

$$T = D \cos m^2bt + E \sin m^2bt.$$

Danach nimmt der Ausdruck (5) die folgende Form an:

$$z_1 = \sum DX \cos m^2bt + \sum EX \sin m^2bt, \tag{8}$$

wo die Summen über alle möglichen Werte von m zu erstrecken sind. Um die Grenzbedingungen zu befriedigen, bestimmt man die Konstanten C derart, daß jede von den Funktionen X, allein genommen, den Grenzbedingungen genüge, was bekanntlich für jede Kombination dieser Bedingungen zu einer entsprechenden transzendenten Gleichung

$$\Phi(m) = 0 \tag{9}$$

führt.

Es wurde von Poisson*) bewiesen, daß diese Gleichungen unendlich viele Wurzeln besitzen, die sämtlich reell und voneinander verschieden sind. Man bezeichne diese Wurzeln durch

$$m_1, m_2, \cdots, m_k, \cdots.$$

Jeder Wurzel entspricht eine Funktion X, welche bloß eine willkürliche Konstante als Faktor enthalten wird. Die Funktion X, welche der Wurzel m_k entspricht, wollen wir im folgenden durch $C_k X_k$ bezeichnen.

Setzt man

$$C_k D = A_k \quad \text{und} \quad C_k E = B_k,$$

so erhält man für z_1 den Ausdruck:

$$z_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k \cos m_k^2 bt + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k \sin m_k^2 bt, \tag{10}$$

wo A_k und B_k willkürliche Konstanten, m_k, wie gesagt, die Wurzeln der transzendenten Gleichung (9) und X_k bestimmte Funktionen von x und m_k sind. Diese Funktionen X_k sollen hier im Anschluß an die englischen Autoren *„den Grenzbedingungen entsprechende Normalfunktionen"* genannt werden.

§ 5.

Die Haupteigenschaft dieser Normalfunktionen wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\int_0^l X_i X_k \, dx = 0, \quad \text{wenn } k \text{ ungleich } i \text{ ist.}$$

Diese Gleichung folgt unmittelbar aus der Gleichung (6) und den Grenzbedingungen, welchen die Normalfunktionen genügen.

Diese Eigenschaft liefert nach Fourier das Mittel zur Berechnung der Koeffizienten N_k bei der Darstellung einer gegebenen Funktion $f(x)$ in der Form einer nach den Normalfunktionen fortschreitenden Reihe:

$$f(x) = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \cdots + N_k X_k + \cdots, \tag{11}$$

*) Poisson, Mécanique § 524.

wenn man sich überzeugt oder angenommen hat, daß eine solche Darstellung möglich ist. Die Gleichung (11) wird beiderseits mit $X_k dx$ multipliziert und zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$ integriert, wodurch der Wert

$$N_k = \frac{\int_0^l f(x) X_k dx}{\int_0^l X_k^2 dx} \tag{10}$$

erhalten wird. Der Nenner in dieser Formel kann ein für allemal vermittels der Gleichung (6) berechnet werden, ohne daß man die Integration auszuführen braucht. In Lord Rayleighs Theory of Sound, Chap. VIII, findet man eine kleine Tabelle, welche die Werte dieses Nenners für alle sechs Kombinationen der Grenzbedingungen angibt.

Die erzwungene Schwingung; allgemeine Lösung des Problems.

§ 6.

Der weitere Schritt in unserer Methode besteht in der Bestimmung von z_2. Das wird folgendermaßen erreicht:

1°) die auf den Stab wirkende veränderliche Kraft $F(x, t)$ (oder in technischer Ausdrucksweise — die im Augenblick t statthabende Verteilung der veränderlichen Belastung) ist in der Form einer nach den, den Grenzbedingungen entsprechenden Normalfunktionen X_k fortschreitenden Reihe darzustellen.

Man setze also:

$$F(x, t) = N_1 X_1 + N_2 X_2 + \cdots + N_k X_k + \cdots, \tag{13}$$

woraus

$$N_k = \frac{\int_0^l F(x, t) X_k dx}{\int_0^l X_k^2 dx} \tag{14}$$

folgt, was eine vollkommen bestimmte Funktion der Veränderlichen t darstellt.*)

*) Streng mathematisch gefaßt, ist eine solche Darstellung nur dann möglich, wenn die Funktion $F(x, t)$ denselben Grenzbedingungen wie die Normalfunktionen X genügt. Für die praktischen technischen Anwendungen braucht dies aber nicht der Fall zu sein. Man vergleiche hierzu die Darstellung einer Funktion $f(x)$, die bei $x = 0$ und $x = \pi$ nicht gleich Null ist, durch eine Sinusreihe. Man weiß wohl, daß in diesem Falle mit wachsender Gliederzahl der Reihe die Kurve, welche die Summe dieser Glieder repräsentiert, sich an den Punkten $x = 0$ und $x = \pi$ immer mehr

2°) Man setze ferner

$$z_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k, \tag{15}$$

wo T_k eine noch zu bestimmende Funktion von t bedeutet.

3°) Die Ausdrücke (13) und (15) sind in die Gleichung (4) einzusetzen, dann ersieht man, daß T_k durch die folgende Gleichung:

$$\frac{d^2 T_k}{dt^2} + m_k^4 b^2 T_k = \frac{1}{qs} N_k \tag{16}$$

zu bestimmen ist.

Diese Gleichung gibt:

$$T_k = G_k \cos m_k^2 bt + H_k \sin m_k^2 bt + S_k,$$

wo

$$S_k = \frac{1}{qs} \cdot \frac{1}{m_k^2 b} \left[\sin m_k^2 bt \int_0^t N_k \cos m_k^2 bt\, dt - \cos m_k^2 bt \int_0^t N_k \sin m_k^2 bt\, dt \right]$$

und G_k und H_k willkürliche Konstanten sind.

Diese Konstanten sind derart zu bestimmen, daß, wenn t gleich Null wird, dann auch T_k und $\frac{dT_k}{dt}$ gleich Null werden. Diese Bedingungen folgen unmittelbar aus dem im § 3 Gesagten über die Anfangsbedingungen, welchen z_2 genügen muß. So erhält man:

$$G_k = 0 \quad \text{und} \quad H_k = 0$$

und es wird:

$$T_k = \frac{1}{qsm_k^2 b} \left[\sin m_k^2 bt \int_0^t N_k \cos m^2 bt\, dt - \cos m^2 bt \cdot \int_0^t N_k \sin m^2 bt\, dt \right]. \tag{17}$$

4. Es bleibt noch z_1 so zu bestimmen, daß die Summe $z = z_1 + z_2$ den Anfangsbedingungen genüge; da aber bei $t = 0$ z_2 und $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ beide gleich Null sind, so sind diese Anfangsbedingungen, wie schon im § 3 bemerkt wurde, folgende:

$$\begin{cases} \text{Wenn } t = 0 \text{ ist, so muß } z_1 \text{ gleich } \varphi(x) \text{ werden,} \\ \text{„ } \quad t = 0 \text{ „ „ „ } \frac{\partial z_1}{\partial t} \text{ „ } \psi(x) \text{ „ .} \end{cases} \tag{18}$$

---

einer Senkrechten zur Abszissenachse annähert, so daß diese Senkrechten die entsprechenden Punkte der Abszissenachse mit den Punkten $(0, f(0))$ und $(\pi, f(\pi))$ verbinden. In unserem Falle, wo $F(x, t)$ die Belastung auf den Stab ist, sieht man unmittelbar ein, daß $F(x, t)$ und seine Reihendarstellung (mit vertikaler Ordinate an den Endpunkten) hinsichtlich ihrer Wirkung auf den Stab gleichbedeutend sind.

Näheres darüber kann man bei Byerly, Elementary Treatise on Fourier's Series etc. (Boston, 1893), S. 64 und 65 oder bei R. Fricke, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen (Leipzig, 1900), S. 14 finden.

Diese Bedingungen reichen aus, um die im Ausdrucke 19 noch vorhandenen willkürlichen Konstanten A_i und B_i $i = 1, 2, \ldots$ eindeutig zu bestimmen, denn sie liefern die zwei Gleichungen 19:

$$19) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i X_i = \varphi(x) \\ \sum_{i=1}^{i=\infty} b m_i^2 B_i X_i = \psi(x) . \end{cases}$$

aus welchen:

$$20) \quad \begin{cases} A_i = \dfrac{\int_0^l \varphi(x) X_i dx}{\int_0^l X_i^2 dx} \\ \text{und} \\ B_i = \dfrac{1}{b m_i^2} \cdot \dfrac{\int_0^l \psi(x) X_i dx}{\int_0^l X_i^2 dx} \end{cases}$$

folgt.

Wenn man alle diese einzelnen Resultate und Entwicklungen zusammenzieht, *so sieht man ein, daß unsere Aufgabe durch folgende Ausdrücke formal vollkommen gelöst ist*:

$$(21) \quad \begin{cases} z = z_1 + z_2, \\ z_1 = \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k X_k \cos m_k^2 bt + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k X_k \sin m_k^2 bt, \\ z_2 = \sum_{k=1}^{k=\infty} T_k X_k, \end{cases}$$

wobei T_k durch die Formel (17), A_k und B_k durch die Formeln (20) und m_k durch die transzendente Gleichung (9) bestimmt sind.

Wird die Lösung in dieser Form dargestellt, so ersieht man unmittelbar, daß, wenn $F(x, t)$ gleich Null gesetzt wird, z_2 verschwindet, z_1 aber unverändert bleibt; wenn man dagegen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gleich Null nimmt, so verschwindet z_1, und z_2 bleibt unverändert. Dieses zeigt, daß z_1 wirklich die freien, und z_2 wirklich die erzwungenen Schwingungen des Stabes darstellt.

Die obige Rechnung ist rein formal durchgeführt worden. In jedem einzelnen Falle, wenn die Funktionen wirklich gegeben, nicht nur be-

zeichnet werden, und man dabei streng mathematisch verfahren will, müßte man beweisen, daß die in der Lösung vorkommenden unendlichen Reihen alle die Operationen (Integration und mehrfache Differentationen nach x und t) ohne weiteres zulassen.

Ganz anders steht die Sache in den praktisch-technischen Anwendungen Hier braucht man nur eine ziemlich grobe Annäherung, für welche schon wenige erste Glieder der Reihen genügen. *Die nötige Anzahl dieser Glieder kann durch eine unmittelbare Rechnung bestimmt werden.* Um das zu erreichen, beachte man, daß die veränderliche Belastung $F(x, t)$ praktisch niemals genau, sondern nur näherungsweise angegeben ist: man berechne also die Werte dieser Funktion, welche ihren Verlauf charakterisieren, und man vergleiche sie mit denjenigen Werten, welche durch die Summe der ersten Glieder der Reihe (13) geliefert werden, und man nehme danach so viele Glieder in der Reihe, daß die Abweichungen die praktisch zugelassenen Grenzen der Genauigkeit in der Angabe der Belastung nicht überschreiten.

Gewöhnlich genügen dazu die ersten 2 bis 6, selten 10 Glieder der Reihen. Wir wollen also im folgenden immer stillschweigend annehmen, daß unsere Reihen sich auf endliche Summen reduzieren.

Bewegung eines Stabes unter beweglicher Last.

§ 7.

Um die oben entwickelte allgemeine Methode an einigen Beispielen zu erläutern, werde ich die einfachsten und interessantesten Fälle untersuchen.

1. Beispiel. *Ein gleichförmiger zylindrischer Stab ist an beiden Enden frei gestützt und der Wirkung einer sich gleichförmig bewegenden punktförmigen Last unterworfen. Die Geschwindigkeit der Bewegung sei a, und die Last sei als eine Kraft P angesehen. Es wird verlangt, die erzwungenen Schwingungen des Stabes zu ermitteln.*

Wir wollen erst die allgemeinen Formeln für einen an beiden Enden gestützten Stab entwickeln und dann diese Formeln auf das Beispiel anwenden.

Die Grenzbedingungen für einen gestützten Stab sind folgende:

$$\text{Bei } x = 0 \text{ muß } z = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ werden,}$$

$$\text{„ } x = l \text{ „ } z = 0 \text{ „ } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ „}$$

für jeden beliebigen Wert der anderen Veränderlichen t. Gemäß diesen Grenzbedingungen sind die Normalfunktionen zu bestimmen.

Da

$$X = C_1 \mathfrak{Cof}\, mx + C_2 \mathfrak{Sin}\, mx + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx,$$

so liefern die Grenzbedingungen folgendes System von Gleichungen:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_1 - C_3 = 0 \\ C_1 \mathfrak{Cof}\, ml + C_2 \mathfrak{Sin}\, ml + C_3 \cos ml + C_4 \sin ml = 0 \\ C_1 \mathfrak{Cof}\, ml + C_2 \mathfrak{Sin}\, ml - C_3 \cos ml - C_4 \sin ml = 0, \end{cases}$$

aus welchen

$$C_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_3 = 0$$

folgt; das System (α) wird also mit dem folgenden äquivalent:

$$C_2 \mathfrak{Sin}\, ml + C_4 \sin ml = 0$$
$$C_2 \mathfrak{Sin}\, ml - C_4 \sin ml = 0;$$

die Determinante dieses Systems muß verschwinden, sie lautet aber:

$$\Delta = \mathfrak{Sin}\, ml \cdot \sin ml.$$

Um unnütze Transformationen vom Imaginären zum Reellen zu vermeiden, hat man nur die Gleichung $\Delta = 0$ durch die aus ihr folgende:

$$(\eta) \qquad \sin ml = 0$$

zu ersetzen, dann wird $C_2 = 0$ und C_4 bleibt willkürlich.

Die Gleichung (η) ist die den Grenzbedingungen entsprechende transzendente Gleichung, welche die Werte der Konstanten m liefert.

Es folgt:

$$m_k = \frac{k\pi}{l}. \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Die negativen Werte der ganzen Zahl k braucht man nicht zu betrachten, da die ihnen entsprechenden Glieder mit den aufgenommenen, den positiven Werten von k entsprechenden, sich vereinigen.

Also werden die Normalfunktionen:

$$X_k = \sin \frac{k\pi x}{l}. \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Formeln (19), (20), (21) liefern dann die folgende allgemeine Lösung:

$$(22)\quad \begin{cases} z = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty} \sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\cdot\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \\ \quad + \frac{2l}{\pi^2 b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \\ \quad - \frac{1}{qs}\frac{2l}{\pi^2 b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\int_0^t dt\int_0^l F(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\,dx \\ \quad + \frac{1}{qs}\frac{2l}{\pi^2 b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\int_0^t dt\int_0^l F(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}\,dx \end{cases}$$

des Problems der Schwingungen eines an beiden Enden gestützten Stabes, für welchen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Anfangsstörung und $F(x,t)$ die wirkende Kraft darstellen.

Um diese allgemeine Lösung für unser Beispiel zu benutzen, muß man die punktförmige Kraft P als den Grenzfall einer auf einer kurzen Strecke λ, welche den Angriffspunkt der Kraft P enthält, gleichförmig verteilten Kraft $p = \frac{P}{\lambda}$ ansehen. Dieser Betrachtung zufolge hat man die Funktion $F(x,t)$ so zu definieren:

$F(x,t) = 0$ im Intervalle von $x = 0$ bis $x = at$

$F(x,t) = p = \frac{P}{\lambda}$ „ „ „ $x = at - \frac{\lambda}{2}$ bis $x = at + \frac{\lambda}{2}$*)

$F(x,t) = 0$ „ „ „ $x = at + \frac{\lambda}{2}$ bis $x = l$.

Diese Definition gestattet eine leichte Ausführung der Quadraturen und man erhält:

$$N_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}p\int_{at-\frac{\lambda}{2}}^{at-\frac{\lambda}{2}}\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot dx$$

$$= \frac{2p}{k\pi}\left[\cos\frac{k\pi\left(at-\frac{\lambda}{2}\right)}{l} - \cos\frac{k\pi\left(at+\frac{\lambda}{2}\right)}{l}\right] = \frac{4p}{k\pi}\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at+\frac{\lambda}{2}\right)$$

*) Statt der Werte $at - \frac{\lambda}{2}$ und $at + \frac{\lambda}{2}$ kann man auch $at - \varepsilon$ und $at + (\lambda - \varepsilon)$ nehmen, wobei ε irgend einen Wert haben kann, welcher kleiner als λ ist. Das Resultat bleibt unabhängig von ε.

und die Formel (22) liefert, wenn man $\varphi(x) = 0$ und $\psi(x) = 0$ setzt, den Ausdruck:

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} z = z_2 = {} & \frac{4}{\pi^3}\frac{pl^4}{qs}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^3}\,\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at+\frac{\lambda}{2}\right) \\ & - \frac{4}{\pi^3}\frac{pl^4}{qs}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^3}\,\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2bt}{l^2} \\ & - \frac{4}{\pi^4}\frac{pl^5}{qs}\frac{a}{b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\,\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\cos\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2bt}{l^2}. \end{aligned}\right.$$

Man gelangt noch leichter zu dieser Formel, wenn man die Gleichungen (16) und (17) unmittelbar benutzt.

In unserem Falle wird nämlich die Gleichung (16):

$$(24)\qquad \frac{d^2T_k}{dt^2} + \frac{\pi^4k^4}{l^4}b^2T_k = \frac{1}{qs}\frac{4p}{k\pi}\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at+\frac{\lambda}{2}\right),$$

woraus man ohne Rechnung das partikuläre Integral S_k erhält:

$$S_k = \frac{1}{qs}\frac{4p}{k\pi}\,\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{\frac{\pi^4k^4}{l^4}b^2 - \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at+\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{qs}\frac{4pl^4}{\pi^3k^3}\,\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}\sin\frac{k\pi}{l}\left(at+\frac{\lambda}{2}\right),$$

und wenn man im allgemeinen Integral die willkürlichen Konstanten G_k und H_k derart bestimmt, daß für $t = 0$ T_k und $\frac{dT_k}{dt}$ auch gleich Null werden, so erhält man:

$$G_k = -\frac{4}{\pi^3}\frac{pl^4}{qs}\frac{1}{k^3}\,\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2}$$

und

$$H_k = -\frac{4}{\pi^3}\frac{pl^5a}{qsb}\frac{1}{k^4}\,\frac{\sin\frac{k\pi\lambda}{2l}\cos\frac{k\pi\lambda}{2l}}{k^2\pi^2b^2 - a^2l^2},$$

wonach die Formeln (15) und (17) die oben angeführte Form für z_2 ergeben.

Die Formel (23) *liefert also die Lösung der Aufgabe über die erzwungenen Schwingungen eines Stabes unter der Wirkung einer auf einer kurzen Strecke λ gleichförmig verteilten Last, welche sich mit der Geschwindigkeit a längs des Stabes bewegt.*

Die Formel (23) setzt voraus, daß keiner der im Nenner vorkommenden Ausdrücke

$$k^2\pi^2b^2 - a^2l^2 = 0$$

wird.*)

Wäre eine derartige ganze Zahl $k = k_1$ vorhanden, daß

$$k_1^2\pi^2b^2 - a^2l^2 = 0 \tag{26}$$

sei, dann müßte man die dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch folgende Glieder ersetzen:

$$-\frac{1}{qs}\frac{2pl\cdot\sin\frac{k_1\pi\lambda}{l}}{k_1^2\pi^2a}\cdot t\sin\frac{k_1\pi x}{l}\cdot\cos\frac{k_1\pi}{l}\left(at+\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{qs}\frac{2pl^2}{k_1^2\pi^2a^2}\sin\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\cos\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k_1\pi x}{l}\sin\frac{k_1\pi at}{l},$$

wie es aus (24) folgt, und alle die Summen von $k = 1$ bis $k = \infty$, $k = k_1$ ausgenommen, betrachten.

Die Formel (26) sagt eine gewisse Art von Synchronismus aus zwischen der Periode einer dem Stabe zugehörenden freien Schwingungsart und dem Zeitintervalle, in welchem die Last die ganze Stablänge l durchläuft. Die Zahl der einfachen Schwingungen, welche dem Werte $k = k_1$ entspricht, ist:

$$n_1 = \frac{\pi^2k_1^2b}{\pi l^2} = \frac{\pi k_1^2b}{l^2}$$

und die entsprechende halbe Schwingungsperiode:

$$\tau_1 = \frac{l^2}{\pi k_1^2b}.$$

Die Zeit, welche die Belastung gebraucht, um die Länge l durchzulaufen, ist

$$T = \frac{l}{a}.$$

So sieht man, daß die Relation (26) mit der folgenden

$$T = k_1\tau_1 \tag{27}$$

gleichbedeutend ist.

Man kann dieser Relation noch eine andere anschauliche Form geben: wenn man mit τ die halbe Periode des Grundtons ($k = 1$) des Stabes bezeichnet, so hat man

$$\tau_1 = \frac{\tau}{k_1^2}$$

*) Das Auftreten dieser unendlichen Koeffizienten rührt bekanntlich daher, daß wir unser Problem ohne Berücksichtigung der Reibung angesetzt hatten. Es ist dies der Kürze halber geschehen, da bei Einführung von Reibungsgliedern das Problem sich ohne weitere Schwierigkeiten nach den gleichen Methoden behandeln läßt.

und die Formel (27) nimmt die folgende Form an:

$$T = \frac{\tau}{k_1} \tag{27'}$$

oder

$$a = \frac{k_1 l}{\tau}. \tag{27''}$$

Für die meisten in der Technik gebräuchlichen Fälle wird der Wert (27″) für die Geschwindigkeit a, bei welchem der oben angedeutete Synchronismus stattfinden kann, ein sehr großer, in der Praxis noch nicht vorkommender werden.

§ 8.

Wollen wir jetzt zur Betrachtung der punktförmigen Belastung übergehen.

Man braucht nur in die Formel (23) für p seinen Wert

$$p = \frac{P}{\lambda}$$

einzusetzen und zur Grenze $\lambda = 0$ zu übergehen.

Man hat dann

$$\lim p \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} = \lim \frac{P}{\lambda} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} = \frac{P}{2l} k\pi$$

und die Formel (23) wird:

$$(28) \quad \begin{cases} z_2 = \dfrac{2Pl^3}{\pi^3 qs} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^3(k^2\pi^2b^2 - a^2l^2)} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi a t}{l} \\ \quad - \dfrac{2Pl^4 a}{\pi^3 qsb} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^3(k^2\pi^2b^2 - a^2l^2)} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2\pi^2 b t}{l^2}, \end{cases}$$

wobei im Falle des oben angedeuteten Synchronismus die zwei dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch die folgenden

$$-\frac{1}{qs} \frac{Pl}{k_1 \pi a} t \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \cos \frac{k_1 \pi a t}{l} + \frac{1}{qs} \frac{Pl}{k_1 \pi^2 a^2} \sin \frac{k_1 \pi x}{l} \sin \frac{k_1 \pi a t}{l}$$

zu ersetzen und die Summen, k_1 ausgenommen, zu betrachten sind.

Diskussion der erhaltenen Resultate.

§ 9.

Zwei Bemerkungen bieten sich sofort dem Praktiker:

1°) Wenn die Belastung P sich *sehr langsam* längs des Stabes bewegt, so wird sie offenbar *statisch* wirken, und in jedem Augenblicke

muß die Formel (28) die der statischen Belastung entsprechende Form des Stabes darstellen. Das soll geprüft werden.

2°) Bei der Behandlung des Problems wurde nur die Schwerewirkung der Last, nicht ihre Trägheitswirkung berücksichtigt.

Bei der Trägheitswirkung hängt der Druck, welchen die Last auf den Stab ausübt, von der *Beschleunigung des Angriffspunktes der Last* ab. Dieser Einfluß soll untersucht werden.

§ 10.

Um die *erste von diesen Fragestellungen* zu beantworten, wollen wir vorläufig ein *Beispiel* untersuchen.

Man nehme an, daß im Zeitaugenblick t die Last P bis zur Mitte des Stabes angekommen sei, so daß $\frac{at}{l} = \frac{1}{2}$ ist. Nun wollen wir die Durchbiegung des Stabes für den Angriffspunkt der Last berechnen.

Man weiß, daß diese statische Durchbiegung gleich $\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EJ}$ ist, und es ist nun prüfen, ob die Formel (28) diesen Wert geben wird.

Um die Formel (28) anzuwenden, müssen wir in dieser Formel a verschwindend klein annehmen und

$$\frac{at}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{x}{l} = \frac{1}{2}$$

setzen. Die Formel (28) gibt dann:

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{\pi^3 qs} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4 \pi^2 b^2} \sin\frac{k\pi}{2} \sin\frac{k\pi}{2}$$

oder

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^4},$$

da $b^2 = \frac{EJ}{qs}$ ist, und alle diejenigen Glieder, für welche k eine gerade Zahl ist, verschwinden, weil dann $\sin\frac{k\pi}{2}$ gleich Null wird.

Es ist aber bekannt, daß die Summe

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

ist, also hat man wirklich

$$z_2 = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EJ},$$

wie es auch sein muß.

Dieses Verfahren ist nun im *allgemeinen Falle* anzuwenden.

Man nehme also an, daß im betrachteten Zeitmomente t die Last sich im Punkt C, welcher der Abszisse $x = c$ entspricht, befinde, dann ist

$$at = c.$$

Die Gleichungen der elastischen Linie sind in diesem Falle, wie bekannt, die folgenden:*)

$$\zeta_1 = \frac{P}{EJ}\frac{c(l-c)}{6l}\left[(2l-c)x - \frac{x^3}{c}\right]$$

für die Strecke von $x = 0$ bis $x = c$ und

$$\zeta_2 = \frac{P}{EJ}\frac{c(l-c)}{6l}\left[(l+c)(l-x) - \frac{(l-x)^3}{(l-c)}\right]$$

für die Strecke von $x = c$ bis $x = l$.

Wenn man in der Formel (28) a als verschwindend klein betrachtet, at aber gleich c setzt, so erhält man:

$$z_2 = \frac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{29}$$

und man hat zu zeigen, daß für das Intervall von $x = 0$ bis $x = c$ z_2 gleich ζ_1, und für das Intervall von $x = c$ bis $x = l$ z_2 gleich ζ_2 ist. Um das zu erreichen, braucht man nur eine Funktion $F(x)$ zu betrachten, welche folgender Art definiert ist:

$F(x) = \zeta_1$ im Intervalle von $x = 0$ bis $x = c$,
$F(x) = \zeta_2$ „ „ „ $x = c$ „ $x = l$

und die so definierte Funktion in eine Sinusreihe zu zerlegen; diese Reihe soll dieselbe wie in der Formel (2.) sein.

Wenn man

$$F(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} N_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

setzt, so hat man:

$$N_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Aber der Definition der Funktion $F(x)$ zufolge hat man:

$$\frac{l}{2}N_k = \int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_0^c \zeta_1\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \int_c^l \zeta_2\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{P}{EJ}\frac{c(l-c)}{6l}\cdot\left\{\int_0^c\left[(2l-c)x - \frac{x^3}{c}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_c^l\left[(l+c)(l-x) - \frac{(l-x)^3}{l-c}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\right\}$$

*) Jahrbuch der Hütte, Biegungselastizität. Fall 3.

und nach Ausführung der Rechnung erhält man:

$$N_k = \frac{2P}{EJ}\frac{l^3}{k^4\pi^4}\sin\frac{k\pi c}{l}.$$

Folglich wird die Funktion $F(x)$ so dargestellt:

$$F(x) = \frac{2P}{EJ}\frac{l^3}{\pi^4}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi c}{l}, \tag{29'}$$

was, mit der Formel (29) verglichen, zeigt, daß

$$z_2 = F(x)$$

ist, wenn man beachtet, daß $EJ = b^2qs$ ist.

Diese Prüfung ist für den Mathematiker überflüssig, aber dem Techniker sagt sie viel mehr, als die strengste abstrakte Untersuchung.

§ 11.

Wollen wir jetzt die *zweite Bemerkung* erläutern.

Wenn die Belastung $F(x, t)$ auf dem Stabe unmittelbar aufläge, und das Material des Stabes so hart wäre, daß es durch die Wirkung der Last keine lokalen Eindrücke erleidet, so würde die Bewegungsgleichung, dem D'Alembertschen Prinzipe zufolge, anstatt der Form (1) die folgende Form annehmen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + b^2\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{1}{qs}F(x,t)\Big[1 - \frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\Big], \tag{30}$$

wo, wie früher, $F(x, t)$ die Belastung pro Längeneinheit und g die Beschleunigung der Schwerkraft bezeichnet und die z-Achse vertikal angenommen ist.

Das Vorhandensein des Gliedes:

$$\frac{1}{qs}F(x,t)\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

würde für die Integration unserer Gleichung sehr große Schwierigkeiten darbieten, aber in der Praxis der Baukonstruktionen ist dieses Glied von einem unmerkbar kleinen Einfluß.

Wollen wir erst ein *Beispiel* betrachten — nämlich die *Eisenbahnschienen*.

Hier dient als Last der Druck des Rades auf die Schiene. Diesen Druck kann man sich auf einer sehr kurzen Strecke λ in der Umgebung des Punktes, wo das Rad die Schiene berührt, irgendwie verteilt denken.

Dieser Druck beträgt im Maximum 7000 kg und die übrigen Kon-

messen sind: $J = 1{,}85\ \text{cm}^4$, $E = 2\,150\,000\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Das Gewicht der schweren Lokomotive Preßnitz ist 23,4 kg pro Meter, folglich ist

$$q = \frac{23{,}4}{100} \cdot \frac{1}{981} = 1{,}0254 .$$

Als Länge l kann man die Entfernung zweier Querschwellen annehmen, etwa 0,6 m annehmen.

Ist nun das Kilogramm als Gewichts- und der Zentimeter als Längeneinheit angenommen, wird so hat man folgende Zahlenwerte

$$\lambda_2 = \frac{E\,J}{q\,l^4} = \frac{2\,150\,000 \cdot 1{,}85}{1{,}0254 \cdot 60^4} = 2{,}56 \cdot \ldots$$

$$\frac{2\,E\,J}{q\,l^2\,x} = \frac{2 \cdot 2\,150\,000 \cdot 1{,}85}{1{,}0254 \cdot 3600 \cdot x} = \ldots$$

Die Formel 3a zeigt also, daß die Amplitude der Schwingungen in diesem Falle etwa den Wert λ nun erreichen würde.

Wenn die Geschwindigkeit des Zuges 1 m Kilometer pro Stunde wäre, dann ist:

$$v = \frac{100 \cdot 1000 \cdot 100}{3600} = 3000\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

und

$$\frac{v\,\pi}{l} = \frac{3{,}14 \cdot 3000}{60} = 157 ,$$

so daß die Beschleunigung $\frac{d^2 z}{dt^2}$ maximal den Wert

$$\ldots \cdot 157^2 = \ldots$$

erreichen würde und es würde $\frac{1}{g}\frac{d^2 z}{dt^2}$ etwa $= \frac{1}{2}$ werden, was es zeigen würde, daß die Vernachlässigung dieses Gliedes einen beträchtlichen Fehler erzeugen würde.

Das wäre auch der Fall, wenn das Gewicht des Wagens oder der Lokomotive ganz auf dem Rade läge würde. In der Praxis ist es aber nie der Fall, der Druck wird an den Achsenlagern durch die Federn übertragen.

Diese Federn sind so konstruiert, daß unter der Maximalbelastung von 7 Tonnen sie etwa 10 cm nachgeben. Wenn man diesen Umstand beachtet, so wird man zu ganz anderen Schlüssen gelangen.

Die Gestellbalken der Federn sind mit den Achsenlagern starr verbunden, so daß sie dieselbe Bewegung in der Vertikalebene wie die Berührungspunkte der Räder mit der Schiene machen; der Wagen selbst ist aber mit den Enden der Federn verbunden und sein Schwerpunkt wird nur um soviel schwingen wie diese Enden.

Bezeichne man durch P die auf jeder Feder aufliegende Last, durch f die durch diese Last hervorgerufene statische Durchbiegung der Feder, so erhält man unmittelbar das Resultat, daß die Periode der freien Schwingungen der Last P auf der Feder

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}}$$

ist. Wenn die Grundfläche der Feder erzwungenen Schwingungen unterworfen wird, so werden diese Schwingungen auch ein Mitschwingen oder erzwungene Schwingungen in der Last P hervorrufen. Die Amplitude dieses Mitschwingens hat, wie bekannt, ein bestimmtes Verhältnis zu jener der Grundflächen der Federn. Man hat nämlich folgendes Resultat: Wenn die erzwungenen Schwingungen der Grundfläche der Feder aus einer Summe von Gliedern der Form

$$h \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right)$$

bestehen, so besteht die Schwingung der Last aus einer Summe von Gliedern der Form

$$h \frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \alpha\right),$$

so daß die Amplituden der entsprechenden Einzelschwingungen im Verhältnisse

$$\frac{\tau^2}{T^2 - \tau^2} = \frac{\frac{\tau^2}{T^2}}{1 - \frac{\tau^2}{T^2}}$$

zueinander stehen.

In unserem Falle hat man:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{981}} = 0{,}45 \text{ sec}.$$

Die Periode τ für die Glieder der in der Formel (28) enthaltenen Summen, welche den Faktor $\sin\frac{k\pi at}{l}$ besitzen, ist

$$\tau = \frac{2l}{ak}$$

und für jene mit dem Faktor $\sin\frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}$ behafteten ist

$$\tau_1 = \frac{2l^2}{k^2\pi b}.$$

Die Perioden τ und τ_1 erhalten ihren größten Wert für $k = 1$, nämlich

$$\tau = \frac{2l}{a} = \frac{2 \cdot 90}{3000} = 0{,}06 \text{ sec}$$

und

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\varkappa_1} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 60}{\varkappa \cdot 4{,}56 \cdot 10^{12}} = 0{,}0^{4}\,\text{sec}$$

Man sieht also, daß im ersten Falle

$$\frac{x^2}{l^2} = \left(\frac{9{,}16}{4{,}45}\right)^2 = 0{,}0^{4}$$

ist, und im zweiten:

$$\frac{x^2}{l^2} = \left(\frac{0{,}00222}{4{,}45}\right)^2 = 0{,}0\,0\,0\,2\,5$$

ist.

Diese Resultate zeigen, daß nur $\frac{1}{5}$ der Beschleunigung der Grundflächen der Federn auf die Last übertragen wird, also daß der von Rads auf die Schiene ausgeübte Druck sich nicht mehr als um $\frac{1}{5}$, von dem Gewichte der Last unterscheiden, d. h. daß er in den Grenzen etwa von $0{,}8\,P$ bis $1{,}2\,P$ schwankt.

Zu ganz analogen Resultaten gelangt man, wenn man auch die übrigen in der Praxis vorkommenden Fälle untersucht, was in einer ziemlich allgemeinen Art durchgeführt werden kann, indem man die Durchbiegung des Stabes und die zulässige Spannung unter der andern den Stab charakterisierenden Konstanten beruht.

Man wird sich überzeugen, daß das Glied

$$31 \qquad \frac{1}{g} F x_1 \frac{1}{g} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}$$

immer einer praktisch unendlichen Variation der Belastung $F x_1$ entspricht, so daß diese Belastung als die wirkende Kraft angesehen werden kann. Wenn man aus irgend welchen Gründen den Einfluß dieser Variationen untersuchen will, so hat man nur die oben angegebenen Resultate als die erste Annäherung anzusehen, das Glied 31 als eine Störungsfunktion zu betrachten und die Methode der sukzessiven Annäherungen anzuwenden, ganz analog dem, wie es in der theoretischen Astronomie gemacht wird.

Ehe wir zum zweiten Beispiel übergehen, wollen wir noch den Einfluß der Geschwindigkeit der Last für den Fall der Eisenbahnschienen näher untersuchen.

Da

$$b^2 = 6{,}86 \cdot 10^{12}$$

ist, so ist

$$b = 2{,}62 \cdot 10^{6}, \quad \frac{\varkappa}{b} = \frac{300}{2{,}62 \cdot 10^{6}} = \frac{1}{870}, \quad \frac{\varkappa^2 l^4}{\pi^4 b^2} = \frac{300^2}{\pi^2} \frac{3000^4}{6{,}86} \frac{30^4}{10^{12}} = \frac{1}{940},$$

und

$$\frac{\alpha l}{\pi} = \frac{1}{31}.$$

Wenn man die Formel (28) in folgender Art schreibt:

$$(28') \quad \begin{cases} z_2 = \dfrac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4} \sum_{k=1}^{k=\infty} \dfrac{1}{k^4\left(1-\dfrac{a^2l^2}{k^2\pi^2b^2}\right)} \sin\dfrac{k\pi x}{l} \sin\dfrac{k\pi at}{l}, \\ -\dfrac{2Pl^3}{qsb^2\pi^4} \dfrac{al}{\pi b} \sum_{k=1}^{k=\infty} \dfrac{1}{k^5\left(1-\dfrac{a^2l^2}{k^2\pi^2b^2}\right)} \sin\dfrac{k\pi x}{l} \sin\dfrac{k\pi at}{l}, \end{cases}$$

so sieht man ein, daß der Faktor $1 - \frac{a^2l^2}{k^2\pi^2b^2}$ sich von 1 weniger als um $\frac{1}{940}$ unterscheidet, so daß man diesen Faktor durch 1 ersetzen kann, und dieses um so mehr, da die Größe b^2 nie bis zu $\frac{1}{1000}$ ihres Wertes bekannt sein kann, weil schon eine Abnutzung um $\frac{1}{20}$ mm der oberen Fläche der Schiene das Trägheitsmoment des Querschnitts mehr als um $\frac{1}{1000}$ seines Wertes ändert.

Das zweite Glied in der Formel (28′) beträgt weniger als $\frac{1}{30}$ des ersten und kann auch praktisch vernachlässigt werden.

Wenn man beachtet, daß $\frac{2}{\pi^4} = \frac{1}{48{,}7}$ und daß $b^2 \cdot qs = EJ$ ist, so kann man die angenäherte Formel schreiben:

$$(32) \quad z_2 = \frac{1}{48{,}7} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^4} \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{k\pi at}{l},$$

und wenn man diese Formel mit der Formel (29′) vergleicht, so sieht man, daß sogar bei der größten üblichen Geschwindigkeit des Zuges die auf die Schiene wirkende Last als eine statische angesehen werden kann.

Nähere Betrachtungen über diesen Gegenstand sind von rein praktischem Interesse und gehören nicht zum Zwecke dieser Abhandlung.

§ 12.

2. Beispiel. *Ein an beiden Enden frei gestützter Stab ist der Wirkung einer im Punkte $x = c$ angreifenden periodischen Kraft unterworfen. Diese Kraft ist der z-Achse parallel gerichtet und ihre Intensität durch die Formel*

$$F = P \sin nt$$

dargestellt. Es wird verlangt, die im Stabe erzwungenen Schwingungen zu bestimmen.

Um in diesem Falle die allgemeine Formel (22) anwenden zu können, muß man wieder die in einem Punkte konzentriert angreifende Kraft als den Grenzfall einer auf einer verschwindend kleinen Strecke λ gleichförmig verteilten Kraft ansehen.

Man setze also erst:

$$p = \frac{P}{\lambda}$$

und denke sich die Funktion $F(x, t)$, welche die Belastung darstellt, in der folgender Art definiert:

$F(x, t) = 0$ im Intervalle von $x = 0$ bis $x = c - \frac{\lambda}{2}$,

$F(x, t) = p \sin nt$ „ „ „ $x = c - \frac{\lambda}{2}$ bis $x = c + \frac{\lambda}{2}$.

$F(x, t) = 0$ „ „ „ $x = c + \frac{\lambda}{2}$ „ $x = l$,

dann hat man:

$$\int_0^l F(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = p \int_{c-\frac{\lambda}{2}}^{c+\frac{\lambda}{2}} \sin nt \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot dx$$

$$= \frac{2pl}{k\pi} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l}\left(c + \frac{\lambda}{2}\right) \sin nt.$$

Folglich

$$N_k = \frac{p}{k\pi} \sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l}\left(c + \frac{\lambda}{2}\right) \sin nt,$$

wonach die Formel (22) oder einfacher die Gleichungen (15) und (16) das folgende Resultat liefern:

$$(33) \quad \begin{cases} z_2 = \frac{1}{qs} \frac{pl^4}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k} \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l}\left(c + \frac{\lambda}{2}\right)}{k^4\pi^4b^2 - n^2l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin nt \\ \quad - \frac{1}{qs} \frac{pl^6 n}{\pi^3 b} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^3} \frac{\sin \frac{k\pi\lambda}{2l} \sin \frac{k\pi}{l}\left(c + \frac{\lambda}{2}\right)}{k^4\pi^4b^2 - n^2l^4} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k^2\pi^2 bt}{l^2}, \end{cases}$$

wobei angenommen wird, daß es keine solche ganze Zahl k gibt, daß einer der Nenner gleich Null wäre.

Falls aber ein solcher Wert $k = k_1$ existiert, so daß

$$(34) \quad k_1^4\pi^4b^2 - n^2l^4 = 0$$

ist, oder daß

$$\frac{k_1\pi^2 b}{l^2} = n$$

ist, dann muß man die Summe der beiden dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch die folgenden

$$(35)\qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{qs}\dfrac{pl}{k_1\pi}\dfrac{\sin\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k_1\pi}{l}\left(c+\frac{\lambda}{2}\right)}{2n}\, t\cos nt\sin\dfrac{k_1\pi x}{l}, \\ +\dfrac{1}{qs}\dfrac{p}{k_1\pi}\dfrac{\sin\frac{k_1\pi\lambda}{2l}\sin\frac{k_1\pi}{l}\left(c+\frac{\lambda}{2}\right)}{2n^2}\sin nt\sin\dfrac{k_1\pi x}{l} \end{cases}$$

ersetzen und in der Formel (33) die Summen, $k = k_1$ ausgeschlossen, betrachten.

Die Relation (34) zeigt den Synchronismus der Periode der Kraft mit der Periode einer der freien Schwingungen, welche der Stab ausführen kann oder, anders gesagt, den Synchronismus mit einem der Töne, die dem Stabe entsprechen.

Die Formel (35) zeigt die bekannte Resonanzerscheinung, die bei dem Synchronismus stattfindet.

Gehen wir jetzt zum Grenzfall $\lambda = 0$ über.

Man erhält unmittelbar:

$$(36)\qquad \begin{cases} z_2 = \dfrac{1}{qs}\dfrac{Pl^3}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\dfrac{\sin\frac{k\pi c}{l}}{k^4\pi^4b^2-n^2l^4}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin nt \\ -\dfrac{1}{qs}\dfrac{Pl^5}{2\pi^2}\dfrac{n}{b}\sum_{k=1}^{k=\infty}\dfrac{1}{k^2}\dfrac{\sin\frac{k\pi c}{l}}{k^4\pi^4b^2-n^2l^4}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k^2\pi^2b}{l^2}t, \end{cases}$$

nur im Falle des Synchronismus hat man die Summe der zwei dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder durch die folgende Summe

$$-\frac{1}{ps}\frac{P}{4l}\frac{1}{n}\,t\cdot\sin\frac{k_1\pi c}{l}\cdot\cos nt\cdot\sin\frac{k_1\pi x}{l}$$

$$+\frac{1}{qs}\frac{P}{4l}\frac{1}{n^2}\sin\frac{k_1\pi c}{l}\sin nt\sin\frac{k_1\pi x}{l}$$

zu ersetzen.

Hier sieht man auch den Effekt der Resonanz deutlich ein; man bemerkt aber dabei, daß die dem Werte $k = k_1$ entsprechenden Glieder fortfallen, wenn die Kraft in dem entsprechenden Knotenpunkte angreift, denn es ist dann:

$$\frac{k_1c}{l} = \text{einer ganzen Zahl}$$

und

$$\sin\frac{k_1\pi c}{l} = 0.$$

Diese Beispiele zeigen, wie die entwickelte Methode anzuwenden ist; es wurde der gestützte Stab nur wegen der Einfachheit der Rechnungen betrachtet. Die anderen Fälle bieten auch keine Schwierigkeiten dar.

Praktische Anwendungen auf Untersuchung der Wirkung der beweglichen Last im Eisenbahnbau und auf Untersuchung der Schiffsvibrationen gehören nicht zum Gegenstande und zum Zwecke dieser Abhandlung und werden in den „Abhandlungen des Instituts der Wegebauingenieure“ („Sbornik Instituta Puteii Soobstschenia“) (russisch) Platz finden.

Marine-Akademie zu St.-Petersburg, Winter 1904—1905.

Über die Zerlegung unendlicher Vektorfelder.

Von

Otto Blumenthal in Aachen.

Ein wichtiger Satz der mathematischen Physik besagt, daß ein überall endliches und stetiges, im Unendlichen verschwindendes Vektorfeld sich stets in zwei einfache Komponenten, ein wirbelfreies (lamellares) und ein quellenfreies (solenoïdales) Feld, zerlegen läßt.*)

Trotzdem dieser Satz in mannigfacher Weise angewandt wird, scheint er doch noch nicht allgemein bewiesen zu sein. Die mir bekannten Beweise setzen nämlich sämtlich eine spezielle Art des Verschwindens im Unendlichen voraus: es wird entweder vorausgesetzt, daß das Feld außerhalb einer endlichen Fläche überhaupt weder Quellen noch Wirbel besitze (Abraham-Föppl), oder, daß es im Unendlichen verschwinde wie $\frac{1}{r^2}$ (Math. Enc. IV (2) 14, p. 18). In der Tat werden zu dem Beweise des Satzes über den ganzen Raum erstreckte Integrale

$$\int \frac{\operatorname{div} u}{r} d\tau, \qquad \int \frac{\operatorname{rot} u}{r} d\tau$$

benutzt, deren Existenz nur dann feststeht, wenn das Feld u im Unendlichen eine der beiden angegebenen Bedingungen erfüllt.

Derartige Annahmen über die *Ordnung* des Verschwindens aber sind außerordentlich beschränkend und besonders auch deshalb unzulässig, weil bei einem z. B. durch Differentialgleichungen definierten Felde a priori nichts über die Ordnung des Verschwindens ausgesagt werden kann. Wohl aber läßt sich in der Regel durch allgemeine, besonders energetische, Betrachtungen die *bloße Tatsache des Verschwindens* im Unendlichen ohne Angabe der Ordnung feststellen. Ich weise z. B. darauf hin, daß die Maxwellschen Vektoren des elektrodynamischen Feldes im freien Äther

*) Vergl. z. B. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik, I, pg. 189—191; Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität, I, pg. 98—99; Math. Enc. IV (2) 14 (Abraham), pg. 19.

Komponenten der Form $\frac{\sin r}{r}$ besitzen und daher im Unendlichen von der Ordnung $\frac{1}{r}$, nicht $\frac{1}{r^2}$ verschwinden. Auf derartige Vektoren wäre also der Satz in seiner bisherigen Ausdehnung bereits nicht anwendbar.

Im folgenden gebe ich einen allgemeingültigen Beweis des Satzes, welcher nur die Annahmen benutzt, daß das Feld und seine Ableitungen im Unendlichen verschwinden. Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung der oben angegebenen Integrale.

Dabei ergibt sich aber eine bemerkenswerte neue Tatsache: Während nämlich in den bisher betrachteten Fällen die beiden komponierenden Felder gleichfalls im Unendlichen verschwinden, besteht diese Eigenschaft im allgemeinen Falle nicht mehr. Hier werden vielmehr im allgemeinen die komponierenden Felder im Unendlichen selbst unendlich, aber nur von einer bestimmten niedrigen Maximalordnung. Ich gebe ein Beispiel eines allen Bedingungen genügenden Feldes $\mathfrak{u}$, dessen komponierende Felder dieses unerwartete Verhalten zeigen.

Die Methoden sind solche der Potentialtheorie. Zur Abkürzung aber benutze ich die Schreibweise der Vektor-Analysis, wobei ich Vektoren durch fetten Druck ($\mathfrak{v}$) anzeige und mich im übrigen der Bezeichnungsweise des physikalischen Bandes (V) der Mathematischen Encyklopädie anschließe (Math. Enc. V (2) 13, pg. 71—72).

a. Stellung des Problems. Eindeutigkeitsbeweis.

1. Der zu beweisende Satz lautet folgendermaßen:

Sei $\mathfrak{u}$ ein Vektor, der nebst beliebig vielen Ableitungen überall endlich und stetig ist und im Unendlichen nebst diesen Ableitungen verschwindet; alsdann läßt sich der Vektor stets in zwei Vektoren, einen wirbelfreien $\mathfrak{v}$ und einen quellenfreien $\mathfrak{w}$ zerlegen, so daß

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v} + \mathfrak{w}. \tag{1}$$

Die Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ werden im Unendlichen unendlich von geringerer Ordnung als $\lg r$.*)

Dazu tritt der folgende *Eindeutigkeitssatz:*

Durch die angegebenen Eigenschaften sind $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ bis auf eine additive vektorielle Konstante bestimmt.

2. Der *Beweis des Eindeutigkeitssatzes* wird mit der Greenschen Methode geführt. Seien nämlich $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_1$ zwei wirbelfreie Vektoren, deren Quellen gegeben sind durch

*) Bei dem Beweise wird nur vorausgesetzt, daß die ersten Ableitungen im Unendlichen verschwinden und überall differenzierbar sind.

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} v_1 = \operatorname{div} u,$$

so ist der Differenzvektor

$$V = v - v_1$$

überall quellen- und wirbellos und wird im Unendlichen von geringerer Ordnung als $\lg r$ unendlich. Beschreiben wir also um den Punkt P, für welchen V berechnet werden soll, eine Kugel K von genügend großem Radius R und bezeichnen mit

$$V = \int (V \cdot dr)$$

das zu V gehörige Potential, so folgt nach dem Greenschen Satze

$$V = \operatorname{grad}_P V = \frac{1}{4\pi} \int_K \left[(V \cdot n) \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} - V \operatorname{grad}_P \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] do,$$

wo n die positive Einheitsnormale bedeutet.*) Diese Formel gestattet selbst noch keine Schlüsse auf V; differenziere ich sie aber nach einer beliebigen Richtung h, so folgt

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{4\pi} \int_K \left[(V \cdot n) \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} - V \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right] do.$$

Führt man die Differentiationen aus, so findet man durch einfache Rechnungen für die Punkte der Kugel K die Ungleichungen

$$\left| \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \right| < \frac{A}{R^3}, \quad \left| \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| = \left| - \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_P \frac{1}{r^2} \right| < \frac{A}{R^4}, \ (A \text{ eine Konstante}).$$

$$(V \cdot n) < \lg R, \qquad |V| < R \lg R.$$

Daher wird

$$\left| \frac{dV}{dh} \right| < 2A \frac{\lg R}{R};$$

d. h. aber:

$$\frac{dV}{dh} = 0, \qquad V = \text{vektorielle Konstante}.$$

Damit ist der Eindeutigkeitssatz bewiesen**).

---

*) Da $\frac{1}{r}$ von dem Pol $P=(xyz)$ und dem Aufpunkt $Q=(\xi\eta\zeta)$ abhängt, so werden die Differentiationen nach beiden Punkten durch Indizes unterschieden:

$$\operatorname{grad}_P = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad \text{und} \quad \operatorname{grad}_Q = \frac{\partial}{\partial \xi} i + \frac{\partial}{\partial \eta} j + \frac{\partial}{\partial \zeta} k.$$

Es ist übrigens natürlich $\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = - \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}$.

**) Ein Spezialfall des Eindeutigkeitssatzes hat in der Potentialtheorie Inter-

b. Existenz des wirbelfreien Feldes.

3. Um den Hauptsatz zu beweisen, bilde ich zunächst den wirbelfreien Vektor v, der in seinem Quellenfeld mit u übereinstimmt. Die hier gebrauchte Art der Konstruktion durch ein bestimmtes Integral schließt sich eng an die allgemein angewandte an (siehe Einleitung), unterscheidet sich aber von ihr durch ein additives, konvergenz-erzeugendes Glied, ähnlich wie es in der Reihentheorie bei dem Mittag-Lefflerschen Satz eingeführt wird. Ich fixiere nämlich einen beliebigen Punkt O des Raumes und bezeichne den Abstand eines Punktes Q von diesem Punkte mit r_0. Dann behaupte ich:

Das Integral über den unendlichen Raum

$$\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div} u \left[\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_0}\right] d\tau$$

ist konvergent und stellt einen wirbelfreien Vektor v mit

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} u$$

dar.

Um Wiederholungen zu vermeiden, beweise ich ausführlich nur die Konvergenz, die Beweise der beiden anderen Behauptungen will ich, nur kurz skizziert, vorwegnehmen.

Man betrachte dazu irgend einen Differentialquotienten $\frac{dv}{dh}$. Um ihn zu berechnen, lege man um den Punkt P eine geschlossene beliebig kleine Fläche f, deren Inneres — mit einer im folgenden festgehaltenen Bezeichnung — mit (f), deren Äußeres mit $[f]$ bezeichnet werde. Dann ist

$$\frac{dv}{dh} = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dh}\int_{(f)} \operatorname{div} u \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\, d\tau + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dh}\int_{[f]} \operatorname{div} u \left[\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_0}\right] d\tau,$$

von dem letzten Integral zeigt man leicht, daß es mit

$$\frac{1}{4\pi}\int_{[f]} \operatorname{div} u \frac{d}{dh} \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\, d\tau$$

übereinstimmt. Die Konvergenz dieses Integrales aber läßt sich nach den Methoden der nächsten Nummer erweisen.

---

esse. Wir erhalten nämlich, wenn V im Unendlichen verschwindet, den Satz: Wenn die 1. Differentialquotienten einer Potentialfunktion im Unendlichen verschwinden, so ist die Funktion eine Konstante.

Wenden wir also die Prozesse div und rot auf v an, so kommt, wegen

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} = -\Delta \frac{1}{r} = 0, \qquad \operatorname{rot} \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} = 0,$$

in bekannter Weise

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \int_{(f)} \operatorname{div} u \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \, d\tau, \quad \operatorname{rot} v = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{(f)} \operatorname{div} u \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \, d\tau$$
$$= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \int_{(f)} \operatorname{div} u \frac{1}{r} \, d\tau = 0.$$

Der Ausdruck für div v läßt sich aber jetzt, wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von div u, nach den gewöhnlichen Methoden der Potentialtheorie (mit Hilfe einer partiellen Integration)*) berechnen und liefert, wie verlangt,

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} u.$$

Damit ist also das Zutreffen der Quellen- und Wirbelbedingung für unseren Vektor erwiesen.

4. Es bleibt noch zu liefern der *Beweis für die Existenz* des über den ganzen Raum erstreckten Integrals

$$(2) \quad v = \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} u \left[\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_0} \right] d\tau = \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} u \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) d\tau.$$

Wir verfahren folgendermaßen. Der Abstand OP des Poles von O werde mit ϱ bezeichnet und um O eine Kugel K beschrieben, auf welcher und in deren Äußerem überall $|u| < \varepsilon$ ist. Der Punkt P soll im Inneren dieser Kugel liegen; wir werden speziell festsetzen, daß der Radius $R \geqq \varrho^2$ sein soll. Wir beweisen jetzt, daß

$$\int_{[K]} \operatorname{div} u \left[\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_0} \right] d\tau$$

durch genügend große Wahl des Radius unter jede Grenze herabgedrückt werden kann, damit ist dann die Existenz des Integrals erwiesen.

Wir beschreiben im Raume $[K]$ eine beliebige geschlossene Fläche F, welche aus einer endlichen Anzahl von analytischen Flächenstücken besteht. F soll die Kugel K umgeben, kann aber auch teilweise mit K zusammenfallen. Mit C bezeichnen wir den zwischen K und F eingeschlossenen Raum. Der zu führende Beweis wird alsdann erbracht sein, wenn gezeigt wird, daß

*) Siehe z. B. Dirichlet-Grube, Vorlesungen über Potentialtheorie, p. 18ff. Vergl. besonders auch O. Hölder, Beiträge zur Potentialtheorie (Diss. Tübingen 1882, pg. 9—19).

$$\int_{\tau} \operatorname{div} u \left[\operatorname{grad}_{\xi} \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_{\xi} \frac{1}{r_0}\right] d\tau < \eta(R),$$

wo η, R von der Wahl von F unabhängig ist und mit zunehmendem R gegen 0 geht. Das aber ergibt sich aus dem Greenschen Satze.

Zur Abkürzung werde

$$\frac{1}{4\pi}\left(\operatorname{grad}_{\xi} \frac{1}{r} - \operatorname{grad}_{\xi} \frac{1}{r_0}\right) = G(Q)$$

gesetzt. Dann ist nach dem Greenschen Satze

$$3 \quad \int_{\tau} \operatorname{div} u\, G\, d\tau = \int_{\tilde{F}} u \cdot n\, G\, do - \int_{K} u \cdot n\, G\, do - \int_{\tau} \left(u_\xi \frac{\partial G}{\partial \xi} - u_\eta \frac{\partial G}{\partial \eta} + u_\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta}\right) d\tau.$$

Hier bedeuten u_ξ, u_η, u_ζ die Komponenten von u.

Wir geben zuerst die Abschätzung des Raumintegrals und können uns dabei auf die Betrachtung des ersten Gliedes des Integranden beschränken. In Komponenten zerlegt, ist

$$4 \qquad 4\pi G = -i\left(\frac{\xi - x}{r^3} - \frac{\xi}{r_0^3}\right) - j\left(\frac{\eta - y}{r^3} - \frac{\eta}{r_0^3}\right) - k\left(\frac{\zeta - z}{r^3} - \frac{\zeta}{r_0^3}\right).$$

$$5 \qquad 4\pi \frac{\partial G}{\partial \xi} = -i\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) - 3i\left(\frac{(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{\xi^2}{r_0^5}\right) - 3j\left(\frac{(\xi - x)(\eta - y)}{r^5} - \frac{\xi\eta}{r_0^5}\right) - 3k\left(\frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{r^5} - \frac{\xi\zeta}{r_0^5}\right).$$

Man sieht, daß jede der Komponenten bis auf einen konstanten Faktor dem absoluten Betrag nach kleiner ist als

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} = \frac{A\varrho}{r^4},$$

wo A eine Konstante ist, die leicht genauer abgeschätzt werden kann. Da ferner für alle Punkte Q des Raumes C die Ungleichung $\varrho < r_0^{\frac{1}{2}}$ gilt, so kann nach dem Kosinussatz

$$r = r_0\left(1 - \frac{\alpha}{r_0^2}\right), \quad -\tfrac{1}{2} < \alpha < -\tfrac{1}{2}$$

gesetzt werden. Daraus folgt

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} < \frac{\alpha'}{r_0^{\frac{7}{2}}}, \qquad \frac{A\varrho}{r^4} < \frac{A}{r_0^{\frac{7}{2}}},$$

und die analoge Ungleichung gilt also für $\frac{\partial G}{\partial \xi}$. Daraus aber folgt für das Raumintegral auf der rechten Seite von 3 bei Einführung von Polarkoordinaten r_0, ϑ, φ die Abschätzung

$$(6) \qquad < B\varepsilon \int_R^{\infty} \frac{d r_0}{r_0^{\frac{3}{2}}} < 2B\varepsilon \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}},$$

das Integral wird also für alle Lagen der Fläche F mit wachsendem R beliebig klein.

Einfacher ist die Ableitung der gleichen Tatsache für die Flächenintegrale. Wir ziehen aus (4), in derselben Weise wie oben, den Schluß, daß die Komponenten von G

$$< \frac{\beta}{r_0^{2+\frac{1}{2}}}$$

sind. Führe ich ferner das Flächenelement in Polarkoordinaten ein

$$do^2 = r^4 \sin^2\vartheta\, d\vartheta^2\, d\varphi^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\, dr^2 + r^2\, dr^2\, d\vartheta^2,$$

so folgt auch für die Flächenintegrale eine Ungleichung der Form (6). Somit ergibt sich endgültig

$$\left| \int_C \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, G\, d\tau \right| < \frac{\varepsilon'}{R^{\frac{1}{2}}} < \eta(R),$$

was zu beweisen war. *Die Existenz des Vektors v ist damit erwiesen.*

Daneben brauchen wir weiterhin die Abschätzung des Integrals $\int_{[K_1]} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, G\, d\tau$, erstreckt über den Außenraum einer Kugel K_1 von dem Radius $R = \varrho \lg^2 \varrho$. Unsere bisherige Methode kann ohne Änderung angewandt werden und liefert, weil $\varrho < \frac{r_0}{\lg r_0 - \lg\lg r_0}$, die Abschätzung

$$\left| \int_{[K_1]} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, G\, d\tau \right| < \frac{\varepsilon'}{\lg R} < \frac{\varepsilon'}{\lg \varrho}.$$

Durch Integration läßt sich jetzt auch das zu v gehörige *Potential* v finden. Es folgt:

$$(7) \qquad v = \int (v \cdot d\varrho) = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} \boldsymbol{u} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} + \left(\varrho \cdot \operatorname{grad}_{\varrho} \frac{1}{r_0} \right) \right\} d\tau.$$

Die konvergenz-erzeugenden Zusatzglieder treten hier besonders deutlich hervor.

c. Das wirbelfreie Feld im Unendlichen. Beispiel.

5. Nachdem der Nachweis für die Existenz des Vektors v erbracht ist, stellen wir vor allen Dingen die Frage nach seinem Verhalten im Unendlichen. Wir zeigen:

v wächst mit zunehmendem ϱ schwächer als $\lg \varrho$.

Ich zeige andererseits am *Beispiel, daß das Wachstum der aufgestellten oberen Grenze beliebig nahe kommen kann.*

In Rücksicht auf dieses Beispiel werde ich bei dem Beweise des an-

geführten Satzes die Genauigkeit der Abschätzungen etwas weiter treiben, als es für den unmittelbaren Zweck nötig ist.

6. Wir beschreiben zunächst um die beiden Punkte O und P Kugeln c_0 und c von dem Radius 1. Das Innere beider Kugeln liefert alsdann zu v einen Beitrag, der unterhalb einer von der Lage von P unabhängigen endlichen Grenze liegt. Es bleibt also nur der von dem Außenraume dieser beiden Kugeln herrührende Beitrag zu diskutieren. Hier liefert aber nach 4. das Äußere der Kugel K_1 von dem Radius $\varrho \lg^2 \varrho$ abermals einen mit wachsendem ϱ verschwindenden Bestandteil: die Abschätzung beschränkt sich also schließlich auf den Raumteil, der von den drei Kugeln K_1, c, c_0 begrenzt wird.

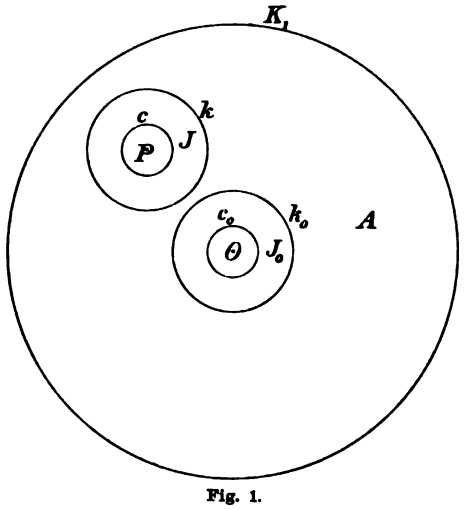


Fig. 1.

Diesen Raumteil zerlege ich schließlich nochmals durch Kugeln k_0 und k von dem Radius $\frac{\varrho}{\lg \varrho}$ um O und P in die 3 Teilräume J_0, J, A (siehe Fig. 1) und schreibe jetzt, unter Weglassung verschwindender Glieder, das abzuschätzende Integral in der Form:

$$(8)\quad \left[\int_{J_0} + \int_{J} + \int_{A}\right] \operatorname{div} u\, G\, d\tau = -\left[\int_{c_0} + \int_{c}\right] (u \cdot n)\, G\, do$$
$$- \left[\int_{J_0} + \int_{J}\right] \left\{u_\xi \frac{\partial G}{\partial \xi} + u_\eta \frac{\partial G}{\partial \eta} + u_\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta}\right\} d\tau$$
$$- \int_{A} \left\{u_\xi \frac{\partial G}{\partial \xi} + u_\eta \frac{\partial G}{\partial \eta} + u_\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta}\right\} d\tau.$$

Zunächst ist die Summe der beiden Flächenintegrale kleiner als eine von P unabhängige Konstante a'.

In den Raum-Integralen sondern wir die beiden in $\frac{\partial G}{\partial \xi}$, $\frac{\partial G}{\partial \eta}$, $\frac{\partial G}{\partial \zeta}$ auftretenden, von O und P herrührenden Bestandteile und behandeln sie einzeln.

Von dem $\int_A$ zeigen wir, daß es höchstens von der Ordnung $\lg \lg \varrho$ ist. Da nämlich in A überall $|u| < \varepsilon$ ist, da ferner nach (5) für jede der Größen $\frac{\partial G}{\partial \xi}$, $\frac{\partial G}{\partial \eta}$, $\frac{\partial G}{\partial \zeta}$ sich eine Abschätzung

$$< \alpha \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_0^2} \right)$$

ergibt, und da die Größen r_0 und r innerhalb A zwischen den Grenzen $\frac{\varrho}{\lg \varrho}$ und $\varrho \lg^2 \varrho$ bezw. $\frac{\varrho}{\lg \varrho}$ und $\varrho \lg^2 \varrho + \varrho$ variieren, so ergibt sich sofort

$$\left| \int_A \right| < \alpha' \varepsilon \int_{\frac{\varrho}{\lg \varrho}}^{\varrho (\lg^2 \varrho + 1)} \frac{dr}{r} < \alpha' \varepsilon [\lg (\lg^2 \varrho + 1) + \lg \lg \varrho] < \beta \varepsilon \lg \lg \varrho .$$

Die beiden Integrale $\int_{J_0}$ und $\int_J$ lassen sich vollständig gleichförmig behandeln. Wir betrachten daher nur $\int_{J_0}$. Man übersieht zunächst leicht, daß der von dem Punkte P herrührende Bestandteil dieses Integrals mit wachsendem ϱ verschwindet (genauere Betrachtung liefert $\frac{1}{(\lg \varrho)^2}$ als Ordnung des Verschwindens).

Für den von dem Punkte O herrührenden Bestandteil erhalten wir zunächst die obere Grenze

$$\beta \int_1^{\frac{\varrho}{\lg \varrho}} |u| \frac{dr}{r} = \beta \left[\int_1^{\lg \varrho} |u| \frac{dr}{r} + \int_{\lg \varrho}^{\frac{\varrho}{\lg \varrho}} |u| \frac{dr}{r} \right]$$

$$< \beta [M \lg \lg \varrho + \varepsilon(\varrho) \{ \lg \varrho - 2 \lg \lg \varrho \}],$$

wo M das absolute Maximum von $|u|$, $\varepsilon(\varrho)$ das Maximum derselben Größe außerhalb einer Kugel um O von dem Radius $\lg \varrho$ bedeutet. Es kommt also schließlich:

$$\left| \int_{J_0} \right| < \beta' \varepsilon(\varrho) \lg \varrho \quad \text{oder} \quad < \beta' \lg \lg \varrho ,$$

je nachdem der erste oder zweite dieser Ausdrücke der größere ist; hier ist β' wieder eine von P unabhängige Konstante.

Das Resultat $< \beta' \varepsilon(\varrho) \lg \varrho$ gilt, mit noch etwas einfacherem Beweise, auch für $\int_J$.*)

---

*) Der angegebene Näherungswert für $\int_{J_0}$ ist sehr roh. Mit ausreichender Genauigkeit dagegen läßt sich $\int_J$ abschätzen. Daher vereinfacht sich die Untersuchung erheblich, wenn u so beschaffen ist, daß

$$v' = \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} u \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} d\tau$$

Die Zusammenfassung der verschiedenen aufgeführten Tatsachen liefert erstens den verlangten Nachweis, daß $|v|$ schwächer wächst als $\lg \varrho$, sie führt aber zweitens zu dem für das folgende wichtigen Ergebnis, daß bei schwach abnehmendem $\varepsilon(\varrho)$ *die Glieder höchster Ordnung allein hervorgehen aus dem P-Bestandteile des Integrals* $\int$ *und dem O-Bestandteile des Integrals* $\int_{J_0}$. *Alle übrigen auftretenden Größen sind höchstens von der Ordnung* $\lg\lg \varrho$.

7. Die letzte Bemerkung ist nützlich zur *Aufstellung von Beispielen* im Unendlichen verschwindender u, deren zugehörige v ihrerseits mit wachsendem ϱ beliebig große Werte annehmen. Das nachstehende Beispiel empfiehlt sich durch besondere Einfachheit, der Vektor v wird in ihm unendlich wie $\frac{\lg \varrho}{\lg\lg \varrho}$.

Wir betrachten einen Vektor u, der überall in der Richtung der x-Achse orientiert ist, dessen Komponenten u_η, u_ζ also identisch Null sind. Die x-Komponente $u_\xi = u$ sei außerhalb einer Kugel von dem Radius $a > e$ gegeben durch

$$u = \frac{x^2}{r_0^2 \lg\lg r_0} = \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\lg\lg r_0},$$

wo ϑ_0 den Winkel gegen die x-Achse in einem Polarkoordinaten-System r_0, ϑ_0, φ_0 bezeichnet. Im Innern der Kugel werde die Funktion mit beliebig vielen stetigen Differentialquotienten fortgesetzt. u_ξ ist überall endlich und stetig und verschwindet im Unendlichen wie $\frac{1}{\lg\lg r_0}$. Die Differentialquotienten verschwinden gleichfalls im Unendlichen, und zwar die ersten von der Ordnung $\frac{1}{r_0 \lg\lg r_0}$, die zweiten von der Ordnung $\frac{1}{r_0^2 \lg\lg r_0}$ usw. Sie sind außerdem überall endlich und stetig mit Ausnahme des Randes und des Inneren der Kugel von dem Radius a, wo nur eine endliche, aber beliebig große Anzahl von ihnen als endlich und stetig vorausgesetzt wird.*)

---

existiert. Dies ist z. B. der Fall, wenn $|u|$ von der Ordnung $\frac{1}{(\lg \varrho)^2}$ oder schärfer abnimmt. Man zeigt dann, daß v' gleichfalls im Unendlichen verschwindet, so daß sich alsdann u in zwei *im Unendlichen verschwindende* Vektoren zerlegen läßt: dies ist eine Erweiterung des in der Einleitung angeführten physikalischen Satzes.

*) Ein Beispiel einer mit *sämtlichen* Ableitungen überall endlichen und stetigen Funktion der gleichen Eigenschaften ist $u = e^{-\frac{1}{r_0}} \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\lg\lg (r_0 + a)}$, $a > e$.

Zur Abschätzung des Vektors v haben wir nur den P-Bestandteil von $\int_J$ und den O-Bestandteil von $\int_{J_0}$ in Betracht zu ziehen.

Das erste Integral liefert zu den 3 Komponenten von v die Beiträge:

$$(J)\quad \begin{gathered} +\frac{1}{4\pi}\int_J \frac{\cos^2\vartheta_0}{\lg\lg r_0}\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{3(\xi-x)^2}{r^5}\right\}d\tau,\quad -\frac{3}{4\pi}\int_J \frac{\cos^2\vartheta_0}{\lg\lg r_0}\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{r^5}d\tau, \\ -\frac{3}{4\pi}\int_J \frac{\cos^2\vartheta_0}{\lg\lg r_0}\frac{(\xi-x)(\zeta-z)}{r^5}d\tau. \end{gathered}$$

Wir bezeichnen mit ϱ, τ die Polarkoordinaten von P in bezug auf O und zeigen, daß innerhalb J sich r_0 und ϑ_0 nur um verschwindende Größen von ϱ, τ unterscheiden. In der Tat ergibt sich zunächst aus dem Kosinussatze für genügend große ϱ

$$r_0 = \varrho\left(1+\frac{\alpha}{\lg\varrho}\right),\quad -2<\alpha<+2;$$

ferner ist (siehe Fig. 2)

$$|\tau-\vartheta_0 \leqq \vartheta,\quad \sin\vartheta = \frac{1}{\varrho}\,\frac{\varrho}{\lg\varrho} = \frac{1}{\lg\varrho}.$$

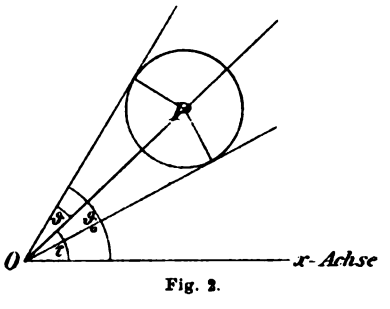


Fig. 2.

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in $\frac{\cos^2\vartheta_0}{\lg\lg r_0}$ ein, so folgt

$$\frac{\cos^2\vartheta_0}{\lg\lg r_0} = \frac{\cos^2\tau}{\lg\lg\varrho}+\frac{\beta}{\lg\varrho\cdot\lg\lg\varrho},\quad -3<\beta<+3.$$

Daher stellt sich z. B. das erste der Integrale (J) in der folgenden Form dar:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\cos^2\tau}{\lg\lg\varrho}\int_J\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{3(\xi-x)^2}{r^5}\right\}d\tau+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\lg\varrho\cdot\lg\lg\varrho}\int_J\beta\left\{\frac{1}{r^3}-\frac{3(\xi-x)^2}{r^5}\right\}d\tau.$$

Das letzte Glied sinkt mit wachsendem ϱ unter jede Grenze, das erste aber verschwindet identisch, wie die Ausführung der Integration unmittelbar ergibt. Das gleiche Verhalten zeigen die beiden anderen Integrale (J). Daher:

Die Integrale (J) liefern zu dem Vektor v im Unendlichen verschwindende Bestandteile.

Wir haben also nur noch die von $\int_{J_0}$ herrührenden Beiträge zu untersuchen. Schreiben wir diese zunächst in der Form

$$(J_0) \quad -\frac{1}{4\pi}\int_{J_0}\frac{\xi^2}{\lg\lg r_0}\,\frac{r_0^2-3\xi^2}{r_0^7}\,d\tau, \quad +\frac{3}{4\pi}\int_{J_0}\frac{\xi^2}{\lg\lg r_0}\,\frac{\xi\eta}{r_0^7}\,d\tau,$$
$$+\frac{3}{4\pi}\int_{J_0}\frac{\xi^2}{\lg\lg r_0}\,\frac{\xi\zeta}{r_0^7}\,d\tau,$$

so ist unmittelbar ersichtlich, daß die beiden letzten Integrale wieder Null sind. Führen wir in dem ersten Integrale Polarkoordinaten ein, so liefert es

$$-\frac{1}{2}\int_a^{\frac{\varrho}{\lg\varrho}}\int_{-1}^{+1}\frac{\cos^2\vartheta_0\,(1-3\cos^2\vartheta_0)}{r_0\cdot\log\log r_0}\,dr_0\,d(\cos\vartheta_0)=\frac{4}{15}\int_a^{\frac{\varrho}{\lg\varrho}}\frac{dr_0}{r_0\lg\lg r_0}$$
$$=\frac{4}{15}\int_{\lg a}^{\lg\varrho-\lg\lg\varrho}\frac{dl}{\lg l},$$

wo $l=\lg r_0$ gesetzt ist. Dies letzte Integral ist aber der Integrallogarithmus und *hat daher bis auf Größen geringerer Ordnung den Wert*

$$\frac{4}{15}\cdot\frac{\lg\varrho}{\lg\lg\varrho}.$$

Daher sehen wir:

Die x-Komponente des Vektors v wird unendlich wie $\frac{\lg\varrho}{\lg\lg\varrho}$, die übrigen Komponenten sicher von geringerer Ordnung als $\lg\lg\varrho$.

Das Beispiel ist von besonderem Interesse, weil es *zeigt, daß das wachsende Verhalten des Vektors v von den Differenzierbarkeitseigenschaften von u gänzlich unabhängig und nur an die Ordnung des Abnehmens dieses Vektors geknüpft ist.*

d. Das quellenfreie Feld.

8. Hiermit ist der in 1. angekündigte Satz vollständig bewiesen, außerdem ist in Formel (2) der wirbelfreie Vektor v allgemein angegeben. Wird aber die Aufgabe gestellt, *einen im Unendlichen verschwindenden Vektor aus seinen Quellen und Wirbeln zu berechnen*, so ist weiter auch *der Vektor w in allgemeingültiger Form zu berechnen.* Diese Aufgabe soll noch gelöst werden.

Wir machen dazu den bekannten Ansatz

$$(9) \qquad w=\operatorname{rot} A,$$

der die Quellenfreiheit von w verbürgt. Wird alsdann A so bestimmt, daß

$$(10) \qquad \Delta A=-\operatorname{rot} u, \qquad \operatorname{div} A=0,$$

so ist

$$\text{rot rot } \boldsymbol{A} = \text{rot } \boldsymbol{w} = \text{rot } \boldsymbol{u}$$

und die Aufgabe gelöst.*) $\boldsymbol{A}$ ist das *Vektorpotential* von $\boldsymbol{w}$.

9. Im folgenden gebrauchen wir eine einfache Erweiterung des Stokesschen Satzes, welche zunächst angegeben werden soll. Bezeichnen wir durch $\text{rot}_\xi \boldsymbol{u}$, $\text{rot}_\eta \boldsymbol{u}$, $\text{rot}_\zeta \boldsymbol{u}$ die Komponenten der $\text{rot}\, \boldsymbol{u}$, so handelt es sich um Umformung durch partielle Integration von Integralen der Form

$$(11) \qquad \int a \,\text{rot}_\zeta \boldsymbol{u}\, d\tau \quad \text{resp.} \quad \int \text{rot}_\zeta \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{G}\, d\tau.$$

Wir benutzen die bekannte Formel

$$\text{rot}\,(a\boldsymbol{u}) = a\,\text{rot}\,\boldsymbol{u} - [\boldsymbol{u} \cdot \text{grad}\, a],$$

aus welcher sich durch Integration über eine Fläche F mit der Randkurve s nach dem Stokesschen Satze ergibt

$$\int a(\text{rot}\,\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})\, df = \int a(\boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}) + \int ([\boldsymbol{u} \cdot \text{grad}\, a] \cdot \boldsymbol{n}) df.$$

Wenden wir diese Formel insbesondere auf ein von der ebenen Kurve s_ζ begrenztes Stück der (xy)-Ebene an, deren Element mit de_ζ bezeichnet werden soll, so folgt

$$(12) \qquad \int a \,\text{rot}_\zeta \boldsymbol{u}\, de_\zeta = \int a(\boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}_\zeta) + \int \left(u_\xi \frac{\partial a}{\partial \eta} - u_\eta \frac{\partial a}{\partial \xi}\right) de_\zeta$$

und bei vektorieller Zusammenfassung ebenso

$$(12') \qquad \int \text{rot}_\zeta \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{G}\, de_\zeta = \int \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}_\zeta) + \int \left(u_\xi \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \eta} - u_\eta \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \xi}\right) de_\zeta.$$

Wir betrachten jetzt ein Integral der Form (11'), erstreckt über das beliebig vielfach zusammenhängende Innere einer Fläche, welche aus einer endlichen Anzahl von analytischen Flächenstücken zusammengesetzt ist. Alsdann lassen sich auf jeden Querschnitt senkrecht zur z-Achse die Formeln (12) resp. (12') anwenden, und wir erhalten daher für das Integral selbst

$$(13) \qquad \begin{aligned} \int \text{rot}_\zeta \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{G}\, d\tau &= \int\int \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}_\zeta) d\xi + \int \left(u_\xi \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \eta} - u_\eta \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \xi}\right) d\tau \\ &= \int \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t}) d\omega_z + \int \left(u_\xi \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \eta} - u_\eta \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \xi}\right) d\tau; \end{aligned}$$

*) Math. Enc. IV 14 (Abraham), pg. 19 u. 20, Formel (20).

hierin bedeutet t die positive Einheitstangente an die Kurve s_ε, $d\varpi_\varepsilon$ die Projektion des Flächenelements do auf die durch ds_ε gelegte Parallelebene zur z-Achse.

Dies ist die Formel, die wir angeben wollten. Ihre Anwendbarkeit wird sofort zutage treten.

10. Wir haben einen Vektor $\boldsymbol{A}$ aufzustellen, welcher den Gleichungen (10) genügt. Ich behaupte:

Ist $\boldsymbol{u}$ ein beliebiger im Unendlichen verschwindender Vektor mit überall stetigen, differenzierbaren und im Unendlichen verschwindenden Ableitungen, so existiert stets das Integral

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int \operatorname{rot} \boldsymbol{u}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} + \left(\varrho \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_0}\right)\right) d\tau \tag{14}$$

und erfüllt die beiden Forderungen

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0,$$

stellt also das gesuchte Vektorpotential dar.

$\boldsymbol{A}$ ist vollkommen analog gebaut wie das skalare Potential (7). Der Beweis für seine Existenz könnte auf direkterem Wege geführt werden; wir benutzen hier diejenige Methode, die sich am genauesten an die Betrachtungen von 4. anschließt.

11. Ich betrachte (mit der Bezeichnung der Formel (11)) die Integrale

$$\int \operatorname{rot}_\zeta \boldsymbol{u} G d\tau, \quad \int \operatorname{rot}_\xi \boldsymbol{u} G d\tau, \quad \int \operatorname{rot}_\eta \boldsymbol{u} G d\tau. \tag{14'}$$

Um die Existenz eines dieser Integrale, z. B. des ersten, zu erweisen, habe ich nur zu zeigen, daß das über den Zwischenraum C zwischen einer Kugel K vom Radius R und einer beliebigen sie umgebenden Fläche F erstreckte Integral

$$\int_C \operatorname{rot}_\zeta \boldsymbol{u} G d\tau$$

mit wachsendem R verschwindet. Dieser Beweis aber läßt sich mit Hilfe der Umformung (13) sofort führen. Man hat auf die Integrale der rechten Seite nur die aus 4. bekannten Abschätzungen für G und seine Differentialquotienten anzuwenden.

Integration und vektorielle Zusammenfassung der Größen (14') liefert die Existenz des gesuchten Vektors $\boldsymbol{A}$.

12. In $\boldsymbol{A}$ ist die Ausführung einmaliger und (bei Ausschluß eines kleinen Gebietes um den Pol) auch zweimaliger Differentiationen unter dem Integralzeichen gestattet (siehe 3.). Hieraus folgt zunächst:

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{u}.$$

Ferner ergibt sich

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon}^{\bullet}\left[\operatorname{rot}_\xi \boldsymbol{u}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}{\partial\xi} + \operatorname{rot}_\eta \boldsymbol{u}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}{\partial\eta} + \operatorname{rot}_\zeta \boldsymbol{u}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}{\partial\zeta}\right] d\tau$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon}^{\bullet}\left(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\cdot \operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right) d\tau .$$

Wir beschreiben um O eine Kugel K von genügend großem Radius R, dann hat der von dem Außenraum dieser Kugel herrührende Bestandteil von $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ einen beliebig kleinen Wert. Der von dem Innenraum herrührende Teil läßt sich nach dem Greenschen Satze umformen in

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{K}(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{n})\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)do + \frac{1}{4\pi}\int_{(K)}^{\bullet}\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)d\tau .$$

Wegen $\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$ verschwindet das letzte Integral identisch. Das erste kann durch genügend große Wahl von R unter jede Grenze herabgedrückt werden. In der Tat ist ja für alle Punkte der Kugel K

$$r = R\left(1+\frac{\alpha\varrho}{R}\right), \qquad -2<\alpha<+2,$$

daher

$$\left|\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right| < \frac{\alpha'\varrho}{R^2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in das Kugelintegral ein und berücksichtigt, daß $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ im Unendlichen verschwindet, so folgt das angegebene Resultat. Daher besteht die Gleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß $\boldsymbol{A}$ allen gestellten Anforderungen genügt.

Für den Vektor $\boldsymbol{w}$ selbst läßt sich schließlich eine recht elegante Integraldarstellung angeben. Führe ich nämlich die Operation $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ unter dem Integralzeichen aus, so folgt

$$(15) \qquad \boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon}^{\bullet}\left[\operatorname{rot} \boldsymbol{u}\cdot \operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right] d\tau .$$

Die formale Ähnlichkeit der Ausdrücke für $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{v}$ ist bemerkenswert.

Auf Grund dieser Darstellung läßt sich durch genaue Übertragung der Entwicklungen von 6. der Nachweis führen, daß $\boldsymbol{w}$ nach dem Unendlichen zu schwächer anwächst als $\lg \varrho$.

13. Hieraus folgt schließlich die zu beweisende Tatsache, daß der aufgestellte Vektor (15) mit der quellenfreien Komponente $\boldsymbol{w}$ der Zerlegung (1) übereinstimmt In der Tat zeigt der Eindeutigkeitssatz, daß $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$ sich auf eine vektorielle Konstante reduzieren muß.

Somit lassen sich alle bisherigen Entwicklungen zu folgendem einfachen Resultat zusammenfassen:

Ein beliebiger mit seinen Ableitungen im Unendlichen verschwindender Vektor u läßt sich aus seinem Quellen- und Wirbelfeld konstruieren durch die Integraldarstellung

$$(16)\quad u = u_0 + \frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div} u \operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) d\tau + \frac{1}{4\pi}\int \left[\operatorname{rot} u \cdot \operatorname{grad}_Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\right] d\tau$$
$$= u_0 + \qquad v \qquad + \qquad w,$$

wo u_0 eine vektorielle Konstante ist. Diese Darstellung ist (bis auf die Konstante) eindeutig dadurch charakterisiert, daß v und w bei Fortgang ins Unendliche möglichst schwach anwachsen.

Im Falle ebener Vektoren bleiben alle Ergebnisse in Kraft, wenn $\frac{1}{r}$ mit $\lg r$ vertauscht wird.

Recherches sur la Convergence des Séries de Fourier.

Par

HENRI LEBESGUE à Rennes.

I.

Soit $f(x)$ une fonction définie pour $0 \leqq x < 2\pi$; je la définis dans tout intervalle par la condition $f(x+2\pi)=f(x)$. Je suppose que $f(x)$ a une intégrale dans $(0, 2\pi)$, alors $f(x)$ a une intégrale dans tout intervalle fini.

Pour donner à ce qui suit toute la généralité possible, le mot *intégrale* devra être pris dans le sens étendu que je lui ai donné dans ma Thèse*). On verra que de cette extension ne résulte aucune complication, mais je dois rappeler que si ma définition de l'intégrale comprend celle de Riemann comme cas particulier lorsqu'il s'agit de fonctions bornées, il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit de fonctions non bornées, et qu'avec ma définition $f(x)$ et $|f(x)|$ ont en même temps une intégrale, ou n'en ont pas.

On sait que la série

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos px + b_p \sin px,$$

où

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos px\,dx, \quad b_p = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\sin px\,dx,$$

est dite la série de Fourier relative à $f(x)$ et que la somme de ses $m+1$ premiers termes est:

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{\beta+\pi} \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t} f(x+2t)\,dt.$$

*) *Intégrale, Longueur, Aire*, Annali di matematica, 1902. — Voir aussi mes *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des fonctions primitives*, Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Prenons $\beta = -\frac{\pi}{2}$ et partageons cette intégrale en deux autres respectivement étendues à $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$; dans la première de ces deux intégrales changeons t en $-t$ on a:

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)t}{\sin t}\,[f(x+2t) + f(x-2t)]\,dt.$$

Si la fonction f avait toujours la valeur particulière qu'elle prend pour la valeur considérée x de la variable, la série de Fourier se réduirait à son premier terme et S_m serait égale à $f(x)$. Donc, dans la formule précédente, on aurait $S_m = f(x)$ si dans le second membre on remplaçait la quantité entre crochets par $2f(x)$. Pour étudier *la convergence de la série de Fourier vers la fonction correspondante* $f(x)$, il suffit donc d'étudier la convergence vers zéro de l'une ou l'autre des intégrales

$$I_m = \pi[S_m - f(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(t)}{\sin t} \sin(2m+1)t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t) \sin(2m+1)t\,dt;$$

dans lesquelles on a posé

$$\varphi(t) = \sin t\,\psi(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x).$$

L'intégrale I_m, prise sous sa première forme, a été l'objet de nombreux travaux qui ont fait connaître des conditions sous lesquelles, pour la valeur x, $f(x)$ est la somme de la série de Fourier correspondante. Je vais énoncer les principales de ces conditions parce qu'elles me serviront dans la suite.

1° (Condition de Dirichlet) $\varphi(t)$ *est continue pour* $t = 0$ *et n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima autour de* $t = 0$ (Journal de Crelle, tome IV).

2° (Condition de Lipschitz) $\varphi(t)$ *est continue pour* $t = 0$ *et, dans un certain intervalle autour de* $t = 0$, *on a:*

$$|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| < A\delta^\alpha \quad (A \text{ et } \alpha > 0 \text{ étant constants})$$

(Journal de Crelle, tome LXIII).

3° (Condition de Lipschitz-Dini) $\varphi(t)$ *est continue pour* $t = 0$ *et, dans un certain intervalle autour de* $t = 0$, *on a:*

$$|[\varphi(t+\delta) - \varphi(t)] \log \delta| < \sigma,$$

quelque soit le nombre positif σ (Dini, Sopra la Serie di Fourier, Pise, 1872).

4° (Condition de Jordan) $\varphi(t)$ *est continue pour* $t = 0$ *et, dans un certain intervalle autour de* $t = 0$, *elle est à variation bornée* (Comptes Rendus, 1881).

J'ai énoncé les conditions relatives à $\varphi(t)$ qui sont fournies immédiatement par les raisonnements, pour les applications il faut remarquer que ces conditions sont vérifiées dès que la fonction f satisfait à des conditions analogues; mais en énonçant seulement les conditions relatives à f on restreint la portée des énoncés sans gagner en simplicité. Par exemple la condition que $\varphi(t)$, qui est nulle pour $t = 0$, soit continue en ce point est remplie si $f(x)$ est continue au point x; mais elle l'est aussi dans le cas plus général où x est ce que j'appellerai un *point régulier* de f, c'est-à-dire si $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et vérifient l'égalité

$$f(x+0) + f(x-0) = 2f(x);$$

enfin elle l'est dans des cas bien plus généraux encore*).

A la seconde forme de l'intégrale I_m on peut rattacher le raisonnement de Riemann sur la décroissance des coefficients des séries de Fourier (Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, § X). Riemann démontre que pour une fonction bornée et intégrable les coefficients de la série de Fourier tendent vers zéro, de plus il montre (§ XIII) que cela n'est plus nécessairement vrai pour les fonctions non bornées et intégrables par sa méthode. Au contraire, si l'on adopte ma définition de l'intégrale, les coefficients de la série de Fourier d'une fonction ayant une intégrale tendent toujours vers zéro (Sur les Séries trigonométriques, Annales de l'Ecole Normale, 1903). Dans ce mémoire, remarquant que I_m, prise sous sa seconde forme, est l'un des coefficients de la série de Fourier relative à une fonction égale à ψ de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et à 0 de $\frac{\pi}{2}$ à 2π, j'ai été conduit à une condition que M. Dini avait démontrée dans le cas particulier où l'on adopte, pour l'intégrale, la définition de Riemann.

*) Relativement aux conditions 1, 2, 3 je dois encore faire quelques remarques.

A la condition de Dirichlet on ajoute souvent la restriction: φ n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité. Cela n'intervient pas dans le raisonnement et n'était supposé par Dirichlet que parce qu'il ne connaissait pas la définition générale de l'intégrale qu'a donnée Riemann. D'ailleurs Dirichlet a levé lui même en partie cette restriction en étendant le sens du mot intégrale. (Voir le mémoire cité de Lipschitz).

La condition de Lipschitz est presque toujours énoncée d'une manière incorrecte que l'on peut reproduire ainsi:

2′ Autour de $t = 0$, on a $|\varphi(\delta)| < A\delta^{\alpha}$.

Il est évident que 2 entraine 2′, mais la réciproque n'est pas vraie et le raisonnement de Lipschitz ne prouve pas que la condition 2′ entraine la convergence.

Cela est vrai cependant comme on le verra à l'aide de la condition 5, mais il faut remarquer que si l'on faisait subir à la condition 3 une transformation analogue à celle que je viens d'indiquer, on aurait un énoncé peut-être incorrect et en tous cas non justifié jusqu'à présent, à ma connaissance du moins.

5° (Condition de Dini) $|\psi(t)|$ *a une intégrale* (Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale, Pise, 1880)*).

On peut d'ailleurs, dans cet énoncé, remplacer $\psi(t)$ par $\chi(t)$,

$$\chi(t) = \frac{\sin t}{t}\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Je me propose de prouver ici qu'on peut aussi rattacher à la seconde forme de I_m les quatre premières conditions énoncées; celà nous conduira à une nouvelle condition de convergence qui, à mon avis, présente quelque intérêt. Les cinq conditions énoncées ont deux grands inconvénients. D'abord elles ne font pas connaître des cas de convergence de plus en plus étendus, mais seulement des cas différents de convergence empiétant un peu les uns sur les autres; aucun des cinq énoncés ne contient les quatre autres comme cas particuliers. Ensuite il est évidemment possible de trouver deux fonctions f_1 et f_2 satisfaisant à deux des énoncés que j'ai donnés sans que leur somme ne satisfasse à aucun d'eux; il faut donc ajouter aux fonctions représentables par leurs séries de Fourier que fournissent les cinq conditions énoncées, les fonctions qui sont sommes de celles-là. Mais une telle remarque ne présentera vraiment d'intérêt que si nous avons un procédé permettant de reconnaître si une fonction donnée appartient ou non à cette nouvelle catégorie de fonctions. Il faudrait pour celà entreprendre des recherches analogues à celles qui ont conduit M. Jordan à la notion de fonction à variation bornée et donner, par exemple, une propriété caractéristique de la somme d'une fonction, satisfaisant à la condition 3 et d'une fonction satisfaisant à la condition 5.

L'énoncé que nous obtiendrons contient les cinq précédents comme cas particuliers et, de plus, il s'applique à la somme de deux fonctions s'il s'applique à chacune d'elles.

II.

On sait en quoi consiste le raisonnement de Dirichlet. Raisonnant sur une intégrale qui s'écrit exactement comme notre première intégrale I_m, il suppose que la fonction $\varphi(t)$ qui y figure est positive et décroissante. Cela lui permet d'écrire l'intégrale sous la forme d'une suite alternée à termes décroissants. Or il est évident que les hypothèses faites sur φ n'interviennent dans cette transformation que par cette conséquence que $\psi = \frac{\varphi}{\sin t}$ est positive et décroissante. Nous allons donc pouvoir faire sur l'intégrale I_m écrite sous la seconde forme la transformation

*) Le signe «*valeur absolue*» a été mis pour le cas où l'on prendrait le mot intégrale dans le sens classique et non dans celui que je lui ai donné.

qu'utilise Dirichlet en supposant à ψ les propriétés indiquées; à cette modification, en apparence insignifiante, du raisonnement de Dirichlet nous trouverons grand avantage. Tandis que Dirichlet ne pouvait supposer, pour sa fonction φ, $\varphi(+0) = 0$ sans que φ ne devienne identiquement nulle pour $t > 0$, nous pourrons supposer $\varphi(+0) = 0$ et celà est même l'hypothèse la plus simple, celle que nous devons tout d'abord examiner, car nous savons que $\varphi(+0) = 0$ lorsque x est un point régulier pour f et à plus forte raison un point de continuité. On va voir qu'en faisant l'hypothèse $\varphi(+0) = 0$ il suffira pour avoir des nombres comprenant I_m et convergeant vers la même limite de calculer le premier terme et la somme des deux premiers termes de la suite alternée, tandis que Dirichlet était obligé de prendre un nombre de termes croissant indéfiniment.

Puisque $\varphi(t) = \psi(t) \sin t$, les hypothèses indiquées sont les suivantes: $\psi(t)$ est une fonction positive décroissante et $\varphi(t)$ tend vers zéro avec t. Alors

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t) \sin(2m+1)t\,dt = u_0(m) - u_1(m) + u_2(m) \cdots,$$

avec

$$u_i(m) = (-1)^i \int_{i\frac{\pi}{2m+1}}^{(i+1)\frac{\pi}{2m+1}} \psi(t) \sin(2m+1)t\,dt;$$

la suite écrite ne contient qu'un nombre fini de termes, elle est alternée et à termes décroissants en valeur absolue. Alors on a:

$$u_0(m) \geqq I_m \geqq u_0(m) - u_1(m),$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \psi(t) \sin(2m+1)t\,dt \geqq I_m \geqq \int_0^{\frac{2\pi}{2m+1}} \psi(t) \sin(2m+1)t\,dt.$$

En valeur absolue ces deux intégrales sont au plus égales à

$$\int_0^{\frac{2\pi}{2m+1}} \varphi(t) \frac{|\sin(2m+1)t|}{\sin t}\,dt \leqq (2m+1) \int_0^{\frac{2\pi}{2m+1}} \varphi(t)\,dt \leqq 2\pi L_m,$$

L_m étant la limite supérieure dans $\left(0, \frac{2\pi}{2m+1}\right)$ de $\varphi(t) = \psi(t) \sin t$. Or L_m tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, donc il en est de même de I_m.

Pour généraliser ce résultat supposons que ψ soit la différence de deux fonctions positives décroissantes ψ_1, ψ_2 telles que $\psi_1 \sin t$ et $\psi_2 \sin t$

tendent vers zéro avec t. Alors ψ est à variation bornée dans tout intervalle $\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, si α est positif et inférieur à $\frac{\pi}{2}$. On pourra poser

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi(t) = p(t) - n(t),$$

$p(t)$ et $n(t)$ étant les variations totales positive et négative de ψ dans $\left(t, \frac{\pi}{2}\right)$*). Mais on a aussi

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi(t) = \left[\psi_2(t) - \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[\psi_1(t) - \psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

et comme les fonctions entre crochets sont positives et décroissantes on a:

$$\psi_2(t) - \psi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqq p(t), \qquad \psi_1(t) - \psi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqq n(t).$$

De ces inégalités et des hypothèses il résulte que $p(t)\sin t$ et $n(t)\sin t$ tendent vers zéro avec t, donc aussi que $v(t)\sin t$ tend vers zéro avec t, $v(t)$ désignant la variation totale $p(t) + n(t)$ dans $\left(t, \frac{\pi}{2}\right)$.

Réciproquement, si $v(t)\sin t$ tend vers zéro avec t, il en est de même de $p(t)\sin t$, de $n(t)\sin t$ et de $\psi_1(t)\sin t$, $\psi_2(t)\sin t$, si l'on prend

$$\psi_1(t) = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left|\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| + n(t), \qquad \psi_2(t) = p(t) + \left|\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

De plus, ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions positives décroissantes, leur différence est ψ de sorte que ψ est bien de la forme considérée.

Avant d'énoncer le résultat obtenu je fais une remarque, qu'il fallait déjà employer pour arriver aux énoncés 1, 2, 3, 4, et qui ne diffère pas d'un théorème de Riemann qu'on peut énoncer ainsi: la convergence au point x de la série de Fourier relative à $f(x)$ ne dépend que de l'allure de $f(x)$ au voisinage du point considéré.

$f(x)$ ayant une intégrale dans tout intervalle, il en est de même pour $\varphi(t)$, par suite aussi pour $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\sin t}$, sauf cependant dans les intervalles où $\sin t$ s'annule. Dès lors, de la proposition que Riemann démontre au § X de son mémoire et qui a été rappelée précédemment, il résulte que l'intégrale I_m, écrite sous la seconde forme et par suite sous la première, n'est modifiée que d'une quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$ si on l'étend à $(0, \alpha)$ compris dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ au lieu de l'étendre à $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

*) J'emploie ici les dénominations adoptées au chapitre IV de mes Leçons sur l'Intégration et la Recherche des fonctions primitives. Il suffit d'ailleurs de savoir que, par leurs définitions mêmes, $p(t)$ et $n(t)$ sont les deux plus petites fonctions *positives et décroissantes* dont la différence est égale à $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \psi(t)$.

Grâce à cette remarque on peut, dans ce qui précède, remplacer $\frac{\pi}{2}$ par α et énoncer le résultat suivant:

6. *La série de Fourier converge au point x vers la fonction s'il est possible de trouver $\alpha > 0$ tel que, quelque soit $t \neq 0$ dans $(0, \alpha)$, $\psi(t)$ soit à variation bornée dans (t, α), la variation totale correspondante $v(t)$ croissant assez lentement avec $\frac{1}{t}$ pour que $tv(t)$ tende vers zéro avec t.*

Dans cet énoncé, comme dans l'énoncé 5, on peut remplacer $\psi(t)$ par $\chi(t) = \psi(t)\frac{\sin t}{t}$. Celà résulte de ce que $\frac{\sin t}{t}$ est à variation bornée et d'une formule, concernant la variation totale d'un produit, que je rappelle.

Soient f_1 et f_2 deux fonctions, dont les variations totales, prises dans (t, α), sont p_1, n_1, v_1; p_2, n_2, v_2. Comme on a:

$$f_1(t) f_2(t) = [p_1 - n_1 + f_1(\alpha)]\,[p_2 - n_2 + f_2(\alpha)],$$

le produit $f_1(t) \cdot f_2(t)$ est à variation bornée, sa variation totale étant au plus égale à

$$[p_1 + n_1 + |f_1(\alpha)|]\,[p_2 + n_2 + |f_2(\alpha)|] = [v_1 + |f_1(\alpha)|]\,[v_2 + |f_2(\alpha)|].$$

L'application de cette formule au remplacement indiqué de $\psi(t)$ par $\chi(t)$ est immédiate; cette même formule va nous montrer que l'énoncé 6 contient l'énoncé 4, donc l'énoncé 1.

Soit, comme le suppose l'énoncé 4, $\varphi(t)$ continue à l'origine et à variation bornée; soit $v(t)$ sa variation totale de 0 à t, $v(t)$ est continue et nulle au point $t = 0$. La variation totale de $\varphi(t)$ dans (t, β) $(t < \beta)$ est $v(\beta) - v(t)$; celle de $\psi(t)$ dans le même intervalle sera donc inférieure à

$$[v(\beta) - v(t) + |\varphi(\beta)|]\left[\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\sin \beta} + \left|\frac{1}{\sin \beta}\right|\right].$$

La variation totale de ψ de β à α $(\beta < \alpha)$ étant M, la variation totale V de ψ dans (t, α) sera au plus

$$[v(\beta) - v(t) + |\varphi(\beta)|]\frac{1}{\sin t} + M;$$

or on peut prendre β assez petit pour que $v(\beta) + |\varphi(\beta)|$ soit aussi petit que l'on veut, puisque, quand t tend vers zéro, on peut prendre β tendant aussi vers zéro, donc $V \sin t$ tend vers zéro avec t, la condition 6 est remplie.

La réciproque n'est pas vraie; l'énoncé 6 s'applique parfois là où l'énoncé 4 ne s'applique pas.

Pour en donner un exemple, je remarque d'abord que, f n'étant soumise qu'à la condition d'avoir une intégrale pour avoir une série de

Fourier, φ ne sera soumise qu'à la condition d'avoir une intégrale et de vérifier les relations

$$\varphi(-t) = \varphi(t) = \varphi(t+\pi).$$

On peut donc prendre, Lt désignant la valeur principale du logarithme,

$$\varphi(t) = \frac{1}{Lt} + t \sin \frac{1}{tLt},$$

dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, — on verra plus loin pourquoi cet intervalle est choisi, — à l'intérieur de $\left(\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right)$ on prendra ensuite $\varphi(t)$ comme on le voudra, ayant cependant une intégrale. Je vais raisonner uniquement sur $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. Pour $t = 0$, on prend comme on sait $\varphi(t) = 0$, alors $\varphi(t)$ est continue à l'origine et l'on a:

$$\chi(t) = \frac{\varphi(t)}{t} = \frac{1}{tLt} + \sin \frac{1}{tLt}; \qquad \chi'(t) = -\frac{1+Lt}{(tLt)^2}\left(1 + \cos \frac{1}{tLt}\right).$$

Dans $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ $\chi'(t)$ est positive ou nulle, donc $\chi(t)$ croît. L'énoncé 6 s'applique. Mais l'énoncé 4 ne s'applique pas; pour le faire voir, $\frac{1}{Lt}$ étant à variation bornée, il suffira de montrer que $\xi(t) = t \sin \frac{1}{tLt}$ est à variation non bornée. Et pour celà il suffira de montrer qu'on peut choisir les nombres t_p positifs et décroissant avec $\frac{1}{p}$ de manière que la série $\Sigma|\xi(t_p) - \xi(t_{p-1})|$ soit divergente. Posons:

$$t_p Lt_p = -\frac{1}{(2p+1)\frac{\pi}{2}};$$

quelque soit l'entier positif p, cette équation définit une valeur t_p et une seule dans $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ et t_p décroît évidemment avec $\frac{1}{p}$. Or $\xi(t_p) = (-1)^p t_p$, donc $\Sigma|\xi(t_p) - \xi(t_{p-1})| = \Sigma(t_p + t_{p-1})$, et il suffira de montrer que Σt_p est divergente pour prouver que $\xi(t)$ est à variation non bornée. On a, $(p \geqq 1)$,

$$t_p \geqq \frac{1}{(2p+1)\frac{\pi}{2} L\left[(2p+1)\frac{\pi}{2}\right]\left\{1 + \frac{LL\left[(2p+1)\frac{\pi}{2}\right]}{L\left[(2p+1)\frac{\pi}{2}\right] - 1}\right\}} \text{ *}).$$

*) Voici comment on peut obtenir cette inégalité. t_p est racine de l'équation

$$F(t) = tLt + a = 0, \qquad \left(a = \frac{2}{(2p+1)\pi}\right).$$

On a $F'(t) < 0$, $F''(t) > 0$, dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ considéré; par suite, si θ_0 est

La quantité entre accolades tend vers 1 quand p croît et, si l'on supprime cette quantité, il reste dans le second membre le terme général d'une série qui, d'après un critère connu, est divergente; la série $\Sigma(t_p)$ est donc divergente.

L'énoncé 6 contenant comme cas particulier l'énoncé 4 contient aussi l'énoncé 1. Mais il ne contient pas les énoncés 2, 3, 5; l'énoncé 2 étant contenu dans les énoncés 3 et 5, il suffira de donner un exemple de fonctions satisfaisant à 2 sans satisfaire à 6. Si $\varphi(t)$ était, dans $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, égale à $(-1)^p \frac{1}{p}$ pour $t = \pm \frac{1}{p}$ (p entier) et linéaire dans chacun des intervalles $\left(\pm\frac{1}{p+1}, \pm\frac{1}{p}\right)$ elle serait à variation non bornée, mais elle satisferait à l'énoncé 2. Qu'elle soit à variation non bornée, celà se voit comme précédemment en prenant $t_p = \frac{1}{p}$; je montre qu'elle satisfait à l'énoncé 2. On a:

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{p}\right) - \varphi\left(\frac{1}{p+1}\right)\right| = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1},$$

or

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}}{\sqrt[3]{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}}}$$

a pour limite 2 quand p augmente indéfiniment, donc on peut trouver le nombre A tel que, pour $t = \frac{1}{p+1}$, $\delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$, on ait

$$|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| < A\sqrt{\delta};$$

A étant ainsi déterminé, cette inégalité a lieu, on le voit facilement, quels que soient t et $\delta > 0$. L'énoncé 2 s'applique donc.

---

dans $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, ou bien t_0 est inférieur à t_p, ou bien $\theta_1 = \theta_0 - \frac{F(\theta_0)}{F'(\theta_0)}$, que l'on obtient en appliquant à θ_0 la correction de Newton, est inférieur à t_p.

Si l'on prend $\theta_0 = \frac{1}{e}$, on a $\theta_1 = -\infty$; celà ne peut servir. Mais de l'équation proposée on tire $t = -\frac{a}{Lt}$; si dans le second membre on prend $t = \frac{1}{e}$ on trouve la nouvelle valeur approchée $t = a$. Pour $\theta_0 = a$, $\theta_1 = 0$ ce qui ne peut encore servir. Mais si l'on fait $t = a$ dans le second membre de $t = -\frac{a}{Lt}$ on trouve $-\frac{a}{La}$ qui, prise pour valeur θ_0, conduit à l'inégalité du texte, car il est évident que $-\frac{a}{La}$ est supérieur à t_p, pour $p \geqq 1$.

Désignons par $\varphi_1(t)$ la fonction qui vient d'être formée et prenons dans $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\varphi(t) = a_1 \varphi_1\left(t - \frac{1}{1}\right) + a_2 \varphi_1\left(t - \frac{1}{2}\right) + \cdots + a_p \varphi_1\left(t - \frac{1}{p}\right) + \cdots,$$

les a_p formant une série absolument convergente. Alors φ est continue mais est à variation non bornée dans tout intervalle contenant une valeur de la forme $\frac{1}{p}$, il en est donc de même de $\psi(t)$, l'énoncé 6 ne s'applique pas. Mais l'énoncé (2) s'applique, car on a évidemment

$$|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| < A(|a_1| + |a_2| + \cdots)\sqrt{\delta},$$

A étant la constante déterminée précédemment.

L'énoncé 6 ne contenant pas l'énoncé 2, ne contient pas à plus forte raison les énoncés 3 et 5. D'ailleurs 6 n'est pas contenu dans 3, ni dans 5, et à plus forte raison dans 2, car on sait qu'il existe des fonctions satisfaisant à 1 sans satisfaire ni à 2, ni à 3, ni à 5. On peut aussi, pour préciser les rapports entre 3, 5, 6, remarquer que la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1}{Lt} + t \sin \frac{1}{tLt},$$

à laquelle s'applique, on l'a vu, l'énoncé 6, donne une fonction $\psi(t)$ qui n'a pas d'intégrale, donc l'énoncé 5 ne s'applique pas. D'autre part on a:

$$\lim_{\delta = 0} [\varphi(\delta) - \varphi(0)] L\delta = 1,$$

donc l'énoncé 3 ne s'applique pas.

En résumé nous n'avons que trois énoncés différents, les énoncés 3, 5, 6, et ceux-là sont différents; celà est bien connu pour 3 et 5, je l'ai prouvé pour le dernier. Pour démontrer que l'énoncé qui va être obtenu contient tous ceux jusqu'ici examinés il suffira de démontrer qu'il contient 3, 5, 6.

III.

C'est en examinant le raisonnement de Lipschitz, qui conduit aux énoncés 2 et 3, que j'ai été amené à la condition de convergence qui a été annoncée au début.

Le raisonnement de Lipschitz est beaucoup moins connu que celui de Dirichlet, mais je puis en résumer les points qui m'ont paru essentiels comme il suit.

Posant comme Dirichlet

$$u_i(m) = (-1)^i \int_{i\frac{\pi}{2m+1}}^{(i+1)\frac{\pi}{2m+1}} \frac{\varphi(t)}{\sin t} \sin(2m+1)t\,dt,$$

Lipschitz obtient

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(t)}{\sin t} \sin(2m+1)t\,dt = u_0 - u_1 + u_2 \cdots;$$

mais la suite limitée du second membre n'est pas nécessairement alternée, ni à termes décroissants. L'évaluation de limites inférieures et supérieures pour cette suite, ne peut plus se faire par le procédé de Dirichlet; dans le procédé de calcul qu'emploie Lipschitz le groupement deux à deux des termes de la suite joue un rôle fondamental. De sorte que Lipschitz évalue en réalité les suites écrites sous l'une des deux formes

$$(u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots,$$
$$u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots.$$

C'est là ce qui, à mes yeux, est essentiel dans le raisonnement de Lipschitz On peut remarquer que, bien que le calcul de Lipschitz diffère beaucoup de celui de Dirichlet, le groupement de termes qu'emploie Lipschitz est aussi utilisé par Dirichlet. C'est parce que ce groupement, opéré de l'une ou de l'autre des deux manières indiquées, donne dans le cas de Dirichlet une suite à termes tous de même signe que celui-ci peut écrire les inégalités qu'il utilise. Ainsi le groupement des termes, qui conduisit Lipschitz et Dini aux conditions 2 et 3, est aussi utilisé pour l'étude du cas 1 et par suite aussi des cas 4 et 6. Si l'on remarque enfin que Riemann (§ X) utilise exactement le même groupement pour arriver au théorème d'où se déduit la condition 5, on sera conduit à essayer de l'employer plus systématiquement.

Posons donc:

$$u_i(m) = (-1)^i \int_{i\frac{\pi}{2m+1}}^{(i+1)\frac{\pi}{2m+1}} \psi(t) \sin(2m+1)t\,dt;$$

$$I_m = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \cdots$$
$$= u_0(m) - [v_1(m) + v_2(m) + \cdots],$$

si

$$v_i = \int_{(2i-1)\frac{\pi}{2m+1}}^{2i\frac{\pi}{2m+1}} \sin(2m+1)t \left[\psi(t) - \psi\left(t + \frac{\pi}{2m+1}\right)\right] dt.$$

Supposons-nous placés dans des conditions telles que $u_0(m)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{m}$ et évaluons la suite des v. Comme on a

$$|v_i| \leqq \int_{(2i-1)\frac{\pi}{2m+1}}^{2i\frac{\pi}{2m+1}} \left|\psi(t) - \psi\left(t + \frac{\pi}{2m+1}\right)\right| dt,$$

on aura aussi

$$|\Sigma v_i| \leqq \int_{\frac{\pi}{2m+1}}^{a} \left|\psi(t) - \psi\left(t + \frac{\pi}{2m+1}\right)\right| dt,$$

si $(0, \alpha)$ est l'intervalle auquel est étendue l'intégrale I_m.*)

Donc, si l'intégrale du second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, ou, ce qui est plus particulier, si l'on a:

$$\lim_{\delta=0} \int_{\delta}^{a} |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt = 0,$$

I_m tend vers zéro; c'est un cas de convergence de la série de Fourier. Mais il reste à étudier la convergence de $u_0(m)$ vers zéro.

Nous avons déjà vu que $u_0(m)$ tend vers zéro quand $\varphi(t)$ est continue au point $t = 0$, en particulier par conséquent quand le point x considéré est un point régulier. Cette remarque suffirait pour conduire à un énoncé comprenant comme cas particuliers les énoncés 1, 2, 3, 4, 6 et comprenant aussi l'énoncé 5 si on ne l'appliquait qu'en des points réguliers. Mais il me paraît intéressant de conserver à l'énoncé 5 toute sa généralité parce que, comme je l'ai fait voir ailleurs, on peut alors s'en servir pour définir des fonctions non intégrables au sens de Riemann et cependant représentables par leur série de Fourier en tout point.

On a:

$$|u_0| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \frac{\varphi(t)}{\sin t} \sin(2m+1)t\, dt\right| \leqq (2m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} |\varphi(t)|\, dt.$$

La fonction $|\varphi(t)|$ a une intégrale. J'ai démontré (Leçons sur l'Intégration, pages 123 et 124) que les points où une fonction, $|\varphi(t)|$ par exemple, ayant une intégrale n'est pas la dérivée de son intégrale indéfinie sont exceptionnels; il est par suite naturel de supposer tout d'abord que

---

*) Il y aurait lieu de tenir compte de ce que les derniers termes des suites $u_i(m)$, $v_i(m)$ n'ont pas nécessairement les mêmes formes que les autres; mais celà nous conduirait tout au plus à ajouter au second membre de l'inégalité précédente une quantité tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

$\int_0^t |\varphi(t)|\,dt$ admet une dérivée nulle à l'origine $t = 0$, ce qui comprend en particulier le cas de $\varphi(t)$ continue. Alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} |\varphi(t)|\,dt = \frac{\pi}{2m+1} \cdot \varepsilon_m,$$

ε_m tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$; $|u_0|$ tend donc vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

7. *La série de Fourier converge au point x vers la fonction, si l'intégrale de $|\varphi(t)|$ a une dérivée nulle pour $t = 0$ et si la quantité*

$$\int_\delta^\alpha |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\,dt, \qquad (\pi > \alpha > 0,\ \delta > 0)$$

tend vers zéro avec δ.

C'est l'énoncé que je voulais obtenir. On gagnerait probablement en généralité en groupant les termes 4 à 4 ou 6 à 6 etc. au lieu de les grouper deux à deux; en conservant la variable discontinue $\frac{\pi}{2m+1}$ au lieu de la variable continue δ; en étudiant mieux $u_0(m)$, etc. Je n'insiste pas sur ces généralisations et je me borne à l'énoncé 7.

Le raisonnement qui prouve, dans les conditions supposées, la convergence de $|u_0(m)|$ vers zéro, montre aussi la convergence vers zéro de

$$|u_0(m)| + |u_1(m)| + \cdots + |u_p(m)|$$

quel que soit le nombre fixe p. De sorte que, sans modifier la portée de l'énoncé 7, on peut remplacer l'intégrale de $|\psi(t+\delta) - \psi(t)|$ étendue de δ à α par l'intégrale de la même quantité étendue de $\lambda\delta$ à α, λ étant une quantité positive, constante, quelconque.

Il est plus intéressant de remarquer que l'on peut modifier la limite supérieure de la même intégrale; d'une façon plus précise, *si la quantité*

$$\int_\delta^\alpha |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\,dt$$

*tend vers zéro avec δ, pour une certaine valeur de α prise à l'intérieur de $(0, \pi)$, il en sera de même pour toute valeur de α prise dans cet intervalle.**)

---

*) Il ne faudrait pas confondre cette propriété avec celle déjà démontrée d'après laquelle la convergence en un point ne dépend que de la nature de la fonction dans le voisinage de ce point. De la propriété que je rappelle et de la condition 1 il résulte que la convergence a lieu en un point régulier si $\varphi(t)$ n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima dans $(0, \alpha)$ si petit que soit $\alpha > 0$. Mais si $\varphi(t)$ n'a

$\psi(t)$ ayant une intégrale dans tout intervalle (α, β), $(0 < \alpha < \beta < \pi)$, celà va résulter du théorème suivant:

Quelle que soit la fonction $\varrho(t)$, ayant une intégrale, l'intégrale

$$J(\varrho, \delta) = \int_{\alpha}^{\beta} |\varrho(t+\delta) - \varrho(t)|\, dt, \qquad (\alpha < \beta)$$

tend vers zéro avec δ.

Celà est évident si ϱ est continue, car alors la quantité sous le signe $\int$ tend uniformément vers zéro; pour le démontrer dans le cas général, je remarque tout d'abord que l'énoncé suppose ϱ définie dans un intervalle (α, γ) plus grand que (α, β) et qu'il ne faut considérer que les valeurs de δ au plus égales à $\gamma - \beta$. Maintenant je remarque que l'on a:

$$\text{(A)} \qquad J(\varrho, \delta) \leqq 2\int_{\alpha}^{\gamma} |\varrho(t)|\, dt;$$

$$\text{(B)} \qquad J(\varrho_1 + \varrho_2, \delta) \leqq J(\varrho_1, \delta) + J(\varrho_2, \delta).$$

De là résulte l'inégalité qui va nous donner le résultat annoncé

$$\text{(C)} \qquad J(\varrho, \delta) \leqq J(\varrho_1, \delta) + 2\int_{\alpha}^{\gamma} |\varrho - \varrho_1|\, dt.$$

ϱ ayant une intégrale, on peut toujours choisir $\varkappa$ assez grand pour que la contribution dans $\int_{\alpha}^{\gamma} |\varrho|\, dt$ des valeurs de ϱ supérieures en valeur absolue à $\varkappa$ soit plus petite que ε.

ϱ_1 sera la fonction égale à ϱ sauf quand $|\varrho|$ est supérieure à $\varkappa$ auquel cas on prendra $\varrho_1 = 0$. Alors l'inégalité (C) donne

$$J(\varrho, \delta) \leqq J(\varrho_1, \delta) + 2\varepsilon.$$

ε étant quelconque, il suffira de démontrer la propriété pour l'intégrale $J(\varrho_1, \delta)$ relative à la fonction *bornée* ϱ_1.

Divisons l'intervalle de variation $(-\varkappa, +\varkappa)$ en $2p$ parties égales $\left(\frac{\lambda\varkappa}{p}, \frac{(\lambda+1)\varkappa}{p}\right)$ $(\lambda = -p, -p+1, \cdots p-1)$ et soit ϱ'_λ une fonction égale à $\frac{\lambda\varkappa}{p}$ quand ϱ_1 satisfait à l'inégalité $\frac{\lambda\varkappa}{p} \leqq \varrho_1 < \frac{(\lambda+1)\varkappa}{p}$, et nulle

---

qu'un nombre fini de maxima et de minima dans un certain intervalle $(0, \alpha)$, il n'en est pas nécessairement de même dans tout intervalle $(0, \alpha)$.

Ce que je vais démontrer dans le texte c'est que l'énoncé 7 ne peut être vérifié dans un intervalle $(0, \alpha)$ sans l'être dans tout autre intervalle $(0, \beta)$. La même propriété est exacte en ce qui concerne l'énoncé 5.

quand ϱ_1 ne satisfait pas à cette inégalité. On peut prendre p assez grand pour que l'intégrale

$$\int_a^\gamma (\varrho_1 - \varrho'_{-p} - \varrho'_{-p+1} - \cdots - \varrho'_p)\, dt$$

soit inférieure à ε, alors de (B) et (C) il résulte

$$J(\varrho_1, \delta) \leqq \sum_{\lambda=-p}^{+p} J(\varrho'_\lambda, \delta) + 2\varepsilon.$$

Et il suffit de démontrer la propriété pour les fonctions telles que ϱ'_λ qui ne prennent que deux valeurs. Soit donc ϱ' une fonction ayant une intégrale et ne prenant que deux valeurs 0 et a. Soit E l'ensemble mesurable des points où ϱ' diffère de 0. Cet ensemble peut être enfermé dans une infinité dénombrable d'intervalles I dont la somme des longueurs ne surpasse la mesure de E que de η; on peut ensuite ne conserver qu'un nombre fini des I, les $\mathfrak{I}$, tout en ne modifiant la longueur totale des I que d'une quantité inférieure à η. Soit ϱ'' et ϱ''' deux fonctions prenant la valeur a respectivement pour les points des I et des $\mathfrak{I}$ et nulles ailleurs. On a évidemment

$$\int_a^\gamma |\varrho' - \varrho''|\, dt \leqq |a|\,\eta, \quad \int_a^\gamma |\varrho'' - \varrho'''|\, dt \leqq |a|\,\eta;$$

par suite (inégalité (C))

$$J(\varrho', \delta) \leqq J(\varrho''', \delta) + 4|a|\,\eta,$$

et il suffit de démontrer le théorème pour $J(\varrho''', \delta)$.

Mais ϱ''' étant bornée et n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité, on peut toujours trouver $\varrho^{(4)}$ continue et telle que l'on ait:

$$\int_a^\beta |\varrho''' - \varrho^{(4)}|\, dt < \varepsilon,$$

alors

$$J(\varrho''', \delta) \leqq J(\varrho^{(4)}, \delta) + 2\varepsilon,$$

et comme la propriété est évidente pour la fonction $\varrho^{(4)}$ continue, elle est vraie dans le cas général.

On peut conclure de là, en particulier, et celà sera utilisé plus loin, que, *pour que la seconde des conditions de l'énoncé 7 soit remplie, il faut et il suffit que, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *on puisse déterminer* $\alpha > 0$ *de manière que l'on ait:*

$$\int_\delta^\alpha |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt < \varepsilon,$$

dès que δ *est assez petit.*

On pourrait aussi transformer la première des conditions de l'énoncé 7, je me contenterai d'indiquer un résultat que l'on vérifiera facilement. Un ensemble mesurable E étant donné, appelons densité moyenne de E dans (a, b) le rapport de la mesure de la partie de E contenue dans (a, b) à la mesure de (a, b). La densité de E en un point P sera la limite, si elle existe, de la densité moyenne de E dans des intervalles (a, b) contenant P et dont les longueurs tendent vers zéro. Avec ces définitions on peut dire que $|\varphi(t)|$, supposée bornée, est au point $t = 0$ la dérivée de son intégrale indéfinie si, et seulement si, quel que soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $|\varphi(t)|$ surpasse ε est de densité nulle au point $t = 0$. Mais cet énoncé n'est exact que si $|\varphi(t)|$ est bornée.

Une autre remarque doit être faite: *On peut remplacer dans l'énoncé 7* $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\sin t}$ *par* $\chi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$. On a, en effet

$$\chi(t+\delta) - \chi(t) = [\psi(t+\delta) - \psi(t)] \frac{\sin(t+\delta)}{t+\delta} + R(\delta),$$

si

$$R(\delta) = \psi(t)\left[\frac{\sin(t+\delta)}{t+\delta} - \frac{\sin t}{t}\right].$$

D'après le théorème des accroissements finis, $R(\delta)$ est égal à $\delta\psi(t)$ multiplié par la dérivée de $\frac{\sin t}{t}$ prise pour une valeur τ comprise entre t et $t+\delta$. Mais comme l'on a:

$$\lim_{\tau=0} \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sin t}{t}\right)'_{t=\tau} = \lim_{\tau=0} \frac{\tau\cos\tau - \sin\tau}{\tau^3} = -\frac{1}{3},$$

on pourra toujours trouver un nombre A tel que, dans l'intervalle (δ, α) dont on s'occupe, on ait:

$$|R(\delta)| < |\psi(t)| \cdot \delta \cdot A\tau;$$

mais on a:

$$\delta \leqq t \leqq \tau \leqq t+\delta \leqq 2t,$$

donc

$$|R(\delta)| < 2A\delta\,|\varphi(t)| \cdot \frac{t}{\sin t}.$$

$|\varphi(t)|$ ayant une intégrale dans tout intervalle, $\int_\delta^\alpha |R(\delta)|\,dt$ tend vers zéro avec δ. Par suite, de l'égalité du début il résulte que les deux quantités $|\psi(t+\delta) - \psi(t)|$, $|\chi(t+\delta) - \chi(t)|$, intégrées de δ à α, tendent vers zéro en même temps.

IV.

Je vais maintenant montrer que l'énoncé 7 contient tous ceux précédemment examinés; il suffit pour celà de montrer qu'il contient les énoncés 3, 5, 6.

Je traite d'abord le cas de l'énoncé 5; lorsqu'on est dans les conditions de cet énoncé $|\psi(t+\delta)-\psi(t)|$ intégrée de 0 à α tend vers zéro avec δ, donc il en est de même à plus forte raison si l'on n'intégre cette quantité que de δ à α. La seconde des conditions de l'énoncé 7 est remplie.

De plus $u_0(m)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$, car

$$|u_0(m)| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} \psi(t)\sin(2m+1)t\,dt\right| \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2m+1}} |\psi(t)|\,dt,$$

et cette dernière intégrale tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Mais dans l'énoncé 7 la condition générale: $u_0(m)$ *tend vers zéro* a été remplacée par une condition plus particulière: *l'intégrale de* $|\varphi(t)|$ *a une dérivée nulle pour* $t=0$, et c'est cette condition qu'il faut montrer satisfaite dans le cas de l'énoncé 5.

$\psi(t)$ ayant une intégrale dans $(0, t)$, je pose $\Psi(t) = \int_0^t |\psi(t)|\,dt$; $\Psi(t)$ est une fonction continue, nulle pour $t=0$. On a:

$$\frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(t)|\,dt = \frac{1}{t}\int_0^t |\psi(t)|\sin t\,dt = \frac{\sin t}{t}\Psi(t) - \frac{1}{t}\int_0^t \Psi(t)\cos t\,dt;$$

les deux termes du troisième membre tendent vers zéro avec t, celà est évident pour le premier de ces termes et celà se voit pour le second en remarquant qu'il fournit à la limite la dérivée pour $t=0$ de l'intégrale de 0 à t de la fonction continue $\Psi(t)\cos t$. Donc le premier membre, qui fournit à la limite la dérivée pour $t=0$ de $\int_0^t |\varphi(t)|\,dt$, tend vers zéro avec t et les conditions de l'énoncé 7 sont remplies.

Dans le cas où les conditions de l'un des énoncés 3 ou 6 sont remplies, la première condition de l'énoncé 7 est remplie, il va suffire de s'occuper de la seconde.

Dans le cas de l'énoncé 6, la fonction ψ est la différence de deux autres fonctions ψ positives et décroissantes pour $t>0$ et relatives à deux fonctions φ continues au point 0; comme l'énoncé 7 s'applique évidemment à la somme de deux fonctions quand il s'applique à ces fonctions

il va suffire de montrer que la seconde des conditions de l'énoncé 7 est remplie quand ψ est positive, décroissante pour $t > 0$ et φ continue au point 0.

Dans ces conditions, on a:

$$\int_{\delta}^{\alpha} |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt = \int_{\delta}^{\alpha} [\psi(t) - \psi(t+\delta)]\, dt = \int_{\delta}^{2\delta} \psi(t)\, dt - \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} \psi(t)\, dt.$$

La dernière intégrale tend vers zéro; quant à la première, si $L(\delta)$ désigne la limite supérieure de φ dans $(\delta, 2\delta)$, elle vérifie la relation

$$0 < \int_{\delta}^{2\delta} \psi(t)\, dt < \frac{L(\delta)}{\delta} \int_{\delta}^{2\delta} dt = 2L(\delta);$$

puisque φ est continue au point 0, $L(\delta)$ tend vers zéro avec δ, les conditions de l'énoncé 7 sont remplies.

On peut présenter cette démonstration sous une forme géométrique assez élégante. Je trace la courbe ou l'ensemble de points $y = \psi(x)$, les axes Ox, Oy étant rectangulaires. Soit C cette courbe, $C(\delta)$ celle qu'on en déduit en déplaçant C le long de Ox de la longueur δ. L'intégrale $\int_{\delta}^{\alpha} |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt$ est la somme des aires (prises toutes positivement) comprises entre C, $C(\delta)$ et les deux parallèles à Oy d'abscisses δ et α. Dans la translation qui change C en $C(\delta)$ chaque point de C décrit un segment de longueur δ parallèle à Ox et, si ψ est décroissante, deux tels segments n'empiètent jamais l'un sur l'autre. De sorte que l'aire balayée dans la translation par la partie de C correspondant à $\delta \leqq x \leqq \alpha + \delta$, aire qui est toujours au moins égale à l'intégrale à calculer, peut ici être évaluée en multipliant δ par la mesure de la projection sur Oy de la partie utilisée de C. Ce qui donne pour l'aire balayée au plus

$$\delta[\psi(\delta) - \psi(\alpha + \delta)];$$

or dire que φ est continue au point 0, c'est dire que $\delta\psi(\delta)$ tend vers zéro avec δ, l'aire balayée a pour limite zéro, il en est de même de $\int_{\delta}^{\alpha} |\psi(t+\delta) - \psi(t)|\, dt$.

Plaçons-nous maintenant dans les conditions de l'énoncé 3 et l'on va voir immédiatement que la 2ième condition de l'énoncé 7, prise sous sa seconde forme, est vérifiée. σ étant arbitrairement petit positif, il lui correspond $(0, \alpha)$ dans lequel on a:

$$|\varphi(t+\delta) - \varphi(t)| \log \frac{1}{\delta} < \sigma,$$

c'est l'hypothèse. On déduit de là

$$|\chi(t+\delta)-\chi(t)| = \left|\frac{\varphi(t+\delta)-\varphi(t)}{t+\delta}+\varphi(t)\left(\frac{1}{t+\delta}-\frac{1}{t}\right)\right|$$
$$\leqq \frac{\sigma}{t\log\frac{1}{\delta}}+\frac{\sigma}{\log\frac{1}{\delta}}\frac{\delta}{t(t+\delta)} < \sigma\left(\frac{1}{t\log\frac{1}{\delta}}+\frac{\delta}{t^2}\right),$$

donc, en supposant $\alpha < 1$,

$$\int_{\delta}^{\alpha}|\chi(t+\delta)-\chi(t)|\,dt < \sigma\left[\frac{\log\frac{\alpha}{\delta}}{\log\frac{1}{\delta}}+\delta\cdot\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right)\right] < 3\sigma;$$

la seconde condition de l'énoncé 7 est vérifiée.

Ainsi l'énoncé 7 comprend bien tous ceux que j'avais cités. Je pourrais de même montrer qu'il comprend tous les énoncés donnés par M. Dini aux pages 100 à 105 de son livre sur la série de Fourier; mais comme la vérification ne présente pas de difficultés je me bornerai à faire une remarque.

Loin d'introduire des énoncés plus compliqués en réunissant en un seul ces énoncés de M. Dini on gagne beaucoup en simplicité; il y a plus. Certains des énoncés de M. Dini permettent d'affirmer qu'il y aura convergence lorsqu'une certaine propriété aura lieu, mais on ne sait pas reconnaître quand cette propriété a lieu. Par exemple on peut affirmer la convergence si l'on a $\varphi(t) = \rho(t)\,\omega(t)$, ρ et ω satisfaisant à certaines conditions; mais on ne sait pas aborder l'étude du problème consistant à essayer de reconnaître si $\varphi(t)$ donnée est un tel produit. Au contraire l'énoncé 7 ne suppose que des opérations bien étudiées depuis longtemps. Sans doute on ne sait pas effectuer ces opérations dans tous les cas et celà ne doit pas surprendre, car il n'est pas d'opération, si simple soit-elle en apparence, que l'on sache effectuer sur toute fonction donnée: quand une fonction est donnée on ne sait pas nécessairement, par exemple, calculer sa valeur en un point. Mais les opérations que suppose l'énoncé 7 sont de celles que l'on a l'habitude d'effectuer, de celles qui sont en général possibles sur les fonctions qui se présentent d'elles-mêmes en analyse et dont l'étude a, du moins, été faite assez pour que l'on puisse aborder le problème consistant à reconnaître si l'énoncé 7 s'applique ou non à un exemple donné.

Je ne veux pas dire que l'énoncé 7 enlève tout intérêt aux énoncés de M. Dini et à ceux que j'ai précédemment étudiés; il est évidemment toujours avantageux d'avoir des énoncés particuliers moins généraux, mais plus maniables dans certains cas; il est aussi avantageux d'avoir plusieurs

formes des mêmes énoncés, c'est pourquoi je vais donner une nouvelle transformation de la deuxième des conditions de l'énoncé 7.

Pour obtenir cette nouvelle forme, il suffira de reprendre le calcul qui a prouvé que 7 contenait 3. Posons

$$\chi(t+\delta)-\chi(t)=\frac{\varphi(t+\delta)-\varphi(t)}{t}+S(\delta),$$

$$S(\delta)=\varphi(t+\delta)\left(\frac{1}{t+\delta}-\frac{1}{t}\right)=\varphi(t+\delta)\frac{\delta}{t(t+\delta)},$$

$$\int_\delta^\alpha |S(\delta)|\,dt \leqq \delta\int_\delta^\alpha \frac{|\varphi(t+\delta)|}{t^2}\,dt.$$

Je pose $\Phi_1(t)=\int_0^t |\varphi(t)|\,dt$, alors l'intégration par parties donne

$$\int_\delta^\alpha |S(\delta)|\,dt \leqq \frac{\delta\Phi_1(\alpha+\delta)}{\alpha^2}-\frac{\Phi_1(2\delta)}{\delta}+2\delta\int_\delta^\alpha \frac{\Phi_1(t+\delta)}{t^3}\,dt.$$

Supposons remplie la première condition de l'énoncé 7, c'est-à-dire supposons que $\Phi_1(t)$ ait une dérivée nulle à l'origine, alors, quel que soit $\varepsilon>0$, on peut toujours prendre α assez petit pour que, dans $(\delta, 2\alpha)$, on ait:

$$0<\Phi_1(t)<\varepsilon t$$

d'où, puisque l'on a

$$0<\delta\leqq t<t+\delta\leqq 2t,$$

$$0<\Phi_1(t+\delta)<2\varepsilon t.$$

Par suite

$$\int_\delta^\alpha |S(\delta)|\,dt<\frac{\delta\cdot 2\varepsilon}{\alpha}+2\varepsilon+4\delta\varepsilon\int_\delta^\alpha\frac{dt}{t^2}$$

$$=\frac{2\varepsilon\delta}{\alpha}+2\varepsilon-4\varepsilon\left(\frac{\delta}{\alpha}-1\right)<8\varepsilon.$$

Si maintenant nous nous reportons à la première égalité, nous en déduirons

$$\left|\int_\delta^\alpha |\chi(t+\delta)-\chi(t)|\,dt-\int_\delta^\alpha\frac{|\varphi(t+\delta)-\varphi(t)|}{t}\,dt\right|<8\varepsilon;$$

ceci montre que *dans l'énoncé 7 on peut remplacer l'une par l'autre les trois quantités*

$$|\psi(t+\delta)-\psi(t)|,\quad |\chi(t+\delta)-\chi(t)|,\quad \frac{|\varphi(t+\delta)-\varphi(t)|}{t}.$$

La dernière forme de l'énoncé 7 ainsi obtenue serait particulièrement commode si l'on voulait avoir des énoncés analogues à 2 et 3 en assujet-

tissant $|\varphi(t+\delta)-\varphi(t)|$ a être inférieure, non plus à une fonction de δ comme dans 2 et 3, mais à une fonction de t et δ. Je ne m'attarderai pas à rechercher des énoncés particuliers rentrant dans l'énoncé 7; il me paraît probable que de tels énoncés seraient intéressants seulement dans le cas où l'on aurait souvent à étudier la possibilité du développement en série de Fourier de fonctions d'une classe déterminée de fonctions, et l'énoncé particulier à employer dépendrait de la nature de cette classe.

V.

Je passe maintenant à un sujet assez différent: l'emploi de l'énoncé 7 à la généralisation d'un théorème de M. Fejér*). Voici ce théorème: *La série de Fourier, relative à une fonction bornée et intégrable au sens de Riemann, représente cette fonction en tous ses points de continuité et en tous ses points réguliers quand on somme cette série par le procédé de la moyenne arithmétique.*

On somme une série

$$u_0+u_1+u_2+\cdots$$

par le procédé de la moyenne arithmétique quand on lui attribue pour somme la limite (quand elle existe) des nombres σ_n définis par les égalités:

$$S_p=u_0+u_1+\cdots+u_p, \quad \sigma_n=\frac{S_0+S_1+\cdots+S_{n-1}}{n}.$$ **)

Pour bien mettre en évidence toute l'importance du résultat de M. Fejér en ce qui concerne la représentation des fonctions discontinues, je ferai quelques remarques préliminaires.

Soit $f(x)$ une fonction ayant une intégrale — il importe peu d'ailleurs que ce soit une intégrale au sens de Riemann ou au mien. Soit $F(x)$

*) Untersuchungen über Fouriersche Reihen; Math. Annalen, Bd. 58, S. 51.

**) D'après les indications de M. Fejér il semble que ce soient les résultats obtenus par MM. Borel et Mittag-Leffler relativement aux séries entières qui lui aient donné l'idée d'entreprendre son important travail. Il est peut-être curieux de remarquer d'une part que la méthode de sommation des séries divergentes de M. Borel est une généralisation de la méthode de sommation par la moyenne arithmétique et d'autre part que, dès que l'on eut imaginé cette dernière méthode, on l'ait appliqué à des séries trigonométriques. C'est ainsi que dans le *Premier Supplément au 25ième mémoire* de ses *Opuscules Mathématiques* (tome IV, Paris 1768) D'Alembert démontre à peu près rigoureusement que la série

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots$$

a pour somme $-\frac{1}{2}$, sauf pour $x=2k\pi$, quand on lui applique le procédé de la moyenne arithmétique. D'Alembert n'aperçut d'ailleurs pas la portée de ce théorème et il s'éleva avec force et non sans raison contre l'emploi que certains voulaient en faire.

l'intégrale indéfinie de $f(x)$; alors on a, d'après un théorème que j'ai déjà rappelé et pour lequel j'ai renvoyé aux pages 123 et 124 de mes Leçons sur l'Intégration,

$$f(x) = \lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x),$$

sauf pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle. Celà revient à dire que l'on peut trouver une suite de fonctions continues tendant vers $f(x)$, sauf pour les valeurs exceptionnelles de x, ou encore qu'il existe une expression analytique représentant $f(x)$, sauf pour ces valeurs, cette expression étant une série de polynomes en x. On ne peut d'ailleurs pas espérer mieux en s'adressant à des expressions analytiques plus générales, car non seulement il existe des fonctions qui ne sont pas représentables par une série de polynomes, mais il existe même des fonctions échappant à tout mode de représention analytique.*)

Le raisonnement qui vient d'être fait montre encore que pour que deux fonctions ne diffèrent que pour les points d'un ensemble de mesure nulle, il faut et il suffit qu'elles aient la même intégrale indéfinie. Que celà soit nécessaire, c'est une conséquence de la définition de l'intégrale; d'ailleurs si deux fonctions correspondent à la même intégrale indéfinie $F(x)$, elles ont la même représentation analytique sauf pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle.

Deux fonctions qui ont la même série de Fourier ne diffèrent que pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de la variable. Celà résultera immédiatement *de la possibilité d'intégrer terme à terme toute série de Fourier même divergente*, puisque cette possibilité montrera que les deux fonctions ont la même intégrale indéfinie. Je démontre la possibilité de l'intégration.**)

Soit

$$\frac{1}{2} a_0 + \Sigma a_p \cos px + b_p \sin px, \tag{1}$$

la série de Fourier relative à $f(x)$ et

$$\frac{1}{2} A_0 + \Sigma A_p \cos px + B_p \sin px \tag{2}$$

*) Pour ce point je renverrai à mon mémoire du Journal de Mathématiques, année 1905, „Sur les fonctions représentables analytiquement."

**) Ce théorème sous sa forme générale, pour les fonctions intégrables au sens de Riemann, semble avoir été démontré tout d'abord par M. de la Vallée-Poussin (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XVI). Dans le texte, conformément à ce que j'ai supposé tout au début, je m'occupe des fonctions bornées ou non et ayant une intégrale à mon sens, ce qui n'entraîne aucun changement dans la démonstration.

celle qui correspond à $\int_0^x f(x)dx$. Cette seconde série est convergente, car $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ est à variation bornée. L'intégration par parties donne

$$a_0 = \frac{F(2\pi)}{\pi}, \quad A_n = -\frac{1}{n}b_n, \quad B_n = \frac{1}{n}a_n - \frac{1}{n}a_0;$$

cela montre qu'en intégrant terme à terme de 0 à x la série (1) on obtient

$$\frac{1}{2}F(2\pi) + \Sigma A_p(\cos px - 1) + B_p \sin px, \tag{3}$$

si l'on a soin de remplacer le premier terme $\frac{a_0 x}{2}$ par son développement en série de Fourier. En faisant dans la série (2) convergente $x = 0$ on a:

$$\frac{1}{2}A_0 + \Sigma A_p = \frac{F(2\pi)}{2},$$

ce qui montre l'identité des séries (2) et (3). Par suite l'intégration terme à terme est possible et conduit toujours à une série convergente.

Ainsi, se donner la série de Fourier d'une fonction, c'est définir cette fonction sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle et d'ailleurs inconnu. On peut par suite espérer qu'en appliquant à ces séries de Fourier une méthode de sommation convenable on saura calculer la fonction correspondante, sauf pour un ensemble de points de mesure nulle. Il faut d'ailleurs remarquer que, quel que soit le procédé de sommation employé, il arrivera qu'en certains points et pour certaines fonctions, la méthode de sommation s'appliquera et donnera autre chose que la fonction; celà est une conséquence évidente de l'indétermination de la fonction correspondant à la série.

Les points de discontinuité d'une fonction intégrable au sens de Riemann formant un ensemble de mesure nulle, le résultat de M. Fejér peut s'énoncer ainsi: *Si l'on emploie le procédé de sommation par la moyenne arithmétique, la série de Fourier d'une fonction bornée, intégrable au sens de Riemann, fait connaître la valeur de la fonction sauf pour un ensemble de points de mesure nulle.*

Ainsi, pour les fonctions considérées, le procédé si simple qu'emploie M. Fejér conduit à un résultat aussi parfait en un certain sens qu'on pouvait le souhaiter. C'est ce résultat que je vais essayer d'étendre aux fonctions ayant une intégrale à mon sens.

Le raisonnement de M. Fejér s'applique, sans qu'on y change rien, pour l'étude des points de continuité et des points réguliers de ces fonctions sommables; mais une fonction sommable n'ayant pas en général de points de continuité, ni de points réguliers, nous ne pourrons plus rien en conclure relativement à l'ensemble des points où la méthode de M. Fejér s'applique.

Guidé par les considérations précédentes j'ai recherché un cas, un peu plus général que celui de M. Fejér, dans lequel la sommation par la moyenne arithmétique puisse être employé; voici le résultat que j'ai obtenu.

La série de Fourier d'une fonction f est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique au point x et permet de calculer $f(x)$, si la fonction $|\varphi(t)|$ correspondante est la dérivée de son intégrale indéfinie pour $t = 0$.

Je pose

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(t)\,dt, \quad \Phi_1(t) = \int_0^t |\varphi(t)|\,dt;$$

puisque, par hypothèse, $\frac{\Phi_1(t)}{t}$ tend vers zéro avec t, a fortiori $\frac{\Phi(t)}{t}$ tend vers zéro avec t, c'est dire que $\Phi(t)$ et $\Phi_1(t)$ ont toutes deux une dérivée nulle pour $t = 0$.

Ceci posé, on a évidemment, en conservant les notations indiquées,

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1})$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin t}[\sin t + \sin 3t + \cdots + \sin(2n-1)t]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t)+f(x-2t)]\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt;$$

$$d_n = \sigma_n - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt.$$

Le raisonnement de M. Fejér nous apprend que d_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ quand $\varphi(t)$ est continue au point $t = 0$.

En employant l'intégration par parties*) on a:

$$d_n = \frac{1}{n\pi}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\cos t\frac{\sin^2 nt}{\sin^3 t}\,dt$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t)\frac{\sin 2nt}{\sin^2 t}\,dt.$$

*) Ce mode d'intégration s'applique aux intégrales considérées ici comme à celles de Riemann; je l'ai déjà employé précédemment. Si l'on a quelques doutes sur la légitimité de l'emploi de cette méthode on pourra remarquer que l'intégration par parties peut toujours être remplacée par l'emploi d'intégrales doubles et j'ai étudié ces intégrales dans ma Thèse.

Le premier terme du second membre tend évidemment vers zéro quand n croît; il en est de même du second, car c'est le double de la différence d_n pour laquelle $\varphi(t)$ est la fonction partout continue $\frac{\Phi(t)\cos t}{\sin t}$. Il suffit d'étudier le dernier terme; en le changeant de signe et en y remplaçant $\sin 2nt$ par $\sin(2n+1)t$ ou aurait l'intégrale $\frac{I_n}{\pi}$ du premier paragraphe pour le cas où la fonction $\psi(t)$ qui figure dans I_n s'appellerait $\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}$. Il est évident que le changement de $\sin(2n+1)t$ en $\sin 2nt$ n'aurait en rien influé sur les raisonnements des paragraphes précédents de sorte qu'on pourra employer les résultats de ces paragraphes à condition d'y remplacer $\psi(t)$ par $\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}$. L'énoncé 7 ou même l'énoncé 6 va nous montrer que le dernier terme tend vers zéro.

$\frac{\Phi(t)}{\sin t}$ étant continue, la première condition de l'énoncé 6 est remplie étudions la seconde et pour celà calculons la variation totale de $\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}$ dans (t, α), variation que nous désignerons par $V_t^{\alpha}\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right)$.

Remarquons d'abord que, quelle que soit la fonction $\varrho(t)$ ayant une intégrale, on a:

$$\left|\int_t^{t+h}\varrho(t)\,dt\right| \leqq \int_t^{t+h}|\varrho(t)|\,dt, \qquad (h>0);$$

d'où

$$V_a^b\int_{\lambda}^{t}\varrho(t)\,dt \leqq \int_a^b|\varrho(t)|\,dt, \qquad (a<b).^*)$$

Or $\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}$ est, à une constante près, égale à

$$\int_{\lambda}^{t}\left(\frac{\varphi(t)}{\sin^2 t}-\frac{2\Phi(t)\cos t}{\sin^3 t}\right)dt,$$

comme le montre l'intégration par parties; donc on a:

$$V_t^{\beta}\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) \leqq \int_t^{\beta}\frac{|\varphi(t)|}{\sin^2 t}dt + 2\int_t^{\beta}\frac{|\Phi(t)|\cos t}{\sin^3 t}dt,$$

$$0<t<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

*) On peut démontrer que c'est le signe = qui convient. Celà ne nous sera pas utile, il nous suffit de savoir que $\int_{\lambda}^{t}\varrho(t)\,dt$ est à variation bornée, et d'avoir une limite supérieure de sa variation totale.

Mais on a aussi

$$\int_t^\beta \frac{|\varphi(t)|}{\sin^2 t}\,dt = \left[\frac{\Phi_1(t)}{\sin^2 t}\right]_t^\beta + 2\int_t^\beta \frac{\Phi_1(t)\cos t}{\sin^3 t}\,dt,$$

donc, puisque $|\Phi(t)|$ est au plus égale à $\Phi_1(t)$, nous avons

$$V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) \leqq \frac{\Phi_1(\beta)}{\sin^2\beta} - \frac{\Phi_1(t)}{\sin^2 t} + 4\int_t^\beta \frac{\Phi_1(t)\cos t}{\sin^3 t}\,dt.$$

Posons $\Phi_1(t) = \sin t \cdot \theta(t)$; $\theta(t)$ tend vers zéro avec t; soit θ_β sa limite supérieure dans $(0, \beta)$; θ_β tend vers zéro avec β. Alors on peut écrire

$$V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) \leqq \frac{\Phi_1(\beta)}{\sin^2\beta} + \frac{\theta(t)}{\sin t} + 4\theta_\beta\int_t^\beta \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t},$$

$$V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) \leqq \frac{\Phi_1(\beta)}{\sin^2\beta} + \frac{\theta(t)}{\sin t} + 4\theta_\beta\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

D'où enfin on peut conclure que la plus grande des limites, pour $t = 0$, de $t\,V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin t}\right)$ est au plus égale à $4\theta_\beta$. Ceci établi, quel que soit β dans (t, α), on a:

$$V_t^\alpha\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) = V_t^\beta\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) + V_\beta^\alpha\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right);$$

si l'on multiplie les deux termes par t, quel que soit β le second terme du second membre donne un produit qui tend vers zéro, le premier donne comme plus grande limite $4\theta_\beta$ et puisque θ_β tend vers zéro avec β, on a:

$$\lim_{t=0} V_t\left(\frac{\Phi(t)}{\sin^2 t}\right) = 0.$$

Les conditions de l'énoncé 6 sont remplies, par suite notre théorème est démontré.

Je vais maintenant étudier l'ensemble des points en lequels la condition supposée est remplie.

Pour $t = 0$ $|\varphi(t)|$ sera évidemment la dérivée de son intégrale indéfinie si la même condition est remplie pour les deux fonctions de t

$$|f(x+t) - f(x)|, \quad |f(x-t) - f(x)|;$$

c'est-à-dire si la fonction $|f(y) - x|$ est la dérivée de son intégrale indéfinie pour $y = x$, quand la constante x égale $f(x)$. Or il est facile de voir que, quelle que soit x, $|f(y) - x|$ est la dérivée de son intégrale indéfinie pour $y = x$, si celà est vrai pour x rationnelle. Soit en effet x_i une valeur irrationnelle de x, x_r une valeur rationnelle, on a:

$$\big|\,|f(y) - x_i| - |f(y) - x_r|\,\big| \leqq |x_r - x_i|.$$

donc

$$\left|\frac{1}{y-x}\int_x^y |f(y)-\varkappa_i|\,dy-\frac{1}{y-x}\int_x^y |f(y)-\varkappa_r|\,dy\right| \leqq |\varkappa_r-\varkappa_i|.$$

Si l'on prend y dans un intervalle $(x-h,\ x+h)$ assez petit, le second terme du premier membre ne diffère de $|f(x)-\varkappa_r|$ que d'une quantité ε, prise arbitrairement positive, au plus. Donc, dans cet intervalle, on a:

$$\left|\frac{1}{y-x}\int_x^y |f(y)-\varkappa_i|\,dy-|f(x)-\varkappa_r|\right| \leqq |\varkappa_r-\varkappa_i|+\varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{y-x}\int_x^y |f(y)-\varkappa_i|\,dy-|f(x)-\varkappa_i|\right| \leqq 2|\varkappa_r-\varkappa_i|+\varepsilon;$$

et puisque ε et $|\varkappa_r-\varkappa_i|$ peuvent être pris aussi petits que l'on veut, il est démontré qu'au point x la fonction $|f(y)-\varkappa_i|$ est la dérivée de son intégrale indéfinie.

Mais les nombres $\varkappa_r$ ne forment qu'un ensemble dénombrable, à chaque nombre $\varkappa_r$ correspond au plus un ensemble $\mathsf{E}(\varkappa_r)$ de mesure nulle pour les points duquel $|f(y)-\varkappa_r|$ n'est pas la dérivée de son intégrale indéfinie, donc l'ensemble E somme des $\mathsf{E}(\varkappa_r)$ est au plus de mesure nulle et c'est seulement pour les points de cet ensemble qu'il est possible que, pour certaines valeurs de $\varkappa$, $|f(y)-\varkappa|$ ne soit pas la dérivée de son intégrale indéfinie. C'est donc seulement aux points de E que la condition supposée sur $|\varphi(t)|$ peut n'être pas remplie. Donc:

La série de Fourier relative à une fonction sommable quelconque est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique et fait connaître la fonction considérée sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle.

Je viens d'étudier quelques fonctions $f(x)$ non bornées, mais je rappelle que $|f(x)|$ a une intégrale; M. Fejér a étendu son théorème à quelques fonctions non bornées et son raisonnement ne suppose pas que $|f(x)|$ a une intégrale. Il serait facile de donner un énoncé comprenant celui de M. Fejér et le mien, je ne m'y arrêterai pas; il serait cependant intéressant de savoir si le théorème de M. Fejér pourrait être étendu à toutes les séries que j'ai appelées *séries de Fourier généralisées* dans mon mémoire des Annales de l'École Normale et auxquelles les procédés utilisés pour l'étude de la convergence (ordinaire) des séries de Fourier ordinaires ne semblent pas s'appliquer facilement.

VI.

Je crois que les résultats de M. Fejér pourront être utilement employés à l'étude des séries de Fourier les plus générales*); les propriétés des sommes σ_n de M. Fejér qui me paraissent les plus utiles pour une telle étude sont les suivantes:

1° σ_n est de la forme (notations données au début)

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2}a_0\lambda_0(n) + \sum_{p=1}^{\infty}(a_p\lambda_p(n)\cos px + b_p\mu_p(n)\sin px),$$

$\lambda_p(n)$ et $\mu_p(n)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$, quel que soit n, et tendant vers 1, quel que soit p, quand n augmente indéfiniment.

2° $\sigma_n(x)$ tend vers $f(x)$ sauf, tout au plus, pour les points d'un ensemble de mesure nulle.

3° $\sigma_n(x)$ tend en particulier vers $f(x)$ pour les points de continuité de $f(x)$ et celà uniformément dans tout intervalle où $f(x)$ est continue.

4° $\sigma_n(x)$ est bornée, quels que soient n et x, si x est dans un intervalle où $f(x)$ est bornée.

Il est facile d'indiquer d'autres procédés de sommation des séries de Fourier présentant les avantages ci-dessus énoncés du procédé de M. Fejér et qui ne nécessitent que des raisonnements plus simples que les précédents.

Je montre tout d'abord que le raisonnement simple de M. Fejér fournissait un résultat à peu près équivalent à celui démontré à la fin du paragraphe précédent. On a vu que si $\varphi(t)$ était pour $t = 0$ la dérivée de son intégrale indéfinie $\Phi(t)$ on avait:

$$d_n = \sigma_n - f(x) = \frac{1}{n\pi}\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 n\frac{\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\cos t\frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\frac{\sin 2nt}{\sin^2 t}dt.$$

Le premier terme tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, le second aussi d'après le résultat de M. Fejér; quant au troisième il est, je l'ai dit, analogue à l'intégrale I_n relative à la fonction continue $\frac{\Phi(t)}{\sin t}$. Donc, d'après le résultat

*) A ce sujet je dois renvoyer à un travail de M. Hurwitz (Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen, Math. Annalen, Bd. 57) où l'on trouvera quelques considérations fort analogues à certaines des remarques du paragraphe précédent.

de M. Fejér, la moyenne arithmétique de la somme de ses n premières valeurs tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En d'autres termes *si l'on pose*

$$\Sigma_n = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{n-1}}{n},$$

Σ_n tend vers $f(x)$ en tous les points pour lesquels l'intégrale indéfinie de $\varphi(t)$ a une dérivée nulle pour $t = 0$, c'est-à-dire en particulier en tous les points où $f(x)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie. Ainsi Σ_n satisfait à la seconde des conditions que vérifiait σ_n, il est d'ailleurs évident que Σ_n satisfait aux trois autres conditions énoncées; au reste, il était certain sans nouveaux raisonnements que si l'on peut employer une fois le procédé de la moyenne arithméthique on peut l'employer deux fois.

Voici maintenant un mode de sommation tout à fait immédiat; on a vu qu'il suffisait d'avoir une expression analytique de l'intégrale indéfinie $F(x)$ de $f(x)$ pour en déduire une expression analytique de $f(x)$; il est évident que si l'on remplace σ_n par l'une on l'autre des deux fonctions

$$\frac{1}{h_n}[F(x+h_n) - F(x)], \qquad \frac{1}{2h_n}[F(x+h_n) + F(x-h_n)],$$

où h_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ on aura des expressions qui satisferont aux 3 dernières conditions énoncées et que vérifie σ_n.

Mais on a vu qu'on pouvait prendre pour $F(x)$

$$F(x) = C + a_0\frac{x}{2} + \sum\frac{1}{p}(a_p \sin px - b_p \cos px);$$

donc on peut prendre à la place de $\sigma_n(x)$ la fonction $\sigma'(t, x)$, où l'on fera si l'on veut $t = \frac{1}{n}$,

$$\sigma'(t, x) = \frac{1}{2t}[F(x+t) - F(x-t)] = \frac{a_0}{2} + \sum\left(\frac{\sin pt}{pt}\right)(a_p \cos px + b_p \sin px).$$

Un des inconvénients de cette fonction est d'être définie par une série au lieu d'être donnée par une suite finie; mais cette série étant uniformément convergente, pour t constant, on peut la limiter. Le calcul sera plus simple si l'on intègre encore une fois.

La série qui donne $F(x)$ étant uniformément convergente, on peut l'intégrer terme à terme et l'on a ainsi pour la fonction $F_1(x)$ qui résulte de $f(x)$ intégrée deux fois

$$F_1(x) = k_1 + k_2 x + a_0\frac{x^2}{2} - \sum\frac{1}{p^2}(a_p \cos px + b_p \sin px).$$

Alors on aura, comme on sait, une forme simple en posant

$$\sigma''(t, x) = \frac{F_1(x+2t) + F_1(x-2t) - 2F_1(x)}{4t^2}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum\left(\frac{\sin pt}{pt}\right)^2(a_p \cos px + b_p \sin px);$$

$\sigma''(t, x)$ tend vers $f(x)$, quand t tend vers 0, en tout point où $f(x)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie.

On reconnaît là le procédé de sommation auquel Riemann a consacré son célèbre mémoire où il est démontré que ce procédé de sommation est plus général que le procédé ordinaire. Or il est facile, pour tous les cas, de remplacer la série infinie qui définit σ'' par une suite finie, en s'appuyant seulement sur la convergence vers zéro des a_p et b_p. Si l'on néglige tous les termes qui suivent le $p^{\text{ième}}$ dans σ'', et si m est la limite supérieure des modules des a_{p+k} et b_{p+k}, l'erreur commise est évidemment au plus égale à:

$$\frac{2m}{t^2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{(p+q)^2} < \frac{2m}{t^2}\int_{p}^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \frac{2m}{pt^2}.$$

Il suffira donc d'associer p et t de manière que pt^2 ne descende pas au-dessous d'une certaine limite. On pourra prendre, par exemple,

$$\sigma''_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=n^2}{}'\left(\frac{n\sin\frac{p}{n}}{p}\right)^2 (a_p\cos px + b_p\sin px).$$

Rien n'empêcherait d'intégrer plus de deux fois la série de Fourier de $f(x)$, on aurait des résultats analogues et des procédés de sommation auxquels s'appliquent le théorème du § 2 du mémoire de M. Fejér.*)

*) Je n'étudie pas ici un procédé de sommation, plus ancien encore que celui de Riemann, le procédé bien connu de Poisson, qui a été étudié par M. Schwarz, duquel M. Picard a déduit une démonstration du théorème de Weierstraß sur la représentation approchée des fonctions continues et au sujet duquel Poisson s'exprime ainsi dans le tome 18 du Journal de l'Ecole Polytechnique (pages 421—422).

«En général, une série de quantités périodiques prolongée à l'infinie, . . . , ne peut avoir un sens clair et précis, qu'autant qu'on la regarde comme la limite d'une série convergente. Nous multiplierons donc le terme général de cette série par l'exponentielle e^{-ki}.», nous changerons ainsi la formule en une autre «dans laquelle on devra faire k infiniment petite ou nulle, après avoir effectuè les calculs. L'introduction de cette exponentielle, en rendant la série convergente, fait disparaître les difficultés que la formule de Lagrange présentait; . . .».

Zur Theorie der nirgends dichten Punktmengen in der Ebene.

Von

W. H. Young in Cambridge, England.

§ 1.

Einleitung.

Die Gestalten der ebenen Mengen sind noch nicht viel untersucht worden. Einige interessante ebene Mengen sind in der Literatur angegeben, aber diese genügen nicht, um die charakteristischen Eigenschaften dieser Mengen hervorzuheben.

Es ist von Herrn Schoenflies in seinem Bericht über die Mengenlehre*) eine Eigenschaft der ebenen Mengen in folgenden Worten angegeben: „Endlich fließt auch der von R. Baire aufgestellte Satz**) leicht aus unseren allgemeinen Entwicklungen. Er lautet, daß die Projektion einer ebenen, nirgends dichten, abgeschlossenen Menge T_2, die keine Strecke und kein Kurvenstück enthält, auf einer Geraden wieder nirgends dicht und abgeschlossen ist.“ Der von Herrn Schoenflies in zehn Zeilen angegebene Umriß eines Beweises ist zu unvollkommen, um klar zu machen, inwiefern sein Beweisverfahren richtig ist. Der Satz erweist sich aber durch ein geeignetes Beispiel als falsch. Es ist außerdem ein Irrtum, daß der Satz in dieser Allgemeinheit von Baire ausgesprochen wurde. Baire interessiert sich für eine spezielle Art solcher Mengen, für die Menge K nämlich, welche aus allen Punkten besteht, in denen die Schwankung von $f(x, y)$ größer als k oder gleich k ist, unter der Voraussetzung, daß $f(x, y)$ eine Funktion ist, welche in bezug auf x ebensowohl wie auf y stetig ist. Baire zeigte, daß unter diesen Umständen die Menge K keine Strecke und kein Kurvenstück enthält, woraus folgt, daß eine Funktion, welche in bezug auf x und y stetig ist, auf keiner Strecke und auf keinem Kurvenstück total unstetig sein kann: dadurch wird aber nicht

*) S. 87.

**) Ann. di Mat. (3) 3, S. 94.

behauptet, daß dieser Satz umkehrbar ist. In der Tat ist die Bedingung, daß eine Funktion in bezug auf x und auf y stetig sei, enger als die Annahme, daß die Funktion auf keiner Strecke und auf keinem Kurvenstück total unstetig sei. Wenn diese Behauptung nicht selbstverständlich ist, so wird sie durch das unten angeführte Beispiel bewiesen. Dieses Beispiel, das an sich von mengentheoretischem Interesse ist, läßt keinen Zweifel darüber, daß die allgemeinste ebene, nirgends dichte und abgeschlossene Menge, die keine Strecke und kein Kurvenstück enthält, nicht die Eigenschaft besitzt, sich auf eine Gerade als nirgends dichte Menge zu projizieren.

Die Menge, welche in dem folgenden Paragraphen behandelt wird, ist perfekt und nirgends dicht in der Ebene; sie ist keine Jordansche oder sonstige Kurve, und enthält keine Strecke und kein Kurvenstück. Eine Jordansche Kurve läßt sich allerdings durch sämtliche Punkte der Menge ziehen, auf dieser aber liegen sie nirgends dicht. Dieser Eigenschaften ungeachtet projiziert sich die Menge auf sämtliche Punkte einer Strecke, nicht nur der x-Achse, sondern auch der y-Achse.

§ 2.

Das Muster.

Man nehme ein Quadrat und markiere die Endpunkte einer gewählten Diagonale mit schwarzen Punkten: alle schwarzen Punkte sollen dem Muster angehören, man nenne sie die „primären Punkte".*)

Man teile dann die Diagonale in drei gleiche Teile und konstruiere mit diesen als Diagonalen drei kleine Quadrate (vergl. Figur 1); die vier Eckpunkte des mittleren Quadrats werden punktiert. Dieses Verfahren wiederhole man in jedem der kleinen Quadrate, indem man in den beiden äußeren Quadraten die gewählte Diagonale wieder wählt, in dem mittleren Quadrat aber wähle man die andere Diagonale, welche zu dem erstgewählten senkrecht steht.

Diese Konstruktion setze man unbegrenzt fort, sie genügt, um alle primären Punkte zu konstruieren. Die Figur zeigt das Stadium der Konstruktion, wo die kleinen Quadrate Seiten von $\frac{1}{27}$ der Länge der Seiten des ersten Quadrats haben; die Punkte, welche in den späteren Stadien hinzukommen, liegen sämtlich innerhalb der gezeichneten kleinen Quadrate. In jedem dieser kleinen Quadrate wiederholt sich das ganze Muster, das-

*) Nach Brodén, Beiträge zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen. J. f. d. reine u. angewandte Math. Bd. 118 (1896).

selbe ist entweder ebenso orientiert wie im großen Quadrat, oder aber ist um einen rechten Winkel gedreht.

Die „sekundären Punkte" sind die Grenzpunkte der primären Punkte, welche nicht selbst primäre Punkte sind Das ganze Muster besteht aus den

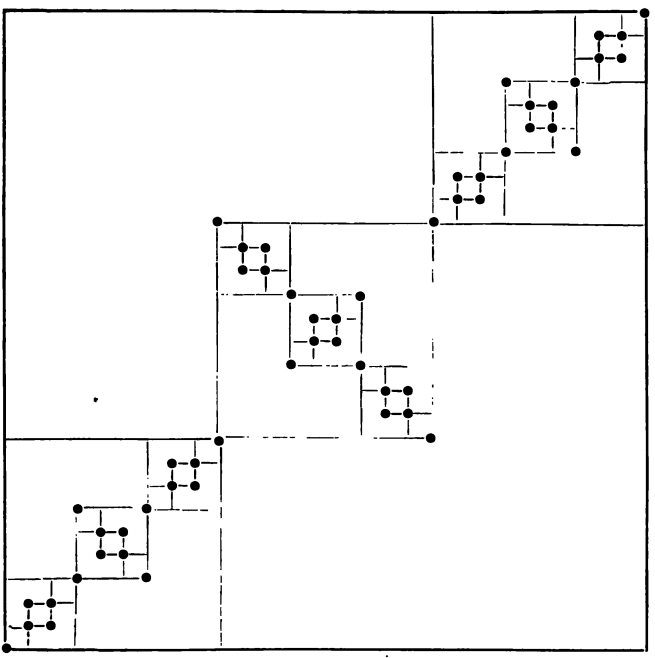


Fig. 1.

primären und sekundären Punkten. Ein sekundärer Punkt P ist also in jedem Stadium der Konstruktion ein innerer Punkt eines kleinen Quadrats.

Sei l irgend eine Gerade, welche einer Seite des großen Quadrats parallel ist, so ist entweder l eine Seite eines kleinen Quadrats, das Punkte des Musters enthält, oder sie trifft ein und nur ein solches Quadrat. Im ersten Falle enthält sie nach der Konstruktion zwei primäre Punkte, und keinen sekundären Punkt, da das Muster sich im Kleinen wiederholt und bei den Seiten der drei ersten kleinen Quadrate dies der Fall ist. Im zweiten Fall trifft die Gerade beim ersten Stadium, und deshalb bei jedem Stadium, ein und nur ein kleines Quadrat, da die Verhältnisse sich wiederholen; diese Quadrate liegen ineinander eingeschachtelt, deshalb enthält l einen und nur einen sekundären Punkt und keinen primären Punkt. *Daraus folgt, daß die Projektion des Musters auf eine Seite des ersten Quadrats diese Seite selbst ist; diese Projektion ist eineindeutig, ausgenommen eine abzählbare Menge überall dichter Punkte, deren jeder einem Paar primärer Punkte entspricht.*

Jeder primäre Punkt ist nach der Konstruktion ein Grenzpunkt primärer Punkte, da er bei jedem Stadium ein Eckpunkt eines Quadrats ist, das primäre Punkte enthält. *Das Muster, das nach der Definition abgeschlossen ist, ist also in sich dicht, und deshalb perfekt.*

In jedem Bereich, der Punkte des Musters enthält, gibt es einen primären Punkt Q, und also einen Kreis mit Q als Mittelpunkt; wenn r der Radius dieses Kreises ist, so liegt jedes Quadrat durch Q, dessen Seite kleiner als $\frac{1}{2}r$ ist, innerhalb des Kreises. Nun gibt es jedenfalls ein solches Quadrat, in dem das Muster sich wiederholt, und da dieses Quadrat Teile enthält, in denen keine Punkte des Musters liegen, so gibt es im Bereich immer solche punktfreie Teile; *das Muster ist also nirgends dicht.*

Da das Muster sich in den kleinen Teilen wiederholt, ist die Projektion des Musters in jedem kleinen Quadrat dieselbe Strecke wie die Projektion dieses Quadrates selbst. Daraus folgt, daß jeder sekundäre Punkt P die Eigenschaft hat, daß entsprechend irgend einer gegebenen kleinen Größe e ein Quadrat mit P als innerem Punkt sich konstruieren läßt, dessen Projektion dieselbe Strecke ist, wie die Projektion des in ihm enthaltenen Musters; ein primärer Punkt Q ist die Ecke eines solchen Quadrats.

Daß das Muster keine zusammenhängende Kurve ist, sieht man sofort, denn jede Gerade, welche auf der gewählten Diagonale senkrecht steht und dieselbe in einem Verhältnis teilt, das größer als 1 : 2 und weniger als 4 : 5 ist, enthält keinen Punkt des Musters, obwohl Punkte desselben auf beiden Seiten der Geraden liegen.

Da nun das Muster sich im Kleinen ähnlich ist, folgt in gleicher Weise, daß, wenn A und B irgend welche Punkte des Musters sind, zwischen den beiden ein Streifen sich ziehen läßt, in welchem jede Gerade keinen Punkt des Musters enthält. Mit anderen Worten: *die Punkte des Musters, die auf jeder beliebigen Kurve liegen, sind auf derselben nirgends dicht.*

Daß aber durch sämtliche Punkte des Musters eine Jordansche Kurve sich ziehen läßt, sieht man am einfachsten durch folgende Überlegung. Man nehme zwei sich treffende Seiten des großen Quadrats als x- und y-Achse und verbinde die beiden primären Punkte auf jeder Ordinate durch eine Gerade; das so entstehende Gebilde ist eine Jordansche Kurve, wie jetzt bewiesen werden soll. Man teile die Strecke (0,1) der x-Achse in fünf gleiche Teile, und nehme die beiden dem mittleren Abschnitt angrenzenden Teile als „schwarze Intervalle" einer nirgends dichten perfekten Menge G: indem man Dezimalbrüche gebraucht, sind die Endpunkte dieser Intervalle die

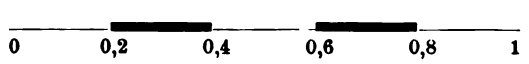


Fig. 2.

Punkte 0,2 und 0,4, resp. 0,6 und 0,8. In jedem der drei weiß gebliebenen Intervalle wiederholt man dieses Verfahren, usw. Endlich hat man eine Menge schwarzer Intervalle, welche in der Strecke (0,1) überall dicht sind, ohne in irgend einem Punkt aneinander zu grenzen. Die Punkte, welche keine inneren Punkte der schwarzen Intervalle sind, bilden die genannte perfekte, nirgends dichte Menge.

Um die Punkte des Musters zu charakterisieren, gebrauchen wir die triadische Schreibweise. Man nehme erst die zwei Paare primärer Punkte, welche auf der gemeinsamen Ordinate am weitesten voneinander entfernt sind, nämlich die Punkte (0,1; 0,1) und (0,1; 0,2), bez. (0,2; 0,1) und (0,2; 0,2), und lasse sie den Endpunkten der beiden größten schwarzen Intervalle entsprechen, nämlich den Punkten 0,2 und 0,4, bez. 0,6 und 0,8.

Das vertikale Stück („Lücke") zwischen den beiden primären Punkten entspreche nun dem schwarzen Intervall zwischen den entsprechenden Punkten der perfekten Menge G, und zwar projektivisch, indem die Punkte der „Lücke", von unten nach oben gerechnet, den Punkten des Intervalles, von links nach rechts in Ordnung, entsprechen.

Die ersten drei kleinen Quadrate liegen nun in bezug auf diese beiden „Lücken", wie die drei weißen Intervalle in bezug auf die beiden schwarzen Intervalle, und werden als einander entsprechend angesehen. Die größten „Lücken" in jedem kleinen Quadrat werden projektivisch auf die größten schwarzen Intervalle in dem entsprechenden weißen Intervalle bezogen, indem die „Lücke", welche mehr nach links liegt, dem nach links liegenden schwarzen Intervall entspricht, und in den beiden äußeren Quadraten die Ordnung der Punkte von unten nach oben, in dem mittleren Quadrat von oben nach unten der Ordnung in den schwarzen Intervallen von links nach rechts entspricht (vergl. Figur 3). Auf diese Weise folgen sich die Punkte der ersten acht „Lücken" in Ordnung wie die entsprechenden Punkte der schwarzen Intervalle.

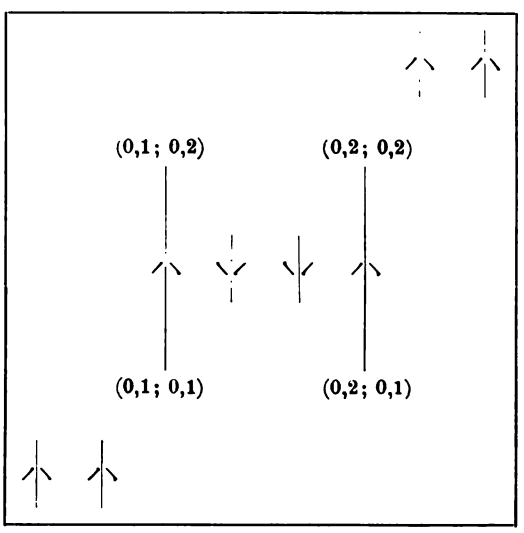


Fig. 3.

Dieses Verfahren setze man unbegrenzt fort, bis alle „Lücken" mit allen schwarzen Intervallen in Beziehung gesetzt sind. Es bleiben nur

die sekundären Punkte: jeder derselben bestimmt in eindeutiger Weise eine Reihe kleiner Quadrate, jedes in das vorangehende eingeschachtelt; diesen entsprechen weiße Intervalle, auch jedes in das vorangehende eingeschachtelt, und die Länge der Intervalle nimmt unbegrenzt mit der Größe der entsprechenden Quadrate ab. Die weißen Intervalle bestimmen also einen Punkt, welcher äußerer Punkt der schwarzen Intervalle ist und als solcher der Menge G angehört. Jedem solchen sekundären Punkt L lassen wir nun den so bestimmten Punkt L' entsprechen, dann ist die Korrespondenz zwischen dem Muster mitsamt den „Lücken" und der Strecke (0,1) fertig. Die Korrespondenz ist nicht nur eineindeutig, sondern auch stetig, wie leicht zu sehen ist, denn die Punkte in jedem kleinen Quadrat entsprechen den Punkten eines entsprechend kleinen weißen Intervalles.

Auf diese Weise wird das Muster mitsamt den „Lücken" eineindeutig und stetig auf die gerade Linie bezogen, d. h.: *das Muster mitsamt den „Lücken" ist eine Jordansche Kurve.*

In dieser Korrespondenz entspricht das Muster der Menge G; *es ist also das Muster eine auf einer Jordanschen Kurve nirgends dicht liegende perfekte Menge.*

Göttingen, den 21. Januar 1905.

Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn Young.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i. Pr.

Herr W. H. Young hat im vorstehenden auf ein Versehen hingewiesen, das in meinem Bericht über Mengenlehre enthalten ist und einen Satz des Herrn R. Baire betrifft.*) Hierzu darf ich bemerken, daß mich bereits vor längerer Zeit Herr Baire selbst darauf aufmerksam gemacht hatte, indem er mir ebenfalls ein Beispiel angab, das meine Darstellung widerlegt, und das demjenigen des Herrn Young ganz ähnlich ist.

Es war ursprünglich meine Absicht, diese und etwaige andere Berichtigungen dem zweiten Teil meines Berichts hinzuzufügen, der, wie ich hoffe, baldigst erscheinen wird. Nachdem aber Herr Young im vorstehenden sein Beispiel mitgeteilt hat, erlaube ich mir, auch dasjenige Beispiel hierherzusetzen, das mir vor zwei Jahren von Herrn Baire mitgeteilt wurde. Es unterscheidet sich von dem vorstehenden einerseits darin, daß es mit der fortgesetzten Vierteilung eines Quadrates operiert, statt mit der Teilung in je neun Quadrate, und scheint mir andererseits noch einfacher definierbar zu sein. Die bezügliche Punktmenge Q wird nämlich folgendermaßen bestimmt. Nachdem man das Quadrat q in vier gleiche Quadrate geteilt hat, wählt man von ihnen zwei aus, die von derselben Diagonale durchzogen werden, und setzt fest, daß ihr *Inneres keine* Punkte von Q enthalten soll. Die beiden andern Quadrate seien q_1 und q_2. Jedes von ihnen wird ebenso behandelt wie q selbst. Es wird in vier gleiche Quadrate geteilt, und zwei von ihnen bleiben wieder von Punkten von Q frei, und zwar so, daß die Diagonale, die diese Teilquadrate durchzieht, zu der vorher benutzten Diagonale senkrecht verläuft. Die übrigen beiden Quadrate seien q_{11}, q_{12} und q_{21}, q_{22} (Fig. 1). Diese Quadrate behandele man analog und fahre so unbegrenzt fort. Betrachtet man nun alle Punkte, die innere Punkte sämmtlicher Quadrate

$$q,\ q_i,\ q_{ik},\ q_{ikl},\ \cdots$$

*) a. a. O. S. 86 u. 87.

sind, so bestimmen sie nebst ihren sämtlichen Grenzpunkten die Punktmenge Q. Es ist unmittelbar klar, daß Q eine Menge der verlangten

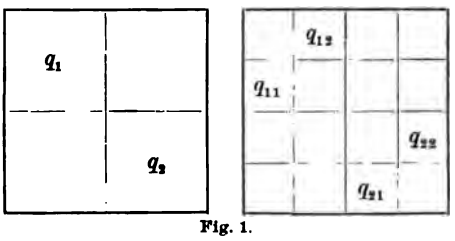


Fig. 1.

Art ist. Sie ist nirgends dicht und abgeschlossen, und auf jeder Quadratseite besteht ihre Projektion aus allen Punkten dieser Seite.

Da Herr Young meint, es sei nicht ersichtlich, an welcher Stelle meines Berichts der Trugschluß steckt, so möchte ich hier darauf hinweisen. Wie a. a. O. bewiesen ist, bestimmt jede nirgends dichte abgeschlossene ebene Menge Q eine abzählbare Menge von Rechtecken in der Weise, daß jeder Punkt der Menge auf dem Umfang eines dieser Rechtecke liegt oder Grenzpunkt solcher Punkte ist. In dem vorliegenden Fall enthält jeder Rechteckumfang insbesondere eine nirgends dichte lineare Teilmenge von Q. Projiziert man diese Teilmenge auf eine Gerade g beliebiger Richtung, so wird jedes punktfreie Intervall, das dem Umfang eines Rechtecks angehört, auf g ebenfalls ein punktfreies Intervall erzeugen. Diese Intervalle werden aber im allgemeinen *nicht* mehr die Eigenschaft haben, daß *je zwei außerhalb voneinander* liegen, und deshalb kann *nicht* mehr behauptet werden, daß sie auf g eine nirgends dichte Menge bestimmen. Das gleiche gilt für eine Quadratseite selbst, nur daß hier einzelne Intervalle sich in einen Punkt projizieren.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra**, 2 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
I. Teil. [XXXVIII u. 854 S.] geh. ℳ 17.—, in Halbfranz geb. ℳ 20.—
II. Teil. [X u. S. 855—1347.] geh. ℳ 12.—, in Halbfranz geb. ℳ 22.—

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von H. Burkhardt und W. Wirtinger.
1. Teil: Heft: 1. [180 S.] 1898. ℳ 4.80; 2. [240 S.] 1900. ℳ 7.80; 4. [160 S.] ℳ 4.80. 5. [192 S.] 1904. ℳ 6.—
II. Teil. Heft: 1. [125 S.] 1901. ℳ 5.20.

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von W. Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.
II. Teil. Heft: 2. [98 S.] 1904. ℳ 2.60.
III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1903. ℳ 5.40.
Heft: 2/3. [256 S.] 1905. ℳ 6.80.

IV. **Mechanik**, 2 Teile, red. von F. Klein u. C. H. Müller.
I. Teil. I. Abt. Heft: 1. [131 S.] 1901. ℳ 3.40; 2. [168 S.] 1902. ℳ 4.80. 3. [256 S.] 1903. ℳ 4.80.
—— II. Abt. Heft: 1. [153 S.] 1904. ℳ 4.40.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [181 S.] 1903. ℳ 3.80.

V. **Physik**, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
I. Teil. Heft: 1. [165 S.] 1903. ℳ 4.80.
II. Teil. Heft: 1. [280 S.] 1904. ℳ 8.—

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie und Geophysik**, red. von Fk. Fertwängler und E. Wiechert.
VI. 2: **Astronomie**, red. von K. Schwarzschild.

In Vorbereitung:

VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen** behandelnd, sowie Generalregister.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, professeur à l'université de Nancy. En sept tomes. Tome I: vol. 1, fasc. 1. [100 pag.] gr. 8. 1904. n. ℳ 4.—

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. gr. 8.
XVIII. Heft. Mit 34 Figuren im Text. [II u. 196 S.] 1904. geh. n. ℳ 6.—
Inhalt: J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles.
Conrad H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert.
Rich. Lindt, Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems“
——— XIX. Heft. Mit 39 Figuren im Text und einer Tafel am Schluß. [XI u. 188 S.] 1904. geh. n. ℳ 9.—
Inhalt: N. O. Lobatschefskij's imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Privatdozent an der Universität Leipzig.

Abraham, Dr. M., Privatdozent an der Universität in Göttingen, **Theorie der Elektrizität.** I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. Zweite, umgearbeitete Auflage von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 449 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 12.— II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. geh. ℳ 10.—

Ahrens, Dr. W., **Scherz und Ernst in der Mathematik.** Gelöste und ungelöste Werke. [X u. 322 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von Josef Kürschák und Franz Schaffarik, Mitgliedern der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. XX. Band. [X u. 410 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 8.—

Bolyai de Bolya, Wolfgang, tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Editio secunda. Tomus II: Elementa geometriae et appendices. Mandato Academiae Scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adiectis ediderunt Josephus Kürschák, Maximus Réthy, Béla Törökösy de Zepethnek, Academiae Scientiarum Hungaricae socialis. 2 partt. 4. 1904. Pars I. Textus. [LXIII u. 427 S.] Pars II. Figurae. [VII u. 62 lithogr. Tafeln.] In Halbkalbleder geb. n. ℳ 40.—

Buchherer, Dr. **A. H.**, Privatdozent an der Universität Bonn, Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Auflage. [VIII u. 103 S.] gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 2.40.

———— Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Mit 13 Figuren im Text. [IV u. 146 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 3.20.

Cesàro, **Ernesto**, Professor der Mathematik an der Königl. Universität zu Neapel, Lehrbuch der algebraischen Analysis. Deutsche Ausgabe von Dr. G. Kowalewski, Prof. an der Univ. Greifswald. [VI u. 294 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 16.—

Festschrift Adolph Wüllner gewidmet zum siebzigsten Geburtstage 13. Juni 1905 von der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen, ihren früheren und jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre, 8 Tafeln und 21 Figuren im Text. [VIII u. 264 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 8.—, geb. n. ℳ 9.—

Föppl, Dr. **Aug.**, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band. Einführung i. d. Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 3. Aufl. [XVI u. 432 S.] 1906. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1904. geb. n. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 3. Aufl. [XVI u. 434 S.] 1905. geb. n. ℳ 12.—
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. [XV u. 506 S.] 1901. geb. n. ℳ 12.—

Fort, **O.** und **O. Schlömilch**, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil: Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am Kgl. Sächs. Polytechnikum zu Dresden. 7. Aufl. bes. v. Dr. R. Heger, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden. Mit in den Text gedruckt. Holzschn. [XVII u. 268 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 4.—, geb. n. ℳ 4.30.

Gans, Dr. **Richard**, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 2.80.

Heffter, Dr. **L.**, Professor an der Universität Kiel, und Dr. **C. Koehler**, Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. [XVI u. 528 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 14.—

Jahnke, Dr. **E.**, etatsmäßiger Professor an der Königl. Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren im Text. [XII u. 235 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 5.60.

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.**, und Dr. **E. Riecke**, Professoren an der Universität Göttingen, neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen. Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkursus für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Enthaltend Beiträge der Herren O. Hölder, E. Borel, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stäckel, K. Schwarzschild. gr. 8. 1904. Teil I. Mit 6 Figuren im Text. [VIII u. 190 S.] geh. n. ℳ 3.60. Teil II. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] geh. n. ℳ 4.60, geb. n. ℳ 5.— Beide Teile in einen Band geb. n. ℳ 8.60.

Kohlrausch, Wirkl. Geh. Oberregierungsrat, Professor Dr. **F.**, Lehrbuch der praktischen Physik. Zehnte, vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlreichen Figuren im Text. [XXVIII u. 650 S.] gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 9.—

Netto, Dr. **Eugen**, Professor an der Universität Gießen, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren im Text. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 4.40.

Nielsen, Dr. **Niels**, Privatdocent an der Universität Kopenhagen, Inspektor des Mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 14.—

Schilling, Dr. **Friedrich**, Professor an der Technischen Hochschule zu Danzig, über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Mit einem Anhang: Welche Vorteile gewährt die Benutzung des Projektionsapparates im mathematischen Unterricht? Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkursus für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 4.60, geb. n. ℳ 5.—

Schlömilch, Geheimer Regierungsrat Dr. **Oskar**, und Dr. **E. Naetsch**, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. I. Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 5. Auflage, bearbeitet von Dr. E. Naetsch. Mit 85 Figuren im Text. [VIII u. 372 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 8.—

Schüssler, Dr. **Rudolf**, Professor an der Technischen Hochschule in Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u. 170 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 7.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. 3 Bände. gr. 8. [Von der 3. Aufl. an hat Prof. G. Scheffers in Darmstadt die Neubearbeitung übernommen.]

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. 3. Aufl. besorgt von Dr. G. Scheffers, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit 85 Figuren im Text. [ca. 600 S.] geh. n. ℳ 10.—, in Leinwand geb. n. ℳ 11.— [Erscheint im Januar 1906.]

II. Band: Integralrechnung. 2. durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin. [XII u. 428 S.] 1899. geh. n. ℳ 8.—, in Leinwand geb. n. ℳ 9.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 2. durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und E. Zermelo, Privatdozent an der Universität Göttingen. Mit 53 Fig. im Text. [XII u. 480 S.] 1904. geh. n. ℳ 9.—, in Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Starke, Dr. **H.**, Privatdozent in Berlin, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedr. Abb. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 6.—

Stolz, Dr. **Otto**, Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. **J. Anton Gmeiner**, Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. In 2 Abteilungen. gr. 8.

I. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. geh. n. ℳ 6.—

——— ——— II. Abteilung. Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—612.] 1905. geh. n. ℳ 9.— Beide Abteilungen in 1 Band geh. n. ℳ 15.—

Thomae, J., Geheimer Hofrat und Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. ℳ 2.80.

Wallentin, Dr. **J.**, Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die Elektrizitätslehre. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 12.—

Weber, Dr. **H.**, und Dr. **J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. [XIV u. 448 S.] 1903. geb. n. ℳ 8.—. II. Band. Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jaeger. Mit 28 Textfiguren. [XIV u. 500 S.] 1905. geb. n. ℳ 12.— III. Band. Anwendung der Elementarmathematik. [Unter d. Presse.]

Wien, Dr. **W.**, Professor an der Universität Würzburg, Über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. [28 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 1.—

Wölffing, Dr. **Ernst**, Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts a. d. Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. 1. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 15.—

Mathematische Annalen Band 51 und Folge in der ganzen Serie oder einzeln zu kaufen gesucht. Gefällige Anerbieten unter N. 100 an die Verlagsbuchhandlung **B. G. Teubner** in **Leipzig** erbeten.

INHALT.

Seite

Beweis des Desargues'schen Satzes aus dem Pascal'schen. Von Gerhard Hessenberg in Grunewald bei Berlin. (Mit 7 Figuren im Text) 161

Begründung der elliptischen Geometrie. Von Gerhard Hessenberg in Grunewald bei Berlin. (Mit 10 Figuren im Text) 173

Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie. Von H. Liebmann in Leipzig. (Mit 4 Figuren im Text) 185

Über die in einem Reye'schen Komplexe enthaltenen Regelscharen. Von Eugen Meyer in Charlottenburg 200

Über die Hilbert'schen Sätze in der Theorie der Flächen konstanter Gauß'scher Krümmung. Von G. Prasad in Allahabad, Indien 209

Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben. Von A. Kriloff in St. Petersburg 211

Über die Zerlegung unendlicher Vektorfelder. Von Otto Blumenthal in Aachen. (Mit 2 Figuren im Text) 235

Recherches sur la Convergence des Séries de Fourier. Par Henri Lebesgue à Rennes 251

Zur Theorie der nirgends dichten Punktmengen in der Ebene. Von W. H. Young in Cambridge, England. (Mit 3 Figuren im Text) 281

Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn Young. Von A. Schoenflies in Königsberg i/Pr. (Mit 1 Figur im Text) 287

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☛ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 30 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion oder an Professor **Otto Blumenthal**, Aachen, Technische Hochschule.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

61. Band. 3. Heft.

Mit 2 Figuren im Text.

Ausgegeben am 5. Dezember 1905.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

☞ *Generalregister zu den Mathematischen Annalen, Band 1—50. Zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre. [XI u. 202 S.] gr. 8. geh. u. Mk. 7.—*

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Scherz und Ernst in der Mathematik.

Geflügelte und ungeflügelte Worte.

Gesammelt und herausgegeben von

Dr. W. Ahrens.

gr. 8. [X u. 522 S.] 1904. In Leinwand geb. ℳ 8.—

Das Werk hat eine außerordentlich gute Aufnahme gefunden, wie die nachstehende, nur auszugsweise wiedergegebene Besprechung von Prof. Dr. Holzmüller zeigt:

Der Verfasser der „Mathematischen Unterhaltungen" hat uns mit einem neuen, überaus fesselnden und originellen Werke überrascht, welches man als einen mathematischen „Büchmann" bezeichnen könnte, wenn es nicht neben aphoristischen Bemerkungen auch längere Briefe und Auseinandersetzungen brächte. Beginnt man zu lesen, so möchte man das Buch nicht aus der Hand legen, bis man zum Ende gelangt ist, und dann werden viele wieder von vorn beginnen. Jedem wird es Neues bringen, möge er noch so belesen sein . . . . . gerade das vorliegende Buch gibt einen tiefen Einblick in das Ringen der Geister, und manchem wird durch manche kurze, treffende Bemerkung ein Licht über ganze Gebiete der Wissenschaft aufgehen. . . . . Ein alphabetisches Sach- und Namenregister erleichtert die Orientierung.

Mathematische Unterhaltungen und Spiele.

Von **Dr. W. Ahrens.**

[XII und 428 S.] gr. 8. 1901.

In Originalband mit Zeichnung von P. Bürck-Darmstadt n. ℳ 10.—

Geheftet in 2 Teilen.

I. [XII u. 208 S.] n. ℳ 5.— II. [230 S.] n. ℳ 5.—

Die äußerst schwierige Aufgabe, diese Dinge so zu behandeln, daß nicht bloß der Laie mit Verständnis folgen kann, sondern daß auch das Interesse des Mathematikers vom Fach gefesselt wird, hat der Verf. in einer Weise gelöst, die der höchsten Anerkennung wert ist. . . . . Nehmen wir hinzu, daß der Verf. überall, soweit es möglich ist, dem Ursprung und der historischen Entwicklung der behandelten Aufgaben nachgeht und darin eine geradezu erstaunliche Belesenheit zeigt; daß er trotz der Allgemeinverständlichkeit seiner Darstellung doch nur solche Dinge behandelt hat, denen auch ein wissenschaftliches Interesse abgewonnen werden kann; daß er die behandelten Aufgaben auch durch eigene Untersuchungen wesentlich gefördert hat, so müssen wir unser Urteil dahin zusammenfassen, daß sein Buch nicht bloß dem Laien und zugleich dem Mathematiker von Fach eine angenehme Unterhaltung bietet, sondern auch für den letzteren eine Quelle der Belehrung und eine Veranlassung zum Nachdenken. Alles in allem liegt hier ein Buch vor, an *dem man* nur Freude haben kann. E—l., Univ.-Prof. Literar. Centralbl.

Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher.

Von

Georg Faber in Karlsruhe.

n positive Zahlen $r_1, r_2, \cdots, r_n$ nennt man bekanntlich *zusammengehörige* (oder *assoziierte*) *Konvergenzradien* einer Potenzreihe

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_0^\infty {}_{\nu_1 \nu_2, \cdots, \nu_n} a_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n},$$

wenn $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ für

$$(2) \qquad |x_1| < r_1, \ |x_2| < r_2, \cdots, |x_n| < r_n$$

absolut konvergiert, während *absolute Divergenz* stattfindet, sobald

$$(3) \qquad |x_1| > r_1, \ |x_2| > r_2, \cdots, |x_n| > r_n$$

angenommen wird.

Denkt man sich im Falle $n = 2$ in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme die Punkte $x = r_1$, $y = r_2$, deren Koordinaten zusammengehörige Konvergenzradien sind, markiert, so erfüllen sie eine Kurve

$$(4) \qquad \varphi(x, y) = 0.$$

Die Stetigkeit derselben bewiesen zuerst die Herren A. Meyer und E. Phragmén, neuerdings Herr F. Hartogs*), der daraus weitere interessante Folgerungen zog. Von einer anderen Begründung dieses Stetigkeitssatzes ausgehend, beweise ich im folgenden außerdem, daß die erwähnte Kurve in jedem Punkte einen vorwärts und einen rückwärts genommenen *Differentialquotienten* besitzt, die voneinander verschieden

*) Meyer, Stockholm. Ved. Ak. Förh. Öfv. 40 (1883), Nr. 9, p. 15. — Phragmén, ebenda Nr. 10, p. 17. — Hartogs, Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen und der eindeutigen analytischen Funktionen zweier Veränderlichen. Münchner Inauguraldissert. Lpz. 1904. p. 8–11. — Während der Korrektur der vorliegenden Arbeit machte mich Herr Blumenthal in liebenswürdiger Weise darauf aufmerksam, daß ein Teil der darin enthaltenen Resultate (im wesentlichen auch der Hauptsatz von p. 292) schon von Herrn Fabry (C. R. 1902, Bd. 134, p. 1190—1192) auf andere Weise gefunden wurden; daselbst spricht Herr Fabry auch den p. 316ff. erwähnten, später von Herrn Hartogs wiedergefundenen und bewiesenen Satz aus.

sein können (dann hat die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ in dem betrachteten Punkte eine Ecke, die übrigens zugleich Häufungsstelle unendlich vieler benachbarter Ecken sein kann).

Aus der bloßen Kenntnis einer Tangente t im Punkte r_1, r_2 läßt sich dann in der xy-Ebene ein zweidimensionales Gebiet definieren, außerhalb dessen kein Punkt der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ liegen kann; dieses Kontinuum wird begrenzt von den beiden Koordinatenachsen und derjenigen Kurve der Form $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = \text{const.}$, welche im Punkte r_1, r_2 die Tangente t hat. Die so gefundene Beschränkung im Verlaufe der Kurven $\varphi(x, y) = 0$ läßt sich auch in der Weise ausdrücken, daß diese Kurven Lösungen einer *Differentialungleichung* zweiter Ordnung sind. Umgekehrt zeigt sich, daß zu jeder Kurve $\psi(x, y) = 0$, welche der betreffenden Differentialungleichung genügt, unendlich viele Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ gehören, für welche $\psi(x, y) = 0$ Kurve der assoziierten Konvergenzradien ist, d. h. genügen die Werte $x = r_1$, $y = r_2$ der Gleichung $\psi(x, y) = 0$, so ist r_1, r_2 ein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ und umgekehrt.

Im ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit führe ich die Beweise der soeben erwähnten Sätze aus; dieselben *lassen sich* sämtlich unter Beibehaltung des eingeschlagenen Beweisganges *auf Funktionen beliebig vieler Veränderlicher ausdehnen.* Bei der vorliegenden Untersuchung kann der Fall $n = 3$ als Typus des allgemeinen gelten; einerseits nämlich bietet der Fall $n = 3$ gegenüber demjenigen $n = 2$ einiges neu Hinzukommende, das einer besonderen Erläuterung bedarf (s. § 2); andererseits aber dürfte dann der Weg zu weiteren Verallgemeinerungen genügend vorgezeichnet sein.

Die folgenden reihentheoretischen Entwicklungen liefern zugleich einen Beitrag zu der noch wenig geklärten Frage über den Verlauf der Singularitäten einer Funktion mehrerer Veränderlicher; einige diesbezügliche Folgerungen werden am Ende der Arbeit (s. § 3) gezogen.

§ 1.

Es sei r_1, r_2 irgend ein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty {}_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_1^\mu x_2^\nu; \tag{5}$$

die Annahme, daß eine der Zahlen r_1 oder r_2 gleich Null sei, ist für das Folgende ohne Bedeutung und wird daher ausgeschlossen; die *oberen* Grenzen der Zahlen r_1 und r_2 sollen mit R_1 und R_2 bezeichnet werden und nach Herrn Hartogs*) die *Maximalradien* (der x_1- bzw. x_2-Ebene) heißen.

*) a. a. O., p. 14.

Zwischen r_1 und r_2 besteht bekanntlich*) die charakteristische Beziehung:

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^\mu r_2^\nu} = 1. \tag{6}$$

Für das Folgende kommt es vor allem darauf an, jene $a_{\mu\nu}$ auszusondern, die für das Zustandekommen dieses oberen Limes ausschlaggebend sind. Ist ϑ_1 irgend eine Zahl zwischen Null und 1 (mit Einschluß dieser Grenzen) und wird ein für alle Mal $1 - \vartheta_1 = \vartheta_2$ gesetzt, so sind, falls man die Reihe betrachtet, welche aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ entsteht, wenn man alle $a_{\mu\nu}$ gleich Null setzt mit Ausnahme derjenigen, deren Indizes der Ungleichung

$$\begin{aligned} \vartheta_1 - \varrho \leqq \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_1 + \varrho \text{ und also auch der Ungleichung} \\ \vartheta_2 - \varrho \leqq \frac{\nu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_2 + \varrho \end{aligned} \tag{7}$$

genügen, folgende zwei Fälle denkbar:

I. Fall: Es bleibt, wie klein auch die positive Zahl ϱ sei, für die übriggebliebenen $a_{\mu\nu}$ die Beziehung $\lim\limits_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^\mu r_2^\nu} = 1$ bestehen. In diesem Falle nenne ich die Zahlen ϑ_1, ϑ_2 zu den Konvergenzradien r_1, r_2 oder auch zum Punkte $x = r_1, y = r_2$ *gehörig* und umgekehrt diesen Punkt von den Zahlen ϑ_1, ϑ_2 *abhängig*.

II. Fall: Wenn die $a_{\mu\nu}$ durch die obigen Ungleichungen (7) beschränkt sind, so ist für ein gewisses $\varrho = \varrho_0$ und um so mehr für alle kleineren ϱ:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^\mu r_2^\nu} < 1, \text{ also auch} \\ < 1 - \eta, \end{aligned} \tag{8}$$

wo $\eta > 0$ ist. Es heißen dann die Zahlen ϑ_1, ϑ_2 *nicht* zum Punkte r_1, r_2 *gehörig* und letzterer von ϑ_1, ϑ_2 *unabhängig*.

Zunächst ist klar, daß zu jedem Punkte r_1, r_2 — unter r_1, r_2 immer zusammengehörige Konvergenzradien verstanden — mindestens *ein* Zahlenpaar ϑ_1, ϑ_2 gehört; denn wegen (6) läßt sich aus den $a_{\mu\nu}$ eine unendliche Folge so auswählen, daß für die ausgewählten $a_{\mu\nu}$

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^\mu r_2^\nu} = 1 \text{ ist;}$$

bildet man nun für alle diese $a_{\mu\nu}$ die Zahlen $\Theta_1 = \frac{\mu}{\mu+\nu}$ und $\Theta_2 = \frac{\nu}{\mu+\nu}$ und ist ϑ_1, ϑ_2 eine Häufungsstelle der Θ_1, Θ_2, so ist ϑ_1, ϑ_2 ein zum Punkte r_1, r_2 gehöriges Zahlenpaar.

*) Lemoine, Bull. des Sc. Math. 20 (1896), p. 286—292.

Dies vorausgesetzt, betrachte ich die sog. W-Kurve:

$$x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = r_1^{\vartheta_1} r_2^{\vartheta_2}. \tag{9}$$

soweit sie in dem Quadranten verläuft, in welchem x und y beide positiv sind; ist $\vartheta_1 = 0$ oder $\vartheta_2 = 0$, so hat man es mit einer Parallelen zur x- bzw. y-Achse zu tun; im übrigen sind die hier zu betrachtenden W-Kurven überall (nach oben) konkav und haben die Koordinatenachsen zu Asymptoten. Ein Punkt $x = s_1$, $y = s_2$ heißt oberhalb der W-Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = C$ gelegen, wenn $s_1^{\vartheta_1} s_2^{\vartheta_2} > C$ ist. Es besteht dann folgender

Hauptsatz: *Liegt der Punkt $x = s_1$, $y = s_2$ oberhalb der Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = r_1^{\vartheta_1} r_2^{\vartheta_2}$ und gehört das Zahlenpaar ϑ_1, ϑ_2 zum Punkte r_1, r_2, so kann s_1, s_2 kein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien sein.*

Denn es ist nach Voraussetzung $\left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\vartheta_1} \cdot \left(\frac{s_2}{r_2}\right)^{\vartheta_2} > 1$, also auch, wenn $\varrho_0 > 0$ genügend klein gewählt wird, wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\vartheta_1 \pm \varrho} \left(\frac{s_2}{r_2}\right)^{\vartheta_2 \mp \varrho} &> 1, \text{ also auch} \\ &> 1 + \eta' \end{aligned}\right\} \text{ für } \varrho \leqq \varrho_0, \tag{10}$$

demnach

$$\begin{aligned} \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu,\nu} s_1^\mu s_2^\nu} &= \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu,\nu} r_1^\mu r_2^\nu} \cdot \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} \cdot \left(\frac{s_2}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} \\ &> 1 + \eta', \end{aligned} \tag{11}$$

da ja, wenn die μ, ν durch die Ungleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1 - \varrho \leqq \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_1 + \varrho \\ \vartheta_2 - \varrho \leqq \frac{\nu}{\mu+\nu} \leqq \vartheta_2 + \varrho \end{aligned}\right\} \qquad (\varrho \leq \varrho_0) \tag{7}$$

beschränkt werden, einerseits $\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu,\nu} r_1^\mu r_2^\nu} = 1$ bleibt, andererseits nach

$\left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} \cdot \left(\frac{s_2}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} > 1 + \eta'$ ist; weil aber $\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu,\nu} s_1^\mu s_2^\nu} > 1$ ar

können s_1, s_2 keine zusammengehörigen Konvergenzradien sein, u

Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ *divergiert absolut* für $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$.

[illegible] zum Punkte r_1, r_2 mehrere Zahlenpaare ϑ_1, ϑ_2 al

[illegible] s_1, s_2 *kein* Paar zusammengehörig

Um dieselben aufzufinden und dann weitere Schlüsse zu ziehen, beachte man zunächst den folgenden

I. Hilfssatz: *Gehört das Zahlenpaar ϑ_1, ϑ_2 nicht zum Punkte r_1, r_2, so gibt es eine positive Zahl σ_0 derart, daß auch die sämtlichen Paare $\vartheta_1 \pm \sigma$, $\vartheta_2 \mp \sigma$ nicht zu r_1, r_2 gehören, solange $\sigma < \sigma_0$ ist.*

Mit anderen Worten: Die Menge der zu einem Punkte r_1, r_2 gehörigen Zahlenpaare ϑ_1, ϑ_2 ist abgeschlossen, d. h. sie enthält ihre Häufungsstellen.

Haben η und $\varrho < \varrho_0$ die gleiche Bedeutung wie in (7) und (8), so genügt es $\sigma_0 = \frac{\varrho_0}{2}$ zu wählen, denn dann ist nach (8):

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} < 1 - \eta, \tag{12}$$

wenn μ und ν den Ungleichungen

$$\begin{aligned} (\vartheta_1 \pm \sigma) - \varrho' \leqq \frac{\mu}{\mu+\nu} \leqq (\vartheta_1 \pm \sigma) + \varrho' \\ (\vartheta_2 \mp \sigma) - \varrho' \leqq \frac{\nu}{\mu+\nu} \leqq (\vartheta_2 \mp \sigma) + \varrho' \end{aligned} \tag{13}$$

für $\sigma \leqq \frac{\varrho_0}{2}$ und $\varrho' \leqq \frac{\varrho_0}{2}$ genügen.

Wenn also $\overline{\vartheta}_1$ die obere und $\underline{\vartheta}_1$ die untere Grenze der zum Punkte r_1, r_2 gehörigen Zahlen ϑ_1, und $\overline{\vartheta}_2 = 1 - \underline{\vartheta}_1$, $\underline{\vartheta}_2 = 1 - \overline{\vartheta}_1$ die entsprechend für die Zahlen ϑ_2 gebildeten Größen sind, so sind auch die Paare $\overline{\vartheta}_1, \underline{\vartheta}_2$ und $\underline{\vartheta}_1, \overline{\vartheta}_2$ zum Punkte r_1, r_2 gehörig.

Die durch r_1, r_2 gehenden *extremen* W-Kurven sind nun die folgenden:

$$\begin{aligned} x^{\overline{\vartheta}_1} y^{\underline{\vartheta}_2} &= r_1^{\overline{\vartheta}_1} r_2^{\underline{\vartheta}_2} \\ x^{\underline{\vartheta}_1} y^{\overline{\vartheta}_2} &= r_1^{\underline{\vartheta}_1} r_2^{\overline{\vartheta}_2}, \end{aligned} \tag{13}$$

und zwar gibt die erste für $x > r_1$, die zweite für $x < r_1$ das genaueste Resultat, wenn man durch den Hauptsatz möglichst viele Punkte s_1, s_2 ausschließen will.

Die übrigen zum Punkte r_1, r_2 gehörigen W-Kurven verlaufen sämtlich ganz *zwischen* diesen beiden. Es ergibt sich dies daraus, daß sich, wie leicht ersichtlich, zwei W-Kurven höchstens in *einem* Punkte (des allein in Betracht kommenden Quadranten) schneiden können und daß die W-Kurven um so rascher der X- (bzw. Y-)Achse asymptotisch zustreben, je größer (bzw. je kleiner) das Verhältnis $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$ ist.

Ist insbesondere $\overline{\vartheta}_1 = 1$, also $\underline{\vartheta}_2 = 0$, so artet die eine zum Punkt r_1, r_2 gehörige extreme W-Kurve in die Gerade $x = r_1$ aus und nach

dem Hauptsatze gibt es dann kein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien r_1', r_2', wo $r_1' > r_1$ wäre: r_1 ist somit *Maximalradius*; dagegen ist

$$\overline{\lim_{\mu-\nu=\infty}} \sqrt[\mu-\nu]{a_{\mu\nu}\, r_1^{\mu} r_2'^{\nu}} = 1 \tag{14}$$

für jedes zwischen 0 und r_2 gelegene r_2': da nämlich

$$\overline{\lim_{\mu-\nu=\infty}} \sqrt[\mu-\nu]{a_{\mu\nu}\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} = 1$$

und $r_2' < r_2$ vorausgesetzt ist, kann der Grenzwert (14) *nicht größer* als 1 sein; es genügt daher zu zeigen, daß er auch *nicht kleiner* als 1 ist; wenn nun (wegen $\vartheta_{\frac{1}{2}} = 0$)

$$\frac{\nu}{\mu+\nu} < \varepsilon \tag{15}$$

vorausgesetzt wird, so ist für ein bestimmtes endliches r_2'

$$1-\varepsilon' < \left(\frac{r_2'}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu-\nu}} < 1$$

und es bleibt also $\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu\nu}\, r_1^{\mu} r_2'^{\nu}} = \overline{\lim_{\mu-\nu=\infty}} \sqrt[\mu-\nu]{a_{\mu\nu}\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} \left(\frac{r_2'}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$ in den Grenzen $1-\varepsilon'$ und 1: da wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ε' mit ε beliebig klein wird, so ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung (14).

Das Bestehen der Beziehung (14) besagt, daß sämtliche Punkte r_1, r_2', wo $0 < r_2' < r_2$, mithin das zwischen den Geraden $y=0$ und $y=r_2$ gelegene Stück der Geraden $x=r_1$ zur Kurve $\varphi(x,y)=0$ zu rechnen ist.

In analoger Weise ist eventuell das zwischen den Geraden $x=0$ und $x=r_1$ gelegene Stück der Geraden $y=r_2$ der Kurve $\varphi(x,y)=0$ zuzuzählen, wenn nämlich zum Punkte $x=r_1$, $y=r_2$ und also zu jedem Punkte $x<r_1$, $y=r_2$ das Zahlenpaar 0, 1 gehört.

Es ist auch denkbar, daß die ganze Kurve $\varphi(x,y)=0$ lediglich aus der Geraden $x=R_1$ besteht; dies ist dann der Fall, wenn für jedes $\varepsilon>0$ und für die durch die Bedingung $\frac{\nu}{\mu+\nu}<\varepsilon$ beschränkten $a_{\mu\nu}$ sowie für irgend einen endlichen Wert von r_2 die Beziehung gilt:

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, R_1^{\mu} r_2^{\nu}} = 1,$$

während $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ nach Anschluß jener $a_{\mu\nu}$ für $|x_1| < R_1$ und jeden endlichen Wert von x_2 absolut konvergiert. Beispiel:

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \frac{1}{R_1 - x_1} + G(x_1, x_2),$$

wo $G(x_1, x_2)$ eine ganze transzendente Funktion von x_1, x_2 ist. (Dagegen ist nach dem Hauptsatze *nicht möglich*, daß die Kurve $\varphi(x,y) = 0$, ohne in eine Parallele zur y-Achse auszuarten, ganz im Gebiete $x > \varepsilon > 0$ verlaufe, da die nicht ausartenden W-Kurven die Y-Achse zur Asymptote haben.)

Ist r_1 *nicht Maximalradius* und daher vom Paare $(1, 0)$ unabhängig, so gibt es nur *einen* zu r_1 assoziierten Konvergenzradius r_2. Wären nämlich r_1, r_2' und r_1, r_2'' zusammengehörige Konvergenzradien, $r_2'' > r_2'$ und r_1, r_2' vom Paare $\vartheta_1 (< 1)$, $\vartheta_2 (> 0)$ abhängig, so wäre, wenn wieder die Ungleichungen (7) in Kraft treten, einerseits

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2'^{\nu}} = 1, \quad \text{andererseits} \tag{16}$$

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2''^{\nu}} = \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2'^{\nu}} \cdot \left(\frac{r_2''}{r_2'}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}}$$
$$> \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2^{\nu}} \cdot \left(\frac{r_2''}{r_2'}\right)^{\vartheta_2 - \varrho}; \tag{17}$$

$\left(\frac{r_2''}{r_2'}\right)^{\vartheta_2 - \varrho}$ ist aber größer als 1, wenn $\varrho < \vartheta_2$ gewählt ist, so daß wegen (16) $\lim\limits_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, r_1^{\mu} r_2''^{\nu}} > 1$ ausfällt, was mit der Annahme, daß r_1, r_2'' zusammengehörige Konvergenzradien sind, unverträglich ist.

Im Intervalle $0 < x < R_1$ gestattet daher die Funktion $\varphi(x, y) = 0$ die *eindeutige Auflösung* $y = \psi(x)$, durch welche der zweite Konvergenzradius als Funktion des ersten dargestellt wird. $\psi(x)$ nimmt, wie unmittelbar ersichtlich, mit wachsendem x monoton ab; es existieren daher die Grenzwerte $\psi(r_1 + 0)$ und $\psi(r_1 - 0)$; um die Übereinstimmung derselben mit $\psi(r_1)$ und damit die *Stetigkeit* von $\psi(x)$ nachzuweisen, ist es zweckmäßig, folgenden für den Nachweis der Differenzierbarkeit von $\psi(x)$ ebenfalls nötigen II. Hilfssatz einzufügen, der dem ersten analog gebildet ist.

II. Hilfssatz: *Ist der Punkt r_1, r_2 unabhängig vom Zahlenpaare ϑ_1, ϑ_2, so gilt das gleiche für sämtliche Punkte einer gewissen Umgebung des Punktes r_1, r_2.*

Nach Voraussetzung besteht Ungleichung (8), sobald die μ, ν durch (7) beschränkt sind. p_1 und p_2 sollen nun in solcher Nähe von r_1 und r_2 gedacht werden, daß *erstens* für p_1 sowohl als für p_2 der Wert Null ausgeschlossen ist, *zweitens* $\frac{p_1}{r_1}$ und $\frac{p_2}{r_2}$ so nahe an 1 liegen, als nötig ist zum Bestehen folgender Ungleichung für $\varrho \leqq \varrho_0$:

$$\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{\vartheta_1 \pm \varrho} \cdot \left(\frac{p_2}{r_2}\right)^{\vartheta_2 \mp \varrho} < 1 + \eta, \tag{18}$$

wo ϱ_0 und η die gleichen Zahlen sind wie in (7), (8).

Dieser Bedingung kann wegen der für alle in Betracht kommenden Exponenten gleichmäßigen Stetigkeit der Potenz in der Nähe des Wertes 1 der Basis immer genügt werden: dann ist aber, wenn wieder die μ, ν durch (7) beschränkt sind:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\mu-\nu=\varkappa \\ \mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu-\nu]{a_{\mu,\nu}\,\overline{p_1^\mu p_2^\nu}} &= \lim_{\mu-\nu=\varkappa} \sqrt[\mu-\nu]{a_{\mu,\nu}}\; r_1^\mu r_2^\nu \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{\frac{\mu}{\mu-\nu}} \cdot \left(\frac{p_2}{r_2}\right)^{\frac{\nu}{\mu-\nu}} \\
&< \lim_{\mu-\nu=\varkappa} \sqrt[\mu-\nu]{a_{\mu,\nu}}\; r_1^\mu r_2^\nu\,(1-r_1) \qquad \text{(nach (18))} \\
&< 1 - r_1^2. \qquad \text{(nach (8))}
\end{aligned} \tag{19}$$

Diese Ungleichung besagt im Verein mit (7), daß p_1, p_2 von den Zahlen ϑ_1, ϑ_2 unabhängig ist.

Zusatz: Aus dem Beweise folgt sofort, daß unter den gemachten Voraussetzungen der Punkt p_1, p_2 auch von keinem der Zahlenpaare $\vartheta_1 \pm \varrho,\ \vartheta_2 \mp \varrho$, wo $\varrho < \varrho_0$, abhängen kann (wie sich auch aus dem I. Hilfssatze ergibt).

Wäre nun $0 < r_1 < R_1$ und $\psi(r_1 - 0) - \psi(r_1)$ eine von Null verschiedene und darum, wegen der Monotonie von $\psi(x)$, eine positive Größe, so müßte das zu r_1, r_2 gehörige extreme Zahlenpaar $\vartheta_1 = 1,\ \vartheta_2 = 0$ sein; anderenfalls lägen nämlich wegen der Stetigkeit der nicht ausartenden W-Kurven Punkte $r_1 - \varepsilon,\ \psi(r_1 - \varepsilon)$ für beliebig kleines ε oberhalb sämtlicher zum Punkte r_1, r_2 gehörigen W-Kurven, was nach dem Hauptsatze unmöglich ist. Durch das zugehörige Zahlenpaar 1, 0 ist aber r_1 als Maximalradius R_1 charakterisiert.

Ähnlich ergibt sich $\psi(r_1 + 0) = \psi(r_1)$, wenn $0 < r_1 < R_1$ ist. Wäre nämlich $\psi(r_1 + 0) < \psi(r_1)$, so müßten zu Punkten $r + \varepsilon,\ \psi(r_1 + \varepsilon)$ Zahlen ϑ_1 gehören, deren oberer Limes für $\varepsilon = 0$ von 1 nicht verschieden sein könnte, weil sonst der Punkt r_1, r_2 oberhalb von zu Punkten $r_1 + \varepsilon,\ \psi(r_1 + \varepsilon)$ gehörigen W-Kurven zu liegen käme. Aber aus der Annahme, daß jener obere Limes gleich 1 sei, würde auf Grund des II. Hilfssatzes folgen, daß zum Punkte r_1, r_2 selber das Paar (1, 0) gehörte, daß also r_1 Maximalradius wäre.

Genau so zeigt man, daß der erste Konvergenzradius eine stetige Funktion des zweiten ist, solange dieser $< R_2$ bleibt.

Um nunmehr die *Differenzierbarkeit* der Funktion $y = \psi(x)$ in dem eingangs bezeichneten Umfange nachzuweisen, bezeichne man den Wert irgend eines und jedes beliebigen der zum Punkte x, y gehörigen Zahlenpaare ϑ_1, ϑ_2 in seiner Abhängigkeit von diesem Punkte mit $\vartheta_1(x),\ \vartheta_2(x)$ und die eindeutig definierten Maximal- und Minimalwerte der eventuell unendlich vieldeutigen Funktionen $\vartheta_1(x), \vartheta_2(x)$ mit $\overline{\vartheta_1(x)},\ \underline{\vartheta_1(x)},\ \overline{\vartheta_2(x)},$

$\underline{\vartheta_2(x)}$, so ergibt sich, daß jede Häufungsstelle von Werten $\vartheta_1(x \pm \varepsilon)$, wenn ε der Null zustrebt, einen Wert $\vartheta_1(x)$ liefert; die gegenteilige Annahme würde nämlich sofort einen Widerspruch mit dem Zusatze zu dem II. Hilfssatze ergeben; es ist also insbesondere

$$(20)\qquad \begin{aligned} \underline{\vartheta_1(x)} \leqq \underline{\lim_{\varepsilon=0}}\, \vartheta_1(x \pm \varepsilon) \leqq \overline{\vartheta_1(x)} \qquad &\text{und auch} \\ \underline{\vartheta_2(x)} \leqq \underline{\lim_{\varepsilon=0}}\, \vartheta_2(x \pm \varepsilon) \leqq \overline{\vartheta_2(x)} \end{aligned}$$

Diese Beziehung genügt für das unmittelbar Folgende; eine präzisere wird später abgeleitet werden.

Ich zeige nun, *daß die Kurve* $\varphi(x, y) = 0$ *in jedem Punkte* x, y *von den beiden zugehörigen extremen W-Kurven berührt wird;* d. h. es ist

$$(21)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = -\frac{\overline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\underline{\vartheta_2(x)} \cdot x}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_- = -\frac{\underline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\overline{\vartheta_2(x)} \cdot x}.$$

Demnach fallen diese Tangenten dann und nur dann zusammen, wenn zum Punkte (x, y) nur *ein* Zahlenpaar ϑ_1, ϑ_2 gehört.

Mit $\left(\frac{\overline{dy}}{dx}\right)_+$ und $\left(\frac{dy}{\underline{dx}}\right)_+$ werden, wie üblich, der obere und untere vordere Differentialquotient bezeichnet; dann gilt jedenfalls, da ja nach dem Hauptsatze oberhalb jeder zu (x, y) gehöriger W-Kurve keine Punkte von $\varphi(x, y) = 0$ liegen dürfen:

$$(22)\qquad \left(\frac{dy}{\underline{dx}}\right)_+ \leqq \left(\frac{\overline{dy}}{dx}\right)_+ \leqq \frac{-\overline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\underline{\vartheta_2(x)} \cdot x},$$

und es ist zu zeigen, daß für einen beliebigen Punkt $x = r_1$, $y = r_2$ hier überall das Gleichheitszeichen gilt, daß also die Annahme

$$\left(\frac{dy}{\underline{dx}}\right)_+ < \underset{\substack{x=r_1\\y=r_2}}{\frac{-\overline{\vartheta_1(r_1)} \cdot r_2}{\underline{\vartheta_2(r_1)} \cdot r_1}}$$

auf einen Widerspruch führt. Der Fall $\overline{\vartheta_1} = 1$, $\underline{\vartheta_2} = 0$, $r_1 = R_1$ kann von vornherein als erledigt gelten; denn dann ist den drei in (22) auftretenden Größen der Wert $-\infty$ beizulegen; es ist also im folgenden überall $\underline{\vartheta_2} > 0$, $r_1 < R_1$ zu denken. Dann würde aber die Annahme

$$\left(\frac{dy}{\underline{dx}}\right)_+ < \underset{\substack{x=r_1\\y=r_2}}{\frac{-\overline{\vartheta_1(r_1)}\, r_2}{\underline{\vartheta_2(r_1)} \cdot r_1}}$$

besagen, daß es auf der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ unendlich viele Punkte

$(r_1 + \varepsilon,\ r_2 - \varepsilon \cdot a\,\varepsilon)$ gibt, für welche die *positive* Zahl ε der Null zustrebt, während stets

$$a\,\varepsilon > \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_2}{r_1} > 0 \tag{23}$$

bleibt. Dabei muß wegen der bewiesenen Stetigkeit der Kurve $y = w(x)$ an der Stelle r_1, r_2:

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \cdot a(\varepsilon) = 0 \tag{24}$$

sein. Nun kann nach dem Hauptsatze der Punkt r_1, r_2 nicht oberhalb einer Kurve $x^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)} \cdot y^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)} = (r_1 + \varepsilon)^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)} (r_2 - \varepsilon \cdot a\,\varepsilon)^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)}$ liegen; es ist also

$$\begin{aligned} &(r_1 + \varepsilon)^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)} \cdot (r_2 - \varepsilon \cdot a\,\varepsilon)^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)} \geq r_1^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)} r_2^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)} \quad \text{oder} \\ &\left(1 + \frac{\varepsilon}{r_1}\right)^{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon \cdot a\,\varepsilon}{r_2}\right)^{\vartheta_2(r_1+\varepsilon)} \geq 1 \end{aligned} \tag{25}$$

oder wenn man die beiden Faktoren nach der binomischen Reihe entwickelt:

$$\frac{\varepsilon\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}{r_1} - \frac{\varepsilon \cdot a\,\varepsilon \cdot \vartheta_2(r_1+\varepsilon)}{r_2} + [\varepsilon^2] + [(\varepsilon \cdot a(\varepsilon))^2] \geq 0. \tag{26}$$

Die mit $[\varepsilon^2]$ und $[(\varepsilon \cdot a\,\varepsilon)^2]$ bezeichneten Restglieder können wegen der für alle in Betracht kommenden (beliebig kleinen) Werte von ε gleichmäßigen Konvergenz der binomischen Reihe auf das Vorzeichen der linken Seite von (26) nur dann einen Einfluß haben, wenn

$$\lim_{\varepsilon = 0} \left(\frac{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}{r_1} - \frac{a(\varepsilon)\cdot\vartheta_2(r_1+\varepsilon)}{r_2}\right) = 0$$

ist: anderenfalls besagt (26), daß für $\varepsilon < \varepsilon'$:

$$\frac{\varepsilon\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}{r_1} - \frac{\varepsilon \cdot a(\varepsilon)\vartheta_2(r_1+\varepsilon)}{r_2} \geq 0$$

ist, wobei die linke Seite noch durch die positive Zahl ε dividiert werden darf; es ist also in jedem Falle

$$\overline{\lim_{\varepsilon = 0}} \frac{\vartheta_1(r_1+\varepsilon)}{r_1} - \frac{a(\varepsilon)\vartheta_2(r_1+\varepsilon)}{r_2} \geq 0 \tag{27}$$

und wegen (20) um so mehr

$$\overline{\lim_{\varepsilon = 0}} \frac{\vartheta_1(r_1)}{r_1} - \frac{a(\varepsilon)\vartheta_2(r_1)}{r_2} \geqq 0, \tag{28}$$

d. h.

$$\overline{\lim_{\varepsilon = 0}}\, a(\varepsilon) \leqq \frac{\vartheta_1(r_1)\cdot r_2}{\vartheta_2(r_1)\cdot r_1}, \tag{29}$$

was in Widerspruch steht mit (23).

Damit ist bewiesen, daß für jeden Punkt x, y der Kurve $\varphi(x, y) = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = -\frac{\overline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\underline{\vartheta_2(x)} \cdot x} \tag{30}$$

ist; genau so zeigt man, was übrigens auch aus (30) direkt durch Vertauschen der Buchstaben x und y folgt, daß

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_- = -\frac{\underline{\vartheta_1(x)} \cdot y}{\overline{\vartheta_2(x)} \cdot x} \tag{31}$$

ist.

Um weitere Schlüsse über die Funktionen $\vartheta_1(x)$ und $\vartheta_2(x)$ und damit über die Tangenten von $\varphi(x, y) = 0$ zu ziehen, beachte man den folgenden

III. Hilfssatz: *Sind x', y' und x'', y'' irgend zwei Punkte von $\varphi(x, y) = 0$ und ist $x'' > x'$, also $y'' \leqq y'$, ist ferner $\vartheta_1', \vartheta_2'$ irgend ein zum Punkte x', y' und $\vartheta_1'', \vartheta_2''$ irgend ein zum Punkte x'', y' gehöriges Zahlenpaar, so ist*

$$\vartheta_1'' \geqq \vartheta_1', \quad \text{also} \quad \vartheta_2'' \leqq \vartheta_2'. \tag{32}$$

Nach dem Hauptsatze muß nämlich gleichzeitig

$$x''^{\vartheta_1'} \cdot y''^{\vartheta_2'} \leqq x'^{\vartheta_1'} \cdot y'^{\vartheta_2'} \tag{33}$$

und

$$x'^{\vartheta_1''} \cdot y'^{\vartheta_2''} \leqq x''^{\vartheta_1''} \cdot y''^{\vartheta_1''} \tag{34}$$

sein. Durch Division der linken Seite von (33) durch die rechte von (34) und der rechten Seite von (33) durch die linke von (34) ergibt sich:

$$x''^{\vartheta_1' - \vartheta_2''} \cdot y''^{\vartheta_2' - \vartheta_2''} \leqq x'^{\vartheta_1' - \vartheta_1''} \cdot y'^{\vartheta_2' - \vartheta_2''}. \tag{35}$$

Setzt man $\vartheta_1' - \vartheta_1'' = \zeta$, somit $\vartheta_2' - \vartheta_2'' = -\zeta$, so wird aus (35):

$$\left(\frac{x''}{x'}\right)^{\zeta} \leqq \left(\frac{y''}{y'}\right)^{\zeta}. \tag{36}$$

Da nach Voraussetzung $\frac{x''}{x'} > 1$, dagegen $\frac{y''}{y'} \leqq 1$ ist, so ist (36) nur möglich, wenn ζ negativ oder Null ist, d. h. wenn, wie behauptet, $\vartheta_1'' \geqq \vartheta_1'$ ist.

Die Funktion $\vartheta_1(x)$ nimmt also von einem Minimalwerte $\geqq 0$ bis zu einem Maximalwerte $\leqq 1$ monoton zu.

Nun lasse man x'' sich dem x' unbegrenzt nähern; dann erhält man $\vartheta_1(x + 0) \geqq \vartheta_1(x)$ und insbesondere $\vartheta_1(x + 0) \geqq \overline{\vartheta_1(x)}$; durch den Zusatz zu Hilfsatz II ist aber hier das Zeichen $>$ ausgeschlossen, so daß sich ergibt:

$$\begin{aligned} &\vartheta_1(x+0) = \overline{\vartheta_1(x)}, \quad \vartheta_2(x+0) = \underline{\vartheta_2(x)} \quad \text{und zugleich} \\ &\vartheta_1(x-0) = \underline{\vartheta_1(x)}, \quad \vartheta_2(x-0) = \overline{\vartheta_2(x)}. \end{aligned} \tag{37}$$

Auf die Differentialquotienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_-$ angewandt, besagen diese Sätze folgendes:

An jeder Vieldeutigkeits- und mithin Unstetigkeitsstelle von $\vartheta_1(x)$ sind die beiden Differentialquotienten voneinander verschieden; dagegen ist stets

$$\left(\frac{d\varphi(x-0)}{dx}\right)_- = \left(\frac{d\varphi(x-0)}{dx}\right)_- = \left(\frac{dy}{dx}\right)_-$$
$$\left(\frac{d\varphi(x+0)}{dx}\right)_- = \left(\frac{d\varphi(x+0)}{dx}\right)_- = \left(\frac{dy}{dx}\right)_- . \tag{38}$$

Der Gesamtbetrag der Unstetigkeiten von $\vartheta_1(x)$ ist ≤ 1; daraus folgt, daß auch der Gesamtbetrag der Unstetigkeiten eines der beiden Differentialquotienten in jedem endlichen Intervalle (x', x'') ein endlicher ist; dagegen kann derselbe mit wachsendem x'' jede endliche Grenze überschreiten, da dann das in den Nennern von (21) befindliche $\vartheta_2(x)$ möglicherweise der Null zustrebt.

Weil nach Hilfssatz III: $-\frac{\vartheta_1 x}{\vartheta_2 x} = \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)_-$ mit wachsendem x abnimmt, so hat man für jedes $h > 0$:

$$\frac{x+h}{\varphi(x+h)} \cdot \left(\frac{d\varphi(x+h)}{dx}\right)_- - \frac{x}{\varphi(x)} \cdot \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_+ \leqq 0, \tag{39}$$

oder auch

$$\frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{\varphi(x+h)} \cdot \left(\frac{d\varphi(x+h)}{dx}\right)_+ - \frac{x}{\varphi(x)}\left(\frac{d\varphi(x+h)}{dx}\right)_-\right) + \\ + \frac{1}{h}\left(\frac{x}{\varphi(x)} \cdot \left(\frac{d\varphi(x+h)}{dx}\right)_+ - \frac{x}{\varphi(x)}\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_+\right) \leqq 0 \tag{39'}$$

und für $\lim h = 0$ (mit Benutzung von (38): $\left(\frac{d\varphi(x+0)}{dx}\right)_+ = \left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_+$):

$$\left(\frac{d\frac{x}{y}}{dx}\right)_+ \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_+ + \frac{x}{y} \lim_{h=0} \frac{\left(\frac{d\varphi(x+h)}{dx}\right)_+ - \left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_+}{h} \leqq 0, \tag{40}$$

endlich, wenn man für $\lim_{h=0} \frac{\left(\frac{d\varphi(x+h)}{dx}\right)_+ - \left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_+}{h}$ kürzer $\left(\frac{\overline{d^2(y)}}{dx^2}\right)_+$ schreibt:

$$\left(\frac{\overline{d^2y}}{dx^2}\right)_+ \leq \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)_+^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)_- . \tag{41}$$

Dieser Differentialungleichung genügen also sämtliche Kurven assoziierter Konvergenzradien und zwar, wegen der monotonen Abnahme von $y = \psi(x)$, mit nirgends positivem $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$; doch ist es nicht nötig, die Bedingung $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ < 0$ eigens hinzuzunehmen; es wird sich nämlich später ergeben, daß diese Ungleichung, wenn sie als Anfangsbedingung für *einen* Punkt x', y' erfüllt ist, für alle Punkte x'', y'', wo $x'' > x'$ ist, vermöge (41) von selber besteht.

Auf Grund dessen, daß (41) eine notwendige Bedingung für die Kurven $\varphi(x, y) = 0$ ist, erkennt man, daß unzählig viele monoton abnehmende, stetige und differenzierbare, ja durchweg analytische Kurven unmöglich die gegenseitige Abhängigkeit zweier Konvergenzradien darstellen können.

Beispiel: Für die Funktion $y = e^{\frac{a}{x^n}} - 1$, wo a und n beliebige positive Zahlen bedeuten sollen, erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{e^{\frac{a}{x^n}}}{x^{2n+2}}[a^2n^2 + an(n+1)x^n] - \frac{a^2n^2e^{\frac{2a}{x^n}}}{\left(e^{\frac{a}{x^n}} - 1\right)x^{2n+2}} - \frac{ane^{\frac{a}{x^n}}}{x^{n+2}}$$

und hieraus, indem man nach einigen Vereinfachungen statt des für alle $x > 0$ *positven* Ausdrucks $\frac{an \cdot e^{\frac{a}{x^n}}}{\left(e^{\frac{a}{x^n}} - 1\right)x^{n+2}}$ kurz k schreibt:

$$k \cdot \left(-\frac{a}{x^n} + e^{\frac{a}{x^n}} - 1\right) = k \cdot \left[\frac{1}{2!}\left(\frac{a}{x^n}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{x^n}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$> 0,$$

während diese rechte Seite für Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien nach (41) stets $\leqq 0$ ausfällt. Ein noch einfacheres Beispiel ist $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Im Grunde ist die Differentialungleichung (41) nichts anderes als eine durch den Beweis der Stetigkeit und Differenzierbarkeit vervollständigte Umschreibung des Hauptsatzes; ich zeige nämlich, daß irgend eine mit den als notwendig erkannten Stetigkeitseigenschaften ausgestattete Kurve $\Phi(x, y) = 0$, welche Lösung von (41) ist, unterhalb jeder sie in irgend einem Punkte berührenden W-Kurve verläuft (oder mit dieser W-Kurve ganz oder stückweise zusammenfällt), ferner, daß diese Eigenschaft der Kurven $\Phi(x, y) = 0$ auch hinreichend ist, um die $\Phi(x, y) = 0$ als Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien zu kennzeichnen, so daß also auch *durch die zunächst nur als notwendig bestehend erkannte Differentialungleichung* (41) *die betreffenden Kurven vollkommen charakterisiert sind.* (Deshalb ist auch die genau wie (41) abzuleitende Differentialungleichung, in der nur die vorwärts genommenen Differentialquotienten durch die rückwärts genommenen zu ersetzen sind, eine Folge von (41).)

Es sei also nun eine im Gebiete $0 < x < R_1$ stetige, mit nach rechts stetigen vorwärts genommenen Differentialquotienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$ versehene und

der Differentialungleichung (41) genügende Kurve $\Phi(x,y)=0$ oder $y=\Psi(x)$ vorgelegt; es soll gezeigt werden, daß diese Kurve nirgends oberhalb einer W-Kurve verläuft, mit der sie einen Punkt (x,y) und den zugehörigen Differentialquotienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$ gemein hat.

Zu diesem Zwecke ist vor allem aus der nach Voraussetzung für $y=\Psi(x)$ bestehenden Differentialungleichung (41) oder aus der damit gleichwertigen Ungleichung (40), indem man die p. 300 gemachten Schlüsse rückwärts verfolgt, die Ungleichung (39) abzuleiten für

$$0<x<x+h<R_1-h'<R_1$$

(überall ist dabei ψ durch Ψ ersetzt zu denken). Ist ε eine gegebene positive Zahl, so folgt aus (40) unmittelbar nur die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}(42)\qquad &\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\xi+\alpha}{\Psi(\xi+\alpha)}\cdot\left(\frac{d\Psi(\xi+\alpha)}{d\xi}\right)_+-\frac{\xi}{\Psi(\xi)}\left(\frac{d\Psi(\xi+\alpha)}{d\xi}\right)_+\right)+\\ &+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\xi}{\Psi(\xi)}\left(\frac{d\Psi(\xi+\alpha)}{d\xi}\right)_+-\frac{\xi}{\Psi(\xi)}\left(\frac{d\Psi(\xi)}{d\xi}\right)_+\right)<\varepsilon,\end{aligned}$$

oder

$$(43)\qquad \frac{\xi+\alpha}{\Psi(\xi+\alpha)}\left(\frac{d\Psi(\xi+\alpha)}{d\xi}\right)_+-\frac{\xi}{\Psi(\xi)}\left(\frac{d\Psi(\xi)}{d(\xi)}\right)_+\leq\alpha\varepsilon$$

für *jeden* Wert ξ des Intervalls $0<\xi<R_1-h'$ und für solche Werte α, die *kleiner* bleiben als eine bestimmte Zahl α_ξ. Es läßt sich dann nach dem bekannten Verfahren, durch welches man auch aus der Stetigkeit einer Funktion in jedem Punkte eines Intervalls die gleichmäßige Stetigkeit derselben in dem Intervalle erschließt, zeigen, daß die Werte α_ξ für alle oben genannten ξ über einer endlichen Grenze $\bar{\alpha}$ bleiben. Teilt man daher das Intervall von x bis $x+h$ in n gleiche Teilintervalle:

$$xx_1, x_1x_2, \cdots, x_{n-1}x_n \qquad (x_n=x+h),$$

von der Art, daß die Ausdehnung $\frac{h}{n}$ jedes dieser Intervalle $<\bar{\alpha}$ ist, so gelten die Ungleichungen:

$$\begin{aligned}&\frac{x_1}{\Psi(x_1)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x_1)}{dx}\right)_+-\frac{x}{\Psi(x)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x)}{dx}\right)_+\leq\frac{h}{n}\cdot\varepsilon,\\ (44)\qquad &\frac{x_2}{\Psi(x_2)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x_2)}{dx_2}\right)_+-\frac{x_1}{\Psi(x_1)}\left(\frac{d\Psi(x_1)}{dx_1}\right)_+\leq\frac{h}{n}\cdot\varepsilon,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{x_n}{\Psi(x_n)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x_n)}{dx_n}\right)_+-\frac{x_{n-1}}{\Psi(x_{n-1})}\left(\frac{d\Psi(x_{n-1})}{dx_{n-1}}\right)_+\leq\frac{h}{n}\cdot\varepsilon,\end{aligned}$$

durch deren Addition man findet:

$$(45)\qquad \frac{x+h}{\Psi(x+h)}\cdot\left(\frac{d\Psi(x+h)}{dx}\right)_+-\frac{x}{\Psi(x)}\left(\frac{d\Psi(x)}{dx}\right)_+\leq h\cdot\varepsilon,$$

Auf Grund dessen, daß (41) eine notwendige Bedingung für die Kurven $\varphi(x, y) = 0$ ist, erkennt man, daß unzählig viele monoton abnehmende, stetige und differenzierbare, ja durchweg analytische Kurven unmöglich die gegenseitige Abhängigkeit zweier Konvergenzradien darstellen können.

Beispiel: Für die Funktion $y = e^{e^{x^n}} - 1$, wo a und n beliebige positive Zahlen bedeuten sollen, erhält man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{e^{e^{x^n}}}{x^{2n+2}}[a^2n^2 + an(n+1)x^n] - \frac{a^2n^2e^{2e^{x^n}}}{\left(e^{e^{x^n}} - 1\right)x^{2n+2}} - \frac{ane^{e^{x^n}}}{x^{n+2}}$$

und hieraus, indem man nach einigen Vereinfachungen statt des für alle $x > 0$ *positiven* Ausdrucks $\frac{an \cdot e^{e^{x^n}}}{\left(e^{e^{x^n}} - 1\right)x^{n+2}}$ kurz k schreibt:

$$k \cdot \left(-\frac{a}{x^n} + e^{e^{x^n}} - 1\right) = k \cdot \left[\frac{1}{2!}\left(\frac{a}{x^n}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{x^n}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$> 0,$$

während diese rechte Seite für Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien nach (41) stets $\leqq 0$ ausfällt. Ein noch einfacheres Beispiel ist $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Im Grunde ist die Differentialungleichung (41) nichts anderes als eine durch den Beweis der Stetigkeit und Differenzierbarkeit vervollständigte Umschreibung des Hauptsatzes; ich zeige nämlich, daß irgend eine mit den als notwendig erkannten Stetigkeitseigenschaften ausgestattete Kurve $\Phi(x, y) = 0$, welche Lösung von (41) ist, unterhalb jeder sie in irgend einem Punkte berührenden W-Kurve verläuft (oder mit dieser W-Kurve ganz oder stückweise zusammenfällt), ferner, daß diese Eigenschaft der Kurven $\Phi(x, y) = 0$ auch hinreichend ist, um die $\Phi(x, y) = 0$ als Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien zu kennzeichnen, so daß also auch *durch die zunächst nur als notwendig bestehend erkannte Differentialungleichung* (41) *die betreffenden Kurven vollkommen charakterisiert sind.* (Deshalb ist auch die genau wie (41) abzuleitende Differentialungleichung, in der nur die vorwärts genommenen Differentialquotienten durch die rückwärts genommenen zu ersetzen sind, eine Folge von (41).)

Es sei also nun eine im Gebiete $0 < x < R_1$ stetige, mit nach rechts stetigen vorwärts genommenen Differentialquotienten $\left(\frac{dy}{dx}\right)_+$ versehene und

$y = \Psi(x)$ ist positiv, stetig und monoton abnehmend im Gebiete $0 < x < R_1$, besitzt daselbst überall eine nach vorwärts genommene Tangente und verläuft nirgends oberhalb irgend einer W-Kurve, mit der $y = \Psi(x)$ einen Punkt samt vorwärts genommener Tangente gemein hat. An Stelle der letzteren Eigenschaft kann auch die Erfüllung der Differentialungleichung (41) verlangt werden. Ist für $x = R_1$ die Stetigkeit unterbrochen, so ist die Kurve $\Phi(x, y) = 0$ bis zur X-Achse durch die Gerade $x = R_1$ fortgesetzt zu denken.

Der einfachste sich dem folgenden nicht ganz einfügende Spezialfall, in welchem die Kurve $\Phi(x, y) = 0$ eine W-Kurve $x^{\vartheta_1} \cdot y^{\vartheta_2} = c$ ist, möge vorausbehandelt werden; man denke sich dann die Zahlen ϑ_1, ϑ_2, ob sie nun selber rational sind oder nicht, als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen mit wachsenden Nennern:

$$\vartheta_1 = \lim_{\mu+\nu=\infty} \frac{\mu}{\mu+\nu}, \quad \vartheta_2 = \lim_{\mu+\nu=\infty} \frac{\nu}{\mu+\nu} \tag{50}$$

(wo μ und ν ganze Zahlen sind) und setze $a_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu + \nu$ *nicht* als Nenner in (50) auftritt, sonst aber $a_{\mu\nu} = \frac{1}{c^{\mu+\nu}}$, wo c die Konstante der vorgelegten W-Kurve ist. Wenn dann $x = r_1$, $y = r_2$ irgend ein Punkt der letzteren ist, so ist auch r_1, r_2 ein Paar assoziierter Konvergenzradien der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty {}^{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_1^\mu x_2^\nu$; es existiert nämlich der eigentliche Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu\nu} r_1^\mu r_2^\nu} &= \frac{1}{c} \lim_{\mu+\nu=\infty} r_1^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} r_2^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} \\ &= \frac{1}{c} \cdot r_1^{\lim \frac{\mu}{\mu+\nu}} \cdot r_2^{\lim \frac{\nu}{\mu+\nu}} \quad \text{(wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion)} \\ &= \frac{r_1^{\vartheta_1} r_2^{\vartheta_2}}{c} = 1, \end{aligned} \tag{51}$$

wodurch r_1, r_2 als Paar zusammengehöriger Konvergenzradien der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ charakterisiert ist.

Zur Vorbereitung des Beweises für den allgemeinen Fall denke man sich die rationalen Zahlen zwischen Null und R_1 (mit Ausschluß dieser Grenzen) nach einem beliebigen Abzählungsverfahren in eine Reihe: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gebracht und jeder Zahl x_i durch $y = \Psi(x)$ eine Zahl y_i sowie durch $\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = -\frac{\vartheta_1^{(i)}}{\vartheta_2^{(i)}}$, $\vartheta_2^{(i)} = 1 - \vartheta_1^{(i)}$ ein Zahlenpaar $\vartheta_1^{(i)}, \vartheta_2^{(i)}$ zugeordnet. Die obere Grenze aller $\vartheta_1^{(i)}$ werde mit $\bar{\vartheta}_1$, die untere mit $\underline{\vartheta}_1$

bezeichnet; da die Annahme, daß $y = \Psi(x)$ eine W-Kurve ist, schon erledigt ist, darf ϑ_1 kleiner als $\bar{\vartheta}_1$ gedacht werden; es ist also

$$(52) \qquad \begin{aligned} &0 \leqq \vartheta_1 < \bar{\vartheta}_1 \leqq 1 \quad \text{und analog} \\ &0 \leqq \vartheta_2 < \bar{\vartheta}_2 \leqq 1. \end{aligned}$$

Das Zahlenpaar $\vartheta_1^{(i)}, \vartheta_2^{(i)}$ gehört außer zum Punkte $x = x_1$, $y = y_1$ möglicherweise noch zu mehreren oder unendlich vielen anderen Punkten x_k, y_k; $x_l, y_l; \cdots$; allen diesen Punkten werden in einer μ, ν-Ebene diejenigen Gitterpunkte zugeordnet, deren (ganzzahlige) Koordinaten μ, ν den folgenden Ungleichungen genügen:

$$(53) \qquad \left|\vartheta_1^{(1)} - \frac{\mu}{\mu+\nu}\right| < \frac{1}{\mu+\nu}; \quad \left|\vartheta_2^{(1)} - \frac{\nu}{\mu+\nu}\right| < \frac{1}{\mu+\nu}$$

mit der folgenden (zum Teil nur durch die Anordnung des Beweises bedingten) Beschränkung:

Wenn $\vartheta_1^{(1)}$ in der durch die Ungleichung

$$(54) \qquad \vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1 < \varepsilon$$

vorgeschriebenen Nähe von ϑ_1 liegt, wo $\varepsilon > 0$, aber $< \frac{\bar{\vartheta}_1 - \vartheta_1}{2}$ anzunehmen ist, soll $\vartheta_1^{(1)} - \frac{\mu}{\mu+\nu}$ außerdem positiv oder Null sein, so daß (53) übergeht in

$$(55) \qquad 0 < \vartheta_1^{(1)} - \frac{\mu}{\mu+\nu} < \frac{1}{\mu+\nu}; \quad 0 \leqq \frac{\nu}{\mu+\nu} - \vartheta_2^{(1)} < \frac{1}{\mu+\nu};$$

entsprechend soll, wenn $\vartheta_1^{(1)}$ der Ungleichung

$$(56) \qquad \vartheta_1 - \vartheta_1^{(1)} < \varepsilon$$

genügt,

$$(57) \qquad 0 \leqq \frac{\mu}{\mu+\nu} - \vartheta_1^{(1)} < \frac{1}{\mu+\nu}; \quad 0 < \vartheta_2^{(1)} - \frac{\nu}{\mu+\nu} < \frac{1}{\mu+\nu}$$

sein.

Daß jedenfalls der Zahl $\vartheta_1^{(1)}$ unendlich viele Gitterpunkte zugeordnet werden, ist klar; wenn man $\mu + \nu$ auf die Nenner der Kettenbruchentwicklung von $\vartheta_1^{(1)}$ beschränkt, kann man $\frac{1}{\mu+\nu}$ auf den rechten Seiten von (53), (55), (57) sogar durch $\frac{1}{(\mu+\nu)^2}$ ersetzen.

Die gemachte Festsetzung läßt sich — abgesehen von einem unwesentlichen Unterschiede — auch so formulieren: Auf den Geraden $\mu + \nu = 1$, $\mu + \nu = 2, \cdots$ werden jedesmal diejenigen Gitterpunkte der Zahl $\vartheta_1^{(1)}$ zugeordnet, die von der Geraden $\vartheta_2^{(1)}\mu - \vartheta_1^{(1)}\nu = 0$ die geringste Entfernung haben, wozu unter gewissen Voraussetzungen [(54), (56)] noch die Bedingung kommt, daß die zu wählenden Gitterpunkte nicht links bezw. rechts der angegebenen Geraden liegen.

Die der Zahl $\vartheta_1^{(1)}$ zugeordneten unendlich vielen Gitterpunkte lassen sich nun (in im übrigen noch beliebiger Weise) so auf die Punkte $x_1, x_k, x_l, \cdots$, für die $\vartheta_1^{(1)} = \vartheta_1^{(k)} = \vartheta_1^{(l)}$ ist, verteilen, daß jedem dieser Punkte, z. B. x_k, noch unendlich viele Gitterpunkte μ_k, ν_k zugeordnet sind; jetzt bilde man die Größen $a_{\mu\nu}$ mit diesen μ_k, ν_k als Indizes und setze

$$a_{\mu_k \nu_k} = \frac{1}{x_k^{\mu_k} \cdot y_k^{\nu_k}}. \tag{58}$$

Befindet sich der Punkt x_2 nicht unter den $x_k, x_l, \cdots$, ist demselben also ein Zahlenpaar $\vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(2)}$ zugeordnet, das von $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}$ verschieden ist, so lassen sich ihm von den noch nicht benutzten μ, ν unendlich viele durch analoge Ungleichungen wie (53) bezw. (55), (57) zuweisen.

Der Fortgang des Verfahrens ist klar; jeder rationalen Zahl x_s zwischen 0 und R_1 sind unendlich viele Koeffizienten

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{x_s^{\mu}\, y_s^{\nu}} \tag{59}$$

zugeordnet, deren Indizes μ_s, ν_s die Ungleichungen

$$\left|\vartheta_1^{(s)} - \frac{\mu_s}{\mu_s + \nu_s}\right| < \frac{1}{\mu_s + \nu_s}; \quad \left|\vartheta_2^{(s)} - \frac{\nu_s}{\mu_s + \nu_s}\right| < \frac{1}{\mu_s + \nu_s} \tag{60}$$

befriedigen, die im Falle: $\vartheta_1^{(s)} - \vartheta_1 < \varepsilon$ durch

$$0 \leqq \vartheta_1^{(s)} - \frac{\mu_s}{\mu_s + \nu_s} < \frac{1}{\mu_s + \nu_s}; \quad 0 \leqq \frac{\nu_s}{\mu_s + \nu_s} - \vartheta_2^{(s)} < \frac{1}{\mu_s + \nu_s} \tag{61}$$

und im Falle: $\vartheta_1 - \vartheta_1^{(s)} < \varepsilon$ durch

$$0 \leqq \frac{\mu_s}{\mu_s + \nu_s} - \vartheta_1^{(s)} < \frac{1}{\mu_s + \nu_s}; \quad 0 < \vartheta_2^{(s)} - \frac{\nu_s}{\mu_s + \nu_s} < \frac{1}{\mu_s + \nu_s} \tag{62}$$

zu ersetzen sind.

Ist der Gitterpunkt μ, ν keiner der rationalen Zahlen x_i zugeordnet, so werde $a_{\mu\nu} = 0$ gesetzt.

Dies vorausgeschickt, bilde ich die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^{\infty} {}^{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_1^{\mu} x_2^{\nu} \tag{63}$$

und behaupte, daß die vorgelegte Kurve $\Phi(x, y) = 0$ Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien für diese Reihe ist; nur wenn $\Phi(x, y) = 0$ teilweise aus der Geraden $x = R_1$ besteht, ist zu der rechten Seite von (63) noch die Reihe $\sum_0^{\infty}{}^{\mu} \left(\frac{x_1}{R_1}\right)^{\mu} = \frac{R_1}{R_1 - x_1}$ oder irgend eine andere Potenzreihe von x_1 mit dem Konvergenzradius R_1 zu addieren.

Wegen der *vorausgesetzten* Stetigkeit von $y = \Psi(x)$ und wegen der *bewiesenen* Stetigkeit von $y = \psi(x)$ ist jede der beiden Kurven durch

unendlich viele Punkte x, y, deren x-Koordinaten eine überall dichte Menge bilden, völlig bestimmt; es genügt daher die Übereinstimmung der beiden für die zuvor benutzten Punkte x_i, y_i (wo die x_i rational sind) nachzuweisen.

x_i, y_i sind aber zusammengehörige Konvergenzradien, wenn

$$\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, x_i^\mu y_i^\nu} = 1 \tag{64}$$

ist.

Für unendlich viele Indizes μ, ν ist $a_{\mu\nu} = \frac{1}{x_i^\mu \cdot y_i^\nu}$, also $\sqrt[\mu+\nu]{|a_{\mu\nu}|\, x_i^\mu y_i^\nu} = 1$, daher bleibt nur zu zeigen, daß der obere Limes (64) *nicht größer* als 1 ist. Es ist aber, wenn man aus (59) $a_{\mu\nu}$ durch $\frac{1}{x_s^\mu y_s^\nu}$, wobei s jede ganze Zahl sein kann, ersetzt und auf Grund von (60) bezw. (61), (62) $\vartheta_1^{(s)} + \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu}$, $\vartheta_2^{(s)} - \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu}$ an Stelle von $\frac{\mu}{\mu+\nu}$, $\frac{\nu}{\mu+\nu}$ schreibt, wo $\varepsilon_{\mu\nu}$ eine positive oder negative Zahl mit einem absoluten Betrage < 1 ist:

$$\begin{aligned} \sqrt[\mu+\nu]{a_{\mu\nu} x_i^\mu y_i^\nu} &= \left(\frac{x_i}{x_s}\right)^{\frac{\mu}{\mu+\nu}} \cdot \left(\frac{y_i}{y_s}\right)^{\frac{\nu}{\mu+\nu}} \cdot \varepsilon \\ &= \left(\frac{x_i}{x_s}\right)^{\vartheta_1^{(s)}} \cdot \left(\frac{y_i}{y_s}\right)^{\vartheta_2^{(s)}} \cdot \left(\frac{x_i}{x_s}\right)^{\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu}} \cdot \left(\frac{y_i}{y_s}\right)^{-\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu}}. \end{aligned} \tag{65}$$

Das Produkt der ersten beiden Faktoren bleibt stets $\leqq 1$, da nach Voraussetzung der Punkt x_i, y_i nicht oberhalb der W-Kurve

$$x^{\vartheta_1^{(s)}} \cdot y^{\vartheta_2^{(s)}} = x_s^{\vartheta_1^{(s)}} \cdot y_s^{\vartheta_2^{(s)}}$$

liegen darf. Solange jede der Zahlen x_s, y_s größer als Null und unter einer endlichen Schranke bleibt, strebt das Produkt der beiden letzten Faktoren, weil $\lim_{\mu+\nu=\infty} \frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu+\nu} = 0$ ist, der Zahl 1 zu; es bleibt nur die Frage nach dem Verhalten dieser Faktoren offen für solche Zahlen x_s, y_s, die für $\lim \mu+\nu=\infty$ den Grenzwert 0 oder ∞ besitzen. Da aber nach dem p. 295 Bemerkten das Unendlichwerden einer Koordinate das Verschwinden der anderen nach sich zieht, so sind nur mehr die beiden Möglichkeiten $\lim_{\mu+\nu=\infty} x_s = 0$ und $\lim_{\mu+\nu=\infty} y_s = 0$ ins Auge zu fassen und wegen der vollkommenen Symmetrie in den beiden Variabeln genügt es, die beiden letzten Faktoren von (65) für solche Werte von x_s weiter zu betrachten, die kleiner als x_i sind und der Null zustreben. Dann ist auch $y_s \geqq y_i$ und also

$$\frac{x_i}{x_s} \cdot \frac{y_s}{y_i} > 1. \tag{66}$$

Zu den hier allein in Betracht kommenden hinreichend kleinen Werten von x_s gehören Zahlenpaare $\vartheta_1^{(s)}, \vartheta_2^{(s)}$, die den Ungleichungen genügen:

$$\vartheta_1^{(s)} - \vartheta_1 < \varepsilon; \quad \vartheta_2 - \vartheta_2^{(s)} < \varepsilon; \tag{67}$$

(denn $\lim_{x_s=0} \vartheta_1^{(s)} = \vartheta_1$ wegen der bewiesenen monotonen Zunahme von $\vartheta_1(x)$ vgl. p. 299). Die zugehörigen Zahlen $\varepsilon_{\mu\nu}$ sind daher wegen (62) durchweg negativ oder Null und das Produkt der beiden letzten Faktoren auf der rechten Seite von (66): $\left(\frac{x_i}{x_s} \cdot \frac{y_s}{y_i}\right)^{\varepsilon_{\mu\nu}(\mu+\nu)}$ ist immer kleiner als 1, höchstens gleich 1 (vgl. (66)).

Die Identität der Kurven $\Phi(x, y) = 0$, die stetige und nach vorwärts stetig differenzierbare Lösungen der Differentialungleichung (41) sind, mit den Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien $\varphi(x, y) = 0$ ist damit bewiesen.

§ 2.

Die folgenden sich auf den Fall von n Variabeln beziehenden, aber nur für $n = 3$ ausgesprochenen Resultate werden, soweit sie sich auf gleiche Weise wie im Falle $n = 2$ beweisen lassen, ohne Beweis angegeben; auch wird von geometrischen Vorstellungen ausgiebiger Gebrauch gemacht, doch nur von solchen, die sich ohne Schwierigkeit in die Sprache der Analysis übersetzen lassen, wenn auch diese Übertragung nicht immer bis ins einzelne durchgeführt wird.

Ist eine Potenzreihe dreier Veränderlicher

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2, x_3) = \sum_0^\infty {}_{\mu\nu\varrho} a_{\mu\nu\varrho} x_1^\mu x_2^\nu x_3^\varrho \tag{1}$$

vorgelegt, so sind zusammengehörige Konvergenzradien r_1, r_2, r_3 durch die Beziehung

$$\lim_{\mu+\nu+\varrho=\infty} \sqrt[\mu+\nu+\varrho]{|a_{\mu\nu\varrho}| r_1^\mu r_2^\nu r_3^\varrho} = 1 \tag{2}$$

charakterisiert. Die Gesamtheit der Punkte $x = r_1$, $y = r_2$, $z = r_3$ möge als Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ oder $z = \psi(x, y)$ bezeichnet werden; zu jedem Punkte $P = (r_1, r_2, r_3)$ derselben werden analog wie p. 291 die zugehörigen Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ definiert, zwischen denen die Identität

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 = 1 \tag{3}$$

besteht, und die W-Flächen $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} z^{\vartheta_3} = r_1^{\vartheta_1} r_2^{\vartheta_2} r_3^{\vartheta_3}$ gebildet; der Punkt P heißt dann von jedem der zugehörigen Zahlentripel abhängig. Es empfiehlt sich $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ als homogene Dreieckskoordinaten zu deuten und zwar als nach dem Innern des Dreiecks positiv gerechnete Abstände von den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Für die vorliegende Untersuchung kommen nur positive Werte von $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ in Betracht; die Punkte mit diesen Koordinaten erfüllen nach den gemachten Festsetzungen

das Innere und die Begrenzung des Koordinatendreiecks. Auf die Ableitung der vielen projektiven Eigenschaften der W-Flächen, die sich aus dieser Darstellung ergeben, gehe ich nicht ein, da dieselben den Zielen dieser Arbeit zu fern liegen und zum größten Teil bekannt sein dürften.

Die zu einem Punkte r_1, r_2, r_3 gehörigen Zahlentripel bilden eine endliche oder eine abgeschlossen unendliche Punktmenge, was man genau so erschließt, wie p. 293 geschehen (I. Hilfssatz).

Auch gilt in gleicher Weise wie bei zwei Veränderlichen der Satz (II. Hilfssatz):

Gehört das Tripel $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ *nicht* zum Punkte r_1, r_2, r_3, so ist auch eine gewisse Umgebung dieses Punktes von $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ *unabhängig*.

Schließlich besteht auch jetzt wieder der Hauptsatz:

Kein Punkt von $\varphi(x, y, z) = 0$ kann oberhalb irgend einer zu einem anderen Punkt gehörigen W-Fläche liegen.

Aus dem Bisherigen folgt dann, daß in der Umgebung irgend eines Punktes r_1, r_2, r_3 jeder der drei Konvergenzradien eine stetige Funktion der beiden anderen ist, wenn nur keine Koordinate der zu r_1, r_2, r_3 gehörigen Punkte $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ den Wert Null hat, d. h. wenn kein zu r_1, r_2, r_3 gehöriger Punkt $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ auf der Begrenzung des Koordinatendreiecks liegt. Ist dagegen beispielsweise $\vartheta_3 = 0$ $(\vartheta_1 + \vartheta_2 = 1)$, so liegt die vom Punkt r_1, r_2, r_3 auf die xy-Ebene gefällte Senkrechte bis zu ihrem Schnittpunkt mit dieser Ebene ganz auf der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$; ist auch noch $\vartheta_2 = 0$ $(\vartheta_1 = 1, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ ein Eckpunkt des Koordinatendreiecks), so gehört der Fläche der zusammengehörigen Konvergenzradien das ganze in der Ebene $x = r_1$ gelegene von den Schnittgeraden mit den Ebenen $y = 0$, $y = r_2$, $z = 0$, $z = r_3$ begrenzte Rechteck an.

Während die Übertragung der Stetigkeitseigenschaften der Kurven $\varphi(x, y) = 0$ eine fast unmittelbare war, findet das gleiche bei den Tangentialeigenschaften nicht mehr statt. Die Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ aus wurden durch die beiden zugehörigen *extremen*, d. h. mit den Maximal- und Minimalwerten von ϑ_1, ϑ_2 gebildeten W-Kurven angezeigt. Wenn also nunmehr zu einem Punkte P der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ mehr als eine W-Fläche gehört, so handelt es sich um die Frage: *Welche von diesen W-Flächen sind als extreme zu bezeichnen?*

Gehört zum Punkte P nur *ein* Zahlentripel $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, so leuchtet auf Grund ähnlicher Schlüsse, wie sie p. 297 ff. gemacht wurden, ein, daß die Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ im Punkte r_1, r_2, r_3 die nämliche Tangentialebene besitzt wie die W-Fläche:

$$x^{\vartheta_1} \cdot y^{\vartheta_2} \cdot z^{\vartheta_3} = r_1^{\vartheta_1} \cdot r_2^{\vartheta_2} \cdot r_3^{\vartheta_3}, \tag{4}$$

nämlich die Ebene

$$\frac{\vartheta_1}{r_1}(x-r_1)+\frac{\vartheta_2}{r_2}(y-r_2)+\frac{\vartheta_3}{r_3}(z-r_3)=0. \tag{5}$$

Dieser durch r_1, r_2, r_3 gehenden Ebene soll ebenso gut wie der W-Fläche (4) in der ϑ-Ebene der Punkt ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 zugeordnet werden; ebenso werde jede andere den Punkt P enthaltende Ebene durch Vermittelung der W-Fläche, deren Tangentialebene sie ist, durch einen Punkt der ϑ-Ebene repräsentiert. Diese gegenseitige Zuordnung ist eine projektive; einer Punktreihe der ϑ-Ebene entspricht ein dazu projektives Ebenenbüschel, dessen Achse durch den Punkt r_1, r_2, r_3 hindurchgeht. Den in der vorliegenden Untersuchung allein eine Rolle spielenden Punkten im Innern des Koordinatendreiecks entsprechen solche Ebenen, welche die x-, y- und z-Achse in Punkten mit nur positiven Koordinaten schneiden.

Gehören zum Punkte r_1, r_2, r_3 *zwei* W-Flächen, so hat die Fläche $\varphi(x, y, z)=0$ in P eine Kante und wird von den beiden W-Flächen berührt. Die letzteren durchsetzen einander längs einer sich ins Unendliche erstreckenden Kurve, und es kann von jeder der beiden W-Flächen das Stück als nicht existierend betrachtet werden, das ganz oberhalb der anderen verläuft.

Durch die gemeinsame Schnittkurve der zwei W-Flächen

$$x^{\vartheta_1^{(1)}}\cdot y^{\vartheta_2^{(1)}}\cdot z^{\vartheta_3^{(1)}}=r_1^{\vartheta_1^{(1)}}\cdot r_2^{\vartheta_2^{(1)}}\cdot r_3^{\vartheta_3^{(1)}} \tag{6}$$

und

$$x^{\vartheta_1^{(2)}}\cdot y^{\vartheta_2^{(2)}}\cdot z^{\vartheta_3^{(2)}}=r_1^{\vartheta_1^{(2)}}\cdot r_2^{\vartheta_2^{(2)}}\cdot r_3^{\vartheta_3^{(2)}} \tag{7}$$

gehen noch unzählig viele andere W-Flächen, deren Exponenten $\vartheta_1^{(3)}, \vartheta_2^{(3)}, \vartheta_3^{(3)}$ bestimmt sind durch

$$\vartheta_i^{(3)}=\frac{\vartheta_i^{(1)}+\lambda\vartheta_i^{(2)}}{1+\lambda}\quad(i=1,2,3;\ -\infty<\lambda<+\infty). \tag{8}$$

Man zeigt dies, indem man die Gleichung (6) in die Potenz mit dem Exponenten $\frac{1}{1+\lambda}$, die Gleichung (7) in die Potenz mit dem Exponenten $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ erhebt und dann die beiden Gleichungen multipliziert.

Die durch (8) definierten Punkte $\vartheta_1^{(3)}, \vartheta_2^{(3)}, \vartheta_3^{(3)}$ erfüllen die durch $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$ und $\vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(2)}, \vartheta_3^{(2)}$ gehende Gerade; den Schnittpunkten der letzteren mit den Seiten des Koordinatendreiecks entsprechen in Zylinder ausartende W-Flächen, deren senkrechte ebene Schnitte W-Kurven sind. Eine dritte zum Punkte r_1, r_2, r_3 gehörige W-Fläche, deren repräsentierender Punkt auf der endlichen Strecke zwischen $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$ und $\vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(2)}, \vartheta_3^{(2)}$ liegt, verläuft auch stets (von der gemeinsamen Schnittkurve abgesehen) *zwischen* den W-Flächen (6) und (7), d. h. oberhalb der einen

und unterhalb der anderen, wie aus der Stetigkeit der benutzten projektiven Beziehung folgt, kann also *keine extreme* sein.

Es ist daher erlaubt, ohne daß die extremen W-Flächen des Punktes r_1, r_2, r_3 *verändert würden, dem letzteren, außer den ohnehin zugehörigen Tripeln* $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ *auch alle jene Punkte der* ϑ*-Ebene zuzuordnen, die durch geradlinige Verbindung zweier von vornherein zugehöriger oder schon neu zugeordneter Punkte entstehen.* (Im Falle zweier Variabler findet dies sein Analogon darin, daß als zum Punkte r_1, r_2 gehörig alle zwischen $\vartheta_1(r_1)$, $\vartheta_2(r_1)$ und $\vartheta_1(r_1)$, $\vartheta_2(r_1)$ gelegenen Wertepaare betrachtet werden dürfen.)

Gehören z. B. zum Punkte r_1, r_2, r_3 *drei* Punkte: $\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}$; $\vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(2)}, \vartheta_3^{(2)}$; $\vartheta_1^{(3)}, \vartheta_2^{(3)}, \vartheta_3^{(3)}$, welche ein Dreieck bilden, so sind zuerst die Seiten dieses Dreiecks, sodann aber auch alle inneren Punkte hinzuzunehmen.

Um nun den allgemeinen Fall ins Auge zu fassen, denke ich mir die Menge der zu r_1, r_2, r_3 gehörigen Punkte $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ (die zunächst irgend eine abgeschlossene Menge sein kann) auf die bezeichnete Weise ergänzt und die so erhaltene *perfekt zusammenhängende* Menge mit M bezeichnet. Ich zeige dann:

Die Menge M *besteht aus dem Innern einer geschlossenen, nirgends konkaven, stetigen, differenzierbaren Kurve* C*, sowie aus den Punkten von* C *selbst.*

Die Punkte von C *sind die Repräsentanten der zum Punkte* r_1, r_2, r_3 *gehörigen extremen W-Flächen oder* — worauf es bei der Untersuchung der Umgebung des Punktes r_1, r_2, r_3 hauptsächlich ankommt — *der Tangentialebenen jener W-Flächen.*

Diese Ebenen bilden einen Kegel, der im Punkte r_1, r_2, r_3 *die Fläche* $\varphi(x, y, z) = 0$ *berührt.*

Schneidet man diesen Kegel durch eine Ebene, welche nicht durch r_1, r_2, r_3 hindurchgeht und, wenn sie parallel zu sich selbst bis zum Punkte r_1, r_2, r_3 verschoben würde, den Kegel in keiner reellen Geraden schneiden würde — eine Ebene, wie die letztere, wird durch einen im Innern von C gelegenen Punkt repräsentirt —, *so entsteht eine Schnittkurve* C'*, die der Kurve* C *dualistisch projektiv ist und daher alle oben erwähnten Eigenschaften derselben besitzt (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Konvexität).*

Um vor allem die behaupteten Eigenschaften der Kurve C nachzuweisen, setze man voraus, daß nicht alle zu r_1, r_2, r_3 gehörigen Zahlentripel eine Gerade erfüllen, da ja diese Möglichkeit schon besprochen ist; es existieren also jedenfalls *drei* zu M gehörige Punkte G, H, K, die ein *Dreieck* bilden, von welchem dann sämtliche Punkte der Menge M zuzuzählen sind. Ein beliebiger innerer Punkt O dieses Dreiecks werde zum Mittelpunkt eines Polarkoordinatensystems r, ϑ gemacht; der Strahl $\vartheta = 0$ kann noch beliebig gewählt werden, ebenso die Richtung der

wachsenden ϑ, letztere etwa so, daß der sich drehende Strahl über H und K nach G gelangt. Auf jedem Strahle $\vartheta = \varepsilon$ gibt es einen entferntesten Punkt A_ε der Menge M, dessen Entfernung vom Punkte O durch die Funktion $r(\vartheta)$ dargestellt werde; um die Stetigkeit der Kurve C nachzuweisen, ist nach den bisherigen Festsetzungen nur zu zeigen, daß $\lim_{\varepsilon=0} r(\varepsilon) = r(0)$ oder, anders ausgedrückt, daß $\lim_{\varepsilon=0} A_\varepsilon = A_0$ ist. Es darf dabei noch angenommen werden, daß der Strahl $\vartheta = 0$ nicht durch ein Eck des Dreiecks geht, sondern etwa die Seite GH in einem von G und H verschiedenen Punkte trifft. Andernfalls ließe sich dies durch erlaubte Abänderung (Verkleinerung) des Dreiecks erreichen. Auch darf $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt werden, da das Beweisverfahren für $\varepsilon < 0$ das gleiche bleibt.

Wäre dann $\overline{\lim_{\varepsilon=0}} r(\varepsilon) > r(0)$, so gäbe es Punkte A_ε, so daß A_0 ganz *innerhalb* des Dreiecks $GA_\varepsilon O$ zu liegen käme; alle Punkte dieses Dreiecks wären aber der Menge M zuzuzählen und der Punkt A_0 wäre entgegen der Voraussetzung nicht der äußerste des Strahles $\vartheta = 0$. Wäre aber $\underline{\lim}_{\varepsilon=0} r(\varepsilon) < r(0)$, so gäbe es Punkte A_ε *innerhalb* des Dreiecks $A_0 HO$, die ebenfalls entgegen der Voraussetzung *nicht äußerste* der zugehörigen Strahlen $\vartheta = \varepsilon$ sein könnten.

Um nun auch die Existenz von $\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_+$ und $\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_-$ einzusehen, beachte man, daß der Strahl $A_0 A_\varepsilon$ mit $A_0 O$ immer größere Winkel bildet, wenn die positive Zahl ε der Null zustrebt (es folgt dies daraus, daß jeder Punkt des Dreiecks $A_0 A_\varepsilon O$ der Menge M angehört); andererseits bleibt der Winkel $A_\varepsilon A_0 O$ stets kleiner als π, so daß also der Strahl $A_0 A_\varepsilon$ einer bestimmten Grenzlage zustrebt, in welcher er die Kurve C berührt. Eine zweite Tangente findet man in gleicher Weise, wenn man von negativen ε ausgeht.

Die beiden Tangenten können *eine* Gerade bilden; wenn nicht, ist die Summe der Winkel, die sie mit $A_0 O$ bilden, kleiner als π. Andernfalls nämlich würde die Gerade OA_0 die Seite $A_\varepsilon A_{-\varepsilon}$, eines Dreiecks $A_\varepsilon A_0 A_{-\varepsilon}$, in einem Punkte B treffen, der von O eine größere Entfernung als A_0 hätte, woraus wieder folgen würde, daß A_0 nicht der äußerste Punkt des Strahles $\vartheta = 0$ wäre.

Da das Innere *jedes* innerhalb C gelegenen *Dreiecks* der Menge M angehört, so gilt das gleiche von *allen* innerhalb C gelegenen Punkten.

Fallen die beiden Tangenten in einem Punkte A von C nicht zusammen und bilden sie also einen Winkel $< \pi$, so empfiehlt es sich, alle durch A gehenden Geraden, die mit der Menge M nur den Punkt A gemein haben, auch als Tangenten der Kurve C im Punkte A zu betrachten.

Dann sind von jedem Punkte außerhalb C an C zwei Tangenten möglich, welche die Geraden, die C in zwei Punkten schneiden, von jenen trennen, die C gar nicht schneiden.

Die Ausführung des Beweises, daß der erwähnte der Kurve C projektive Kegel mit der Spitze im Punkte r_1, r_1, r_3 die Fläche $\varphi(x,y,z)=0$ berührt, dürfte nicht angebracht sein, da einerseits dem gleichen Gedankengang, wie er im Falle zweier Veränderlicher eingeschlagen wurde, keine wesentlichen Hindernisse mehr entgegenstehen, andererseits aber die Durchführung desselben ohne weitläufige Entwicklungen nicht möglich ist, die zu den durchsichtigen geometrischen Betrachtungen in keinem Verhältnis stehen.

Die nähere Diskussion des Tangentenkegels gestaltet sich am einfachsten unter Zugrundelegung der oben erwähnten geschlossenen nirgends konkaven stetigen und differenzierbaren Schnittkurve C', die der Kurve C dualistisch projektiv ist. Einer Ecke von C entspricht ein geradliniges Stück von C' und umgekehrt. Den Punkten innerhalb C entsprechen die Geraden, die C' nicht schneiden, den Punkten außerhalb C die Geraden, die mit C' zwei Punkte gemein haben, den Tangenten von jenen Punkten aus an C die Schnittpunkte dieser Geraden mit C'. Ist insbesondere C n^{ter} Ordnung, so ist C' n^{ter} Klasse und umgekehrt.

Nachdem so das Verhalten der Fläche $\varphi(x,y,z)=0$ in der Umgebung eines beliebigen Punktes klargestellt ist, handelt es sich darum, über den Verlauf dieser Fläche im ganzen einiges zu sagen. Das Wesentliche hierüber ist in der Aussage des Hauptsatzes p. 309 enthalten und es kann sich nur um eine genauere Analyse oder wenigstens um eine Umschreibung desselben handeln, analog der im vorigen Paragraphen bewiesenen Aussage der monotonen Abnahme von $\vartheta_1(x)$. Aus dem Hauptsatze ergibt sich sofort:

Ein innerer Punkt der zum Punkte P gehörigen Menge M kann nicht Element einer zu einem andern Punkte P' von $\varphi(x,y,z)=0$ gehörigen Menge M' sein.

Von dem Punkte P der Fläche $\varphi(x,y,z)=0$ geht man zu unendlich benachbarten Punkten P_ε über, indem man um unendlich kleine Stücke auf einer bestimmten Erzeugenden des Tangentialkegels oder — was das gleiche ist — auf der zugehörigen Schnittkurve zweier extremer benachbarter W-Flächen fortschreitet. Diese Schnittkurve ist durch die Tangente t der Kurve C in einem Punkte A repräsentiert. Die Mengen M_ε, welche zu Punkten P_ε gehören, die in der gewählten Richtung dem Punkte P benachbart sind, liegen, wie aus dem soeben erwähnten Satze hervorgeht, auf der andern Seite der Tangente t als C. Rückt der Punkt P_ε gegen P, so konvergieren die zugehörigen Mengen M_ε gegen A (nach dem II. Hilfssatz).

Während im ersten Paragraphen das einfachste und in analytischer Hinsicht auch erschöpfende (wenn auch nicht direkt anschauliche) Bild der gegenseitigen Abhängigkeit der beiden Konvergenzradien durch die beliebige monoton zunehmende Funktion $\vartheta_1(x)$ vermittelt wurde, die völlig genügt zur Bestimmung von $\varphi(x, y) = 0$, wenn von dieser Kurve nur noch ein Punkt gegeben ist, entsprechen dem hier die den einzelnen Punkten von $\varphi(x, y, z) = 0$ zugeordneten nirgends konkaven einander ausschließenden, zum Teil auf Punkte zusammenschrumpfenden Kurven C.

Ob sich trotzdem die gefundenen Stetigkeits- und Tangentialeigenschaften der Flächen $\varphi(x, y, z) = 0$ samt der durch den Hauptsatz ausgedrückten Eigenschaft in ähnlicher einfacher Weise analytisch formulieren lassen, wie es bei den Kurven $\varphi(x, y) = 0$ durch die Differentialungleichung (41) geschah, bleibt ununtersucht.

Jedenfalls aber lassen sich zu jeder Fläche $\Phi(x, y, z) = 0$, welche diese für die Flächen der zusammengehörigen Konvergenzradien als notwendig erkannten Eigenschaften besitzt, auch jetzt wieder unzählig viele Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1, x_2, x_3)$ konstruieren, für welche $\Phi(x, y, z) = 0$ Fläche der zusammengehörigen Konvergenzradien ist. Um dies auszuführen, leite man aus der Kenntnis des Tangentenkegels in jedem Punkte r_1, r_2, r_3 die zugehörige Menge M ab, dann bringe man die Punkte r_1, r_2 der xy-Ebene mit rationalen Koordinaten in eine Reihe mit Ausnahme derer, die von Begrenzungspunkten des Koordinatendreiecks in der ϑ-Ebene abhängen, und ordne jedem dieser Punkte den eindeutig bestimmten zugehörigen Wert von r_3 sowie *einen willkürlichen* Punkt ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 der zugehörigen Menge M zu. Der Fortgang des Verfahrens ist dann dem am Ende des vorigen Paragraphen auseinandergesetzten völlig entsprechend.

§ 3.

Nachdem in den beiden vorhergehenden Paragraphen die gegenseitige Abhängigkeit der zusammengehörigen Konvergenzradien klargestellt wurde, besteht nunmehr die Aufgabe, aus den gefundenen reihentheoretischen Sätzen Schlüsse zu ziehen über die Gesetze, die zwischen den Singularitäten von Funktionen mehrerer Veränderlicher bestehen. Alle Ausführungen, die sich in dieser Beziehung machen lassen, sind schließlich eine Folge des folgenden bekannten *Fundamentalsatzes*, den ich, wie alle Aussagen dieses Paragraphen, nur für zwei Veränderliche ausspreche:

Sind r_1, r_2 ein Paar zusammengehöriger Konvergenzradien der Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$, so verhält sich die durch letztere definierte analytische Funktion $F(x_1, x_2)$ regulär im Gebiete $|x_1| < r_1$, $|x_2| < r_2$, hat aber mindestens eine singuläre Stelle $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, für welche $|\bar{x}_1| = r_1$, $|\bar{x}| = r_2$ ist.

Es kann sich im folgenden nur darum handeln, auf Grund dieses Satzes, des Prinzips der analytischen Fortsetzung und der Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphen sowie unter besonderen Voraussetzungen über die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ genauere Beziehungen zwischen den Singularitäten zu finden.

Zuvor aber soll gezeigt werden, daß stets — wie auch die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ unter Befriedigung der im ersten Paragraphen als notwendig und hinreichend erkannten Bedingungen gewählt sein mag — *sämtliche* Punkte $x_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $x_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ singuläre Punkte von $F(x_1, x_2)$ sein können, wofern nur r_1, r_2 irgend zwei zusammengehörige Konvergenzradien und φ_1 sowie φ_2 beliebige reelle Zahlen sind. Die Funktion $F(x_1, x_2)$ gestattet dann überhaupt keine Fortsetzung über einen Punkt der Kreise mit den Radien r_1, r_2 hieraus und wird durch $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ vollständig dargestellt.

Im Interesse der Kürze des Ausdrucks nenne ich in diesem Falle die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ eine natürliche Grenze der Funktion $F(x_1 x_2)$.

Um den Nachweis jener Möglichkeit zu führen, beweise ich zunächst folgenden Hilfssatz:

Die nach Diagonalen geordnete und in jeder Diagonale höchstens einen von Null verschiedenen Koeffizienten aufweisende Potenzreihe:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty{}_k\, a_{n_k} x_1^\mu x_2^\nu, \quad \mu + \nu = n_k$$

hat die zugehörige Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zur natürlichen Grenze, wenn

$$(2) \qquad \lim_{k=\infty} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} \geq \lambda > 0$$

ist; d. h. also: sind r_1, r_2 zusammengehörige Konvergenzradien und φ_1, φ_2 zwei beliebige reelle Zahlen und wird

$$\bar{x}_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \bar{x}_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

gesetzt, so ist zu zeigen, daß der Punkt $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ singulärer Punkt von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ist. Es darf und soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 1$ ist; ist dies von vornherein nicht der Fall, so läßt es sich durch die Transformation $\frac{x_1}{\bar{x}_1}\, x_1$; $\frac{x_2}{\bar{x}_2}\, x_2$ erreichen; setzt man dann

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(\xi_1^m + \xi_1^{m+1}) \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(\xi_2^m + \xi_2^{m+1}), \end{aligned}$$

so entsteht aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ eine für $|\xi_1^m + \xi_1^{m+1}| < 2$, $|\xi_2^m + \xi_2^{m+1}| < 2$ regu-

läre analytische Funktion von ξ_1, ξ_2, die also jedenfalls für $|\xi_1| < 1$, $|\xi_2| < 1$ in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2) = \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} A_{\mu\nu} \xi_1^\mu \xi_2^\nu \tag{4}$$

entwickelt werden kann.

Konvergiert diese Potenzreihe nicht auch für ein Wertepaar ξ_1, ξ_2 absolut, für welches $|\xi_1| > 1$, $|\xi_2| > 1$ ist, so sind folgende 4 Fälle denkbar:

1. $\bar{\xi}_1 = e^{\varphi_1 i}$, $\bar{\xi}_2 = e^{\varphi_2 i}$, wo weder φ_1 noch φ_2 ein Multiplum von 2π ist, ist ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2)$. Dann wäre auch der Punkt $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, wo $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}(\bar{\xi}_1^m + \bar{\xi}_1^{m+1})$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{2}(\bar{\xi}_2^m + \bar{\xi}_2^{m+1})$, ein singulärer für $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$; dies ist aber nicht möglich, da sich $|\bar{x}_1| < 1$, $|\bar{x}_2| < 1$ ergibt. Mithin kann dieser erste Fall überhaupt nicht eintreten.

2. $\bar{\xi}_1 = 1$, $\bar{\xi}_2 = e^{\varphi_2 i}$ ist singulär (φ_2 kein Multiplum von 2π). Dann hat die Funktion $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ eine singuläre Stelle $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, für welche

$$|\bar{x}_1| = 1, \quad |\bar{x}_2| < 1$$

ist; nach einem weiter unten (p. 320) nochmals zu benutzenden und bei der Gelegenheit samt Beweis anzuführenden Satze des Herrn Hartogs sind dann sämtliche Punkte $x_1 = 1$, $|x_2| < 1$ und als Häufungsstelle insbesondere auch der Punkt $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ singulär.

3. $\bar{\xi}_1 = e^{\varphi_1 i}$ $(\varphi_1 + 2k\pi)$, $\bar{\xi}_2 = 1$ ist ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2)$; dann schließt man wie unter Nr. 2, daß $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ist.

4. $\bar{\xi}_1 = 1$, $\bar{\xi}_2 = 1$ ist singulär; dann ist für $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}(\bar{\xi}_1^m + \bar{\xi}_1^{m+1}) = 1, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(\bar{\xi}_2^m + \bar{\xi}_2^{m+1}) = 1$$

singulär.

Aus der Aufzählung dieser vier Fälle ersieht man folgendes:

Soll der Punkt $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ für $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ kein singulärer sein, so muß $\mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2)$ noch für Werte ξ_1, ξ_2 absolut konvergieren, für welche $|\xi_1| > 1$, $|\xi_2| > 1$ ist; es muß dann also

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \sqrt[\mu+\nu]{|A_{\mu\nu}|} < 1 \tag{5}$$

sein.

Gelingt es daher nachzuweisen, daß dieser obere Limes für die aus (1) abgeleitete Reihe $\mathfrak{P}_1(\xi_1, \xi_2)$ *gleich* 1 ist, so ist damit gezeigt, daß $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ein singulärer Punkt von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ist und damit zugleich, daß die der Bedingung (2) genügende Reihe (1) die zugehörige Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zur natürlichen Grenze hat.

Den Koeffizienten A_{MN} erhält man als Funktion der $a_{\mu\nu}$, indem man $a_{\mu\nu} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu+\nu} (\xi_1^m + \xi_1^{m+1})^\mu (\xi_2^m + \xi_2^{m+1})^\nu$ nach Potenzen von ξ_1 und ξ_2 entwickelt und die Potenzen mit gleichen Exponenten durch Addition vereinigt; man sieht sofort, daß A_{MN} nur von jenen $a_{\mu\nu}$ abhängt, deren Indizes μ, ν den beiden Ungleichungen

$$(6) \qquad \text{a)} \quad \frac{M}{m+1} \leqq \mu \leqq \frac{M}{m} \qquad \text{b)} \quad \frac{N}{m+1} \leqq \nu \leqq \frac{N}{m}$$

genügen; setzt man wieder $\mu + \nu = n_k$, $a_{\mu\nu} = a_{n_k}$, so folgt aus den beiden Ungleichungen (6) durch Addition

$$(7) \qquad \frac{M+N}{m+1} \leqq n_k \leqq \frac{M+N}{m}.$$

Hängt also A_{MN} von a_{n_k} und $a_{n_{k+1}}$ ab, so ist jedenfalls

$$(8) \qquad n_{k+1} - n_k < \frac{M+N}{m} - \frac{M+N}{m+1} = \frac{M+N}{m(m+1)}$$

und mit Benutzung von (7) erhält man

$$(8') \qquad \frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} \leqq \frac{1}{m}.$$

Wählt man nun $m > \frac{1}{\lambda}$, so stehen die Ungleichungen (2) und (8') miteinander in Widerspruch; es kann danach A_{MN} höchstens von *einem* Koeffizienten a_{n_k} abhängen und muß somit von der Form $C \cdot a_{n_k}$ sein, wo die positive Konstante C von den a_{n_k} unabhängig ist. $\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|A_{\mu\nu}|}$ hat daher den gleichen Wert, ob man von der Reihe

$$\sum_0^\infty{}_k a_{n_k} x^\mu y^\nu \quad (n_k = \mu + \nu)$$

oder von derjenigen ausgeht, in welcher alle a_{n_k} durch ihre absoluten Beträge ersetzt sind; die durch letztere Reihe dargestellte Funktion hat bekanntlich*) sicher die singuläre Stelle $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, mithin die aus ihr durch die Transformation (3) abgeleitete die singuläre Stelle $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$; es ist also $\overline{\lim_{\mu+\nu=\infty}} \sqrt[\mu+\nu]{|A_{\mu\nu}|} = 1$ und nicht < 1.

Nachdem somit der Hilfssatz**) bewiesen ist, bleibt nur zu zeigen,

*) Biermann, Math. Ann. 48 (1897).

**) Die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ ist sogar dann schon natürliche Grenze, wenn nur $\lim_{k=\infty} n_{k+1} - n_k = \infty$ ist und in noch allgemeineren Fällen: es läßt sich dies, wenn

daß zu jeder möglichen Kurve zusammengehöriger Konvergenzradien $\varphi(x, y) = 0$ (unendlich viele) Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty a_{n_k} x_1^\mu x_2^\nu$ existieren, für die $n_k = \mu + \nu$ und

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} \geq 1 \tag{9}$$

ist (zur Verminderung der Unbestimmtheit ist $\lambda = 1$ gesetzt).

In der $\mu\nu$-Ebene denke man sich die Geraden g_σ mit den Gleichungen $\mu + \nu = 2^\sigma$ $(\sigma = 1, 2, 3, \cdots)$ gezogen und bezeichne das von g_σ, $g_{\sigma+1}$ und den Koordinatenachsen begrenzte Trapez mit T_σ. Am Ende des § 1 wurden der dort mit $\vartheta_1^{(1)}$ bezeichneten Zahl unendlich viele Gitterpunkte μ, ν zugeordnet, deren Koordinaten den Ungleichungen (53), bezw. (55), (57) unterworfen wurden. Man erhält immer noch *unendlich viele* zu $\vartheta_1^{(1)}$ gehörige $a_{\mu,\nu}$ — und hierauf kommt es allein an — wenn man jene Gitterpunkte noch weiter dadurch beschränkt, daß man verlangt, sie sollen nur in solchen Trapezen T_σ liegen, für die $\sigma \equiv 2 \pmod 4$ ist, und zwar soll in jedes Trapez höchstens *ein* Gitterpunkt zu liegen kommen. Von den Trapezen T_σ, wo $\sigma \equiv 0 \pmod 4$ also $\sigma = 4\sigma_1$ ist, weise man den zu $\vartheta_1^{(2)}$ gehörigen Gitterpunkten diejenigen zu, für welche σ_1 ungerade ist, und es darf wieder wie auch im folgenden von jedem Trapez höchstens ein Punkt μ, ν benutzt werden. Der Zahl $\vartheta_1^{(3)}$ werden von den übrig gebliebenen Trapezen diejenigen zugewiesen, für die $\sigma = 8\sigma_2$ und σ_2 ungerade ist, während die mit geradem σ_2 für die $\vartheta_1^{(4)}\vartheta_1^{(5)}\cdots$ zu reservieren sind, und zwar in Fortgang des Verfahrens so, daß jedem $\vartheta_1^{(k)}$ unendlich viele Trapeze zugewiesen sind. Die sodann nach der am Ende des ersten Paragraphen auseinandergesetzten Methode gebildete Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$, für welche die vorgelegte Kurve $\varphi(x, y) = 0$ den Zusammenhang der Konvergenzradien darstellt, hat diese Kurve zur natürlichen Grenze. Denn schreibt man — wie erlaubt ist, da in jeder Diagonale höchstens *ein* Koeffizient vorhanden ist —

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^\infty a_{n_k} x_1^\mu x_2^\nu \quad (\mu + \nu = n_k),$$

und liegt irgend ein Index n_k zwischen 2^σ und $2^{\sigma+1}$, so ist $n_{k+1} > 2^{\sigma+2}$, weil die Trapeze mit *ungeraden* Indizes ganz ausgelassen wurden, so daß

$$\frac{n_{k+1} - n_k}{n_k} > \frac{2^{\sigma+2} - 2^{\sigma+1}}{2^{\sigma+1}} = 1$$

wird.

man von dem bewiesenen Hilfssatze ausgeht, auf dieselbe Weise beweisen, wie ich es Münch. Ber. 34 (1904), p. 63—74 für *eine* Variable getan habe.

Nach dem Hilfssatze ist daher $\varphi(x, y) = 0$ natürliche Grenze von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$.

Wenn $\varphi(x, y) = 0$ natürliche Grenze von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ und ξ_1, ξ_2 irgend ein Punkt regulären Verhaltens dieser Funktion ist, so erhält man die zu der aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ abgeleiteten Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$ gehörige Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien als dasjenige Stück von $\varphi(x, y) = 0$, das im Gebiete $x > |\xi_1|$, $y > |\xi_2|$ liegt.

Ist dagegen eine analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ möglich und betrachtet man alle Punkte η_1, η_2, für welche $|\eta_1| = |\xi_1|$, $|\eta_2| = |\xi_2|$ ist, so können die Kurven zusammengehöriger Konvergenzradien der aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ abgeleiteten Potenzreihen $\mathfrak{P}(x_1 - \eta_1, x_2 - \eta_2)$ nicht durchweg aus dem bezeichneten Stücke der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ bestehen, sondern müssen teilweise oberhalb (natürlich nirgends unterhalb) dieses Kurvenstückes verlaufen. Die den unendlich vielen Kombinationen von η_1, η_2 entsprechenden Kurven haben, wie leicht ersichtlich, jenes Stück von $\varphi(x, y) = 0$ zur Enveloppe, so daß das letztere in jedem Punkte von mindestens einer der erwähnten Kurven berührt wird.

Nur im Falle, daß die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ ganz oder teilweise aus einer W-Kurve besteht, gelingt es mir das vollständige funktionentheoretische Äquivalent dieser geometrischen Tatsache durch folgendes *Theorem* auszudrücken:

Besteht die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ für $r_1^{(1)} < x < r_1^{(2)}$, $r_2^{(1)} > y > r_2^{(2)}$ aus der W-Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = r_1^{(1)\vartheta_1} r_2^{(1)\vartheta_2} \left(= r_1^{(2)\vartheta_1} r_2^{(2)\vartheta_2}\right)$ und ist $r_1^{(3)}$, $r_2^{(3)}$ irgend ein von $r_1^{(1)}$, $r_2^{(1)}$ und $r_1^{(2)}$, $r_2^{(2)}$ verschiedener Punkt dieser Kurve und

$$\bar{x}_1 = r_1^{(3)}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \bar{x}_2 = r_2^{(3)}(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

ein (nach dem Fundamentalsatze sicher existierender) singulärer Punkt der durch $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ definierten analytischen Funktion $F(x_1, x_2)$, so sind auch sämtliche $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, die der Ungleichung

$$r_2^{(1)} > |x_2| > r_2^{(2)} \tag{10}$$

und der Gleichung

$$x_1 = \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2^{\alpha}}{\bar{x}_2^{\alpha}}, \tag{11}$$

wo $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \alpha$ gesetzt ist, genügen, singuläre Punkte dieser Funktion.

Für ausartende W-Kurven, d. h. für Gerade $x = \text{const.}$ oder $y = \text{const.}$ hat schon Herr Hartogs*) den Satz bewiesen; auf den Hartogsschen Satz ist p. 316 bezug genommen worden und auf ihn wird sich auch der Beweis des soeben ausgesprochenen allgemeineren Satzes stützen; es sei

*) Inauguraldissert. p. 59.

daher gestattet, den Hartogsschen Satz samt einem etwas abgeänderten Beweise hier anzuführen:

Besteht die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zwischen den Geraden $y = 0$ und $y = r_2$ aus der Geraden $x = R_1$ und besitzt $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ die singuläre Stelle $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, für welche $\bar{x}_1 = R_1$, $\bar{x}_2 < r_2$ ist, so sind auch sämtliche Stellen $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, für welche $\bar{x}_2 < r_2$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_1$ ist, singuläre.

Beweis: In der x-Ebene konstruiere man einen Kreis K_1, der innerhalb des Kreises $x_1 = R_1$ liegt und letzteren im Punkte $x_1 = \bar{x}_1$ berührt. Ist ξ_1 der Mittelpunkt dieses Kreises, so konvergiert die aus $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ abgeleitete Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x_1 - \xi_1, x_2)$ absolut für

$$|x_1 - \xi_1| < R_1 - |\xi_1|, \quad |x_2| < r_2$$

und divergiert absolut (wegen des singulären Punktes $\bar{x}_1, \bar{x}_2$) für alle x_1, x_2, die den Ungleichungen

$$|x_1 - \xi_1| > R_1 - |\xi_1|, \quad |x_2| > |\bar{x}_2|$$

genügen.

Die zu $\mathfrak{P}_1(x_1 - \xi_1, x_2)$ gehörige Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien $y = \psi(x)$ erleidet daher an der Stelle $x = R_1 - |\xi_1|$ eine Unstetigkeit, besteht demnach zwischen $y = 0$ und $y = r_2$ aus der Geraden $x = R_1 - |\xi_1|$. Aus dem Fundamentalsatze folgt dann, daß es singuläre Punkte $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ gibt, für welche $|\bar{x}_1 - \xi_1| = R_1 - |\xi_1|$ ist, während $|\bar{x}_2|$ noch jeden Wert $< r_2$ haben kann; für alle diese singulären Punkte muß aber $\bar{x}_1 = \bar{x}_1$ sein, da jeder von $\bar{x}_1$ verschiedene Punkt des Kreises K_1, mit jedem Punkte x_2, dessen absoluter Betrag unterhalb r_2 liegt, zusammengenommen, innerhalb des Konvergenzgebietes der ursprünglichen Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ liegt. Insbesondere folgt, daß der Punkt $\bar{x}_1, 0$ ein singulärer Punkt ist.

Jede aus $\mathfrak{P}(x_1 - \xi_1)$ abgeleitete Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$, wo $|\xi_2| = \frac{r}{2} - \varepsilon$ und $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$ ist, konvergiert absolut für

$$|x_1 - \xi_1| < R_1 - |\xi_1|, \qquad |x_2 - \xi_2| < \tfrac{r_2}{2} + \varepsilon,$$

divergiert aber absolut (wegen der singulären Stelle $\bar{x}_1, 0$) für alle x_1, x_2, welche den Ungleichungen

$$|x_1 - \xi_1| > R_1 - |\xi_1|, \qquad |x_2 - \xi_2| > \tfrac{r}{2} - \varepsilon$$

genügen.

Die zu $\mathfrak{P}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$ gehörige Kurve $y = \psi(x)$ erleidet demnach an der Stelle $x = R_1 - |\xi_1|$ eine Unstetigkeit, was nur möglich ist, wenn sie zum Teil aus der Geraden $x = R_1 - |\xi_1|$ besteht. Wie oben bezüglich des Punktes $\bar{x}_1, 0$ schließt man hier, daß $\bar{x}_1, \xi_2$ ein singulärer Punkt ist, wobei von ξ_2 nur vorausgesetzt wurde, daß es dem absoluten Betrage

nach $< \frac{r_2}{2}$ ist. Durch wiederholte Anwendung des gleichen Schlußverfahrens läßt sich diese Voraussetzung nacheinander auf

$$|\xi_2| < \frac{3r_2}{4}, \quad |\xi_2| < \frac{7r_2}{8}, \cdots, \quad |\xi_2| < \frac{(2^n-1)r_2}{2^n}, \cdots$$

endlich auf $|\xi_2| \leqq r_2$ ausdehnen, womit der Hartogssche Satz bewiesen ist.

Es sei nun eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ vorgelegt, für welche die Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien im Gebiete $r_1^{(1)} < x < r_1^{(2)}$, $r_2^{(1)} > y > r_2^{(2)}$ aus der W-Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = r_1^{(1)\vartheta_1} r_2^{(1)\vartheta_2} \left(= r_1^{(2)\vartheta_1} r_2^{(2)\vartheta_2}\right)$ besteht, und für welche $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ein singulärer Punkt ist, wobei

$$\bar{x}_1 = r_1^{(3)}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad \bar{x}_2 = r_2^{(3)}(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

ist und der Punkt $x = r_1^{(3)}$, $y = r_2^{(3)}$ auf dem angegebenen W-Kurvenstücke liegt. Es soll gezeigt werden, daß sämtliche Punkte $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, welche die Ungleichung

$$r_2^{(1)} > |\bar{x}_2| > r_2^{(2)}$$

und die Gleichung

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2^{\alpha}}{\bar{x}_2^{\alpha}}$$

befriedigen $\left(\alpha = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)$, singuläre Punkte für $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ sind.

Zum Beweise mache ich die Transformation:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 x_2^{\alpha} \\ \xi_2 &= x_2, \end{aligned} \tag{12}$$

welche aufgelöst ergibt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \xi_2^{-\alpha} \\ x_2 &= \xi_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Danach geht

$$\mathfrak{P}(x_1, x_2) = \sum_0^{\infty} {}^{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_1^{\mu} x_2^{\nu}$$

über in

$$\mathfrak{S}(\xi_1, \xi_2) = \sum_0^{\infty} {}^{\mu\nu} a_{\mu\nu} \xi_1^{\mu} \xi_2^{\nu - \alpha\mu}. \tag{14}$$

Zu der Reihe auf der rechten Seite von (14) gehört in der xy-Ebene ein Gebiet S von der Art, daß (14) für $|\xi_1| = x$, $|\xi_2| = y$ *absolut* konvergiert, wenn x, y in S liegt. Die Begrenzung von S entsteht, wie man sich leicht überzeugt, aus der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ durch die Transformation: $xy^{\alpha} \,|\, x, y \,|\, y$. Zur Begrenzung von S gehört daher u. a. das Stück der Geraden $x = r_1^{(1)} r_2^{(1)\alpha} \left(= r_1^{(2)} r_2^{(2)\alpha}\right)$, soweit es zwischen den Geraden $y = r_2^{(2)}$ und $y = r_2^{(1)}$ liegt. Die Funktion $\mathfrak{S}(\xi_1, \xi_2)$ ist — wie sich durch Anwendung des Weierstraßschen Doppelreihensatzes ergibt — regulär

(aber wegen der möglicherweise nicht ganzzahligen Potenzen von ξ_2 nicht notwendig eindeutig) im Gebiete: $\xi_1 < r_1^{(1)} r_2^{(1)\alpha}$, $r_2^{(1)} > |\xi_2| > r_2^{(2)}$. Ferner hat diese Funktion die singulären Stellen $\bar{\xi}_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2^{\alpha}$, $\bar{\xi}_2 = \bar{x}_2$ (wobei zu den möglicherweise verschiedenen und bei irrationalem α sogar unendlich vielen Werten von $\bar{\xi}_1$ jedesmal ein Wert $\bar{\xi}_2$ gehört, der in einem anderen Blatte der über der ξ_2-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche der Funktion ξ_2^{α} zu denken ist

Denn es gilt allgemein der Hilfssatz:

Abgesehen von den Null- und Unendlichkeitswerten von x_1, x_2; ξ_1, ξ_2 entspricht jedem regulären Punkte x_1, x_2 von $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ein regulärer Punkt ξ_1, ξ_2 der transformierten Funktion $\mathfrak{S}(\xi_1, \xi_2)$, einem singulären wieder ein singulärer und umgekehrt.

Entsprechen einander nämlich die Wertepaare x_1', x_2' und $\xi_1', \xi_2'(= x_2')$ und ist keine dieser vier Zahlen Null oder ∞, so ist $x_1 - x_1'$ eine in einem gewissen Bereiche konvergente Potenzreihe von $\xi_1 - \xi_1'$, $\xi_2 - \xi_2'$ ohne konstantes Glied, ebenso $\xi_1 - \xi_1' = \mathfrak{P}(x_1 - x_1', x_2 - x_2')$. Läßt sich also an der betrachteten Stelle eine Funktion nach Potenzen von $x_1 - x_1'$, $x_2 - x_2'$ entwickeln, so gestattet die transformierte Funktion eine Entwicklung nach Potenzen von $\xi_1 - \xi_1'$, $\xi_2 - \xi_2'$ und umgekehrt.

Es sei nun ξ_2' eine komplexe Zahl vom absoluten Betrage $\frac{r_2^{(1)} + r_2^{(2)}}{2}$ und es sei ξ_2' außerdem so gewählt, daß die zusammen mit $\bar{\xi}_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2^{\alpha}$*) einen singulären Punkt von (14) darstellende Zahl $\bar{\xi}_2$ im Innern des Kreises K_2 mit der Gleichung: $|\xi_2 - \xi_2'| = \frac{r_2^{(1)} - r_2^{(2)}}{2}$ liegt. Die Funktion $\mathfrak{S}(\xi_1, \xi_2)$ läßt sich in eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen von ξ_1 und $\xi_2 - \xi_2'$ entwickeln; dieselbe konvergiert absolut für $|\xi_1| < r_1^{(1)} r_2^{(1)\alpha} = |\bar{\xi}_1|$, $|\xi_2 - \xi_2'| < \frac{r_2^{(1)} - r_2^{(2)}}{2}$, da nach dem oben Bemerkten die Punkte ξ_1, ξ_2, deren Koordinaten diesen Ungleichungen genügen, sämtlich regulär sind; andrerseits aber ist, wie schon hervorgehoben wurde, $\xi_1 = \bar{\xi}_1$, $\xi_2 = \bar{\xi}_2$ ein singulärer Punkt und für denselben ist $|\bar{\xi}_1| = r_1^{(1)} r_2^{(1)\alpha}$, $|\bar{\xi}_2| < \frac{r_2^{(1)} - r_2^{(2)}}{2}$; daher sind nach dem Hartogsschen Satze sämtliche Punkte $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ singuläre, wenn nur ξ_2 innerhalb K_2 liegt, wobei von dem Kreise K_2 nur vorauszusetzen war, daß er im Gebiete $r_2^{(1)} > |\xi_2| > r_2^{(2)}$ liegt und den Punkt $\bar{\xi}_2$ in seinem Innern enthält. Irgend ein anderer innerer Punkt von K_2 kann nun an Stelle von $\bar{\xi}_2$ treten, und man findet so fortschließend, indem man

*) Ist α nicht ganzzahlig, so verstehe man unter $\bar{\xi}_1$ irgend einen Wert der rechten Seite.

das ganze Gebiet $r_2^{(1)} > |\xi_2| > r_2^{(2)}$ mit Kreisen überdeckt, daß sämtliche Punkte $\bar{\xi}_1$, ξ_2 singuläre sind, wenn nur ξ_2 in dem bezeichneten Gebiete liegt. Nach dem Hilfssatze (p. 322) sind dann auch alle Punkte $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ singuläre, wenn sie den Beziehungen:

$$r_2^{(1)} > |\bar{x}_2| > r_0^{(2)}, \quad \bar{x}_1 = \left(\frac{\bar{\xi}_1}{\bar{x}_2^{\alpha}} =\right) \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2^{\alpha}}{\bar{x}_2^{\alpha}}$$

genügen.

Ist α gleich dem irreduzibelen Bruche $\frac{p}{q}$, so gehören zu jeder Zahl $\bar{x}_2$, deren absoluter Betrag zwischen $r_2^{(2)}$ und $r_2^{(1)}$ liegt, mindestens q Zahlen $\bar{\bar{x}}_1$ von gleichem absoluten Betrag, mit denen zusammen $\bar{\bar{x}}_2$ einen singulären Punkt bildet, während in gleicher Weise jeder Zahl $\bar{\bar{x}}_1$, für welche $r_1^{(1)} < |\bar{\bar{x}}_1| < r_1^{(2)}$ ist, p Werte $\bar{\bar{x}}_2$ entsprechen.

Ist aber das Verhältnis $\vartheta_1 : \vartheta_2$ irrational, so entsprechen jeder der obigen Zahlen $\bar{\bar{x}}_2$ unendlich viele $\bar{\bar{x}}_1$, die auf einem Kreise der x_1-Ebene überall dicht liegen, und umgekehrt. Die Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$ ist daher über die Kreise $|x_1| = r_1$, $|x_2| = r_2$ nicht fortsetzbar, wenn der Punkt r_1, r_2 auf dem mehrfach erwähnten W-Kurvenstück liegt. Man hat somit den Satz:

Die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ ist stets natürliche Grenze der zugehörigen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2)$, soweit sie aus einer W-Kurve $x^{\vartheta_1} y^{\vartheta_2} = \text{const.}$ mit irrationalem Verhältnis $\vartheta_1 : \vartheta_2$ besteht.

Legt man statt einer nach Potenzen von x_1, x_2 eine nach Potenzen gewisser Funktionen von x_1, x_2 fortschreitende Reihe zugrunde, beispielsweise eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1 + x_2, x_1^2 - x_2')$ und konvergiert diese für

$$|x_1 + x_2| < x, \quad |x_1^2 - x_2^2| < y,$$

aber nicht für größere x, y absolut, solange x, y den folgenden Gleichungen und Ungleichungen genügen:

$$xy^{\alpha} = r_1^{(1)} r_2^{(1)\alpha} = r_1^{(2)} r_2^{(2)\alpha}; \quad r_1^{(1)} < x < r_1^{(2)}; \quad r_2^{(1)} > y > r_2^{(2)},$$

so gibt es mindestens ein Zahlenpaar $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ der Art, daß sämtliche Punkte $\bar{\bar{x}}_1$, $\bar{\bar{x}}_2$, welche die Relationen

$$r_2^{(1)} > |\bar{\bar{x}}_1^2 - \bar{\bar{x}}_2^2| > r_2^{(2)}; \quad \bar{\bar{x}}_1 + \bar{\bar{x}}_2 = \frac{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(x_1^2 - \bar{x}_2^2)^{\alpha}}{(\bar{x}_1^2 - \bar{\bar{x}}_2^2)^{\alpha}}$$

erfüllen, singuläre Punkte der durch $\mathfrak{P}(x_1 + x_2, x_1^2 - x_2^2)$ dargestellten analytischen Funktion sind.

Durch die vorhergehenden Untersuchungen ist in *reihentheoretischer* Hinsicht die gegenseitige Abhängigkeit der zusammengehörigen Konvergenzradien völlig klargelegt, womit zugleich sämtliche Kontinua gefunden sind, die als Gebiete absoluter Konvergenz von Potenzreihen möglich sind; dagegen sind die erhaltenen spezielleren *funktionentheoretischen* Resultate von der Art der im vorhergehenden abgeleiteten nur vereinzelt und eine Menge interessanter hier anknüpfender Fragen bleibt noch zu erledigen; z. B.:

Gehören zu jeder *analytischen* Kurve $\varphi(x, y) = 0$ analytische Funktionen $\Phi(x_1, x_2) = 0$, derart daß eine analytische Funktion, deren singuläre Stellen x_1, x_2 der Gleichung $\Phi(x_1, x_2) = 0$ genügen, die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ zur Kurve der zusammengehörigen Konvergenzradien hat? In besonderen Fällen ist dies klar: Der Annahme $\varphi(x, y) = x + y - 1$, entsprechen die Funktionen $\Phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1$, $\Phi(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - 1$ etc.

Es kann andrerseits vorkommen, daß ein *Stück* einer solchen analytischen Kurve der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ angehört, ohne daß der Schluß auf die Existenz einer Singularitätengleichung $\Phi(x_1, x_2) = 0$ für die zugehörige Potenzreihe erlaubt wäre: Unterdrückt man z. B. in der Potenzreihe für $\frac{1}{1-(x_1+x_2)}$ alle Terme $a_{\mu,\nu} x_1^\mu x_2^\nu$, für welche $\mu > \nu$ ist, so besteht die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ für $0 < x < \frac{1}{2}$ aus der Geraden $x + y = 1$, setzt sich dagegen für $x > \frac{1}{2}$ in der Hyperbel $xy = \frac{1}{4}$ fort. Es fragt sich, ob in diesem Falle die Gerade und die Hyperbel (oder die Gerade allein) natürliche Grenzen sind.

Endlich: Ist die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ eine natürliche Grenze, wenn sie *nicht analytisch* ist?

Traunstein und Würzburg, im Oktober und November 1904.

Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In der Theorie der automorphen Funktionen einer komplexen Variabeln, wie sie in den klassischen Untersuchungen von Klein und Poincaré*) vorliegt, ist bekanntlich der Begriff des Fundamentalbereiches von grundlegender Bedeutung. Der Fundamentalbereich spielt in dieser Theorie dieselbe Rolle, welche in der Theorie der elliptischen Funktionen dem Periodenparallelogramm zukommt.

Derselbe Begriff findet sich in der Theorie der automorphen Funktionen mehrerer Variabeln wieder und tritt auch in den bezüglichen älteren Untersuchungen von Picard und den neueren von Wirtinger und Blumenthal**) hervor.

Als ich mich gegen Ende des Jahres 1900 mit den automorphen Funktionen beschäftigte, stellte ich mir unter anderem die Aufgabe, eine allgemeine Methode zur Konstruktion des Fundamentalbereiches einer gegebenen Gruppe aufzustellen. Indem ich meine damaligen Untersuchungen in den folgenden Zeilen darlege, hoffe ich für diesen wichtigen Punkt der allgemeinen Theorie der automorphen Funktionen eine einfache und sichere Grundlage zu liefern.***).

*) Eine zusammenhängende, in vielen wesentlichen Punkten von Herrn R. Fricke ergänzte Darstellung der Theorie enthält das umfangreiche Werk: „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen" von R. Fricke und F. Klein. (Leipzig 1897.)

**) Die bezüglichen Arbeiten von Picard finden sich in den Acta mathematica, Bdde. I, II, V.

W. Wirtinger, Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen, Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 108 (1899).

O. Blumenthal, Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. Diese Annalen, Bdde. 56, 58.

***) Die Resultate der vorliegenden Arbeit habe ich in einem Vortrage, datiert

§ 1.

Bezeichnungen.

Zunächst stelle ich hier einige abkürzende Bezeichnungen zusammen, deren ich mich in der Folge bediene.

Ein System von n in bestimmter Reihenfolge gegebenen endlichen Werten

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{1}$$

werde ein (analytischer) *Punkt* genannt. Die Werte selbst heißen die *Koordinaten* des Punktes. Unter einem „*reellen*" Punkte soll ein solcher verstanden werden, dessen n Koordinaten reelle Werte besitzen. Die Gesamtheit aller Punkte (1) bildet den „*Raum* $[n]$". Den Teilbereich dieses Raumes, welcher durch die reellen Punkte (1) gebildet wird, werde ich meistens mit $\mathfrak{R}[n]$ bezeichnen und denselben auch später als „*reellen*" Raum $\mathfrak{R}[n]$ charakterisieren. Der Raum [1] ist also nichts anderes als die komplexe Zahlenebene, der reelle Raum $\mathfrak{R}[1]$ die in der Zahlenebene liegende Achse der reellen Zahlen.

Bezeichnet S ein quadratisches Schema von n^2 Größen

$$S = \begin{pmatrix} s_{11}, & s_{12}, & \cdots, & s_{1n} \\ \vdots & & & \\ s_{n1}, & s_{n2}, & \cdots, & s_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

oder kürzer

$$S = (s_{\alpha\beta}), \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n) \tag{2'}$$

so soll die symbolische Gleichung

$$y = Sx \tag{3}$$

bedeuten, daß die Koordinaten $y_1, y_2, \cdots, y_n$ des Punktes y mit den Koordinaten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des Punktes x durch die Gleichungen

$$y_\alpha = s_{\alpha 1}x_1 + s_{\alpha 2}x_2 + \cdots + s_{\alpha n}x_n \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

verbunden sind. Die *eine* Gleichung (3) steht also für die n Gleichungen (4), welche bei festgehaltenen Werten der Koeffizienten $s_{\alpha\beta}$ und variabel gedachten Werten von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ eine homogene lineare Substitution definieren. Diese Substitution werde ebenfalls mit S bezeichnet. Übrigens verwende ich die in der Theorie der linearen Substitutionen allgemein

---

vom 8. August 1904, dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg eingesandt. Der Vortrag wurde jedoch nicht in die Kongreßverhandlungen aufgenommen, da ich verhindert war, persönlich an dem Kongreß teilzunehmen. Auf die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit bezieht sich auch das Zitat p. 344 meines Aufsatzes vom September 1903 über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, diese Annalen Bd. 58.

üblichen Bezeichnungen. Sind beispielsweise X und Y ebenso wie S lineare Substitutionen, so bedeutet die Gleichung

$$Y = SX, \tag{5}$$

daß Y durch Zusammensetzung aus S und X entsteht. Die Gleichung (5) vertritt n^2 Gleichungen, welche ihrerseits offenbar eine lineare Substitution bei n^2 Variabeln darstellen, wenn man die n^2 Koeffizienten von S als fest, die n^2 Koeffizienten von X als variabel ansieht. Diese Auffassung der Gleichung (5) spielt im folgenden eine hervorragende Rolle. Deshalb möge hier eine nähere Betrachtung der n^2 in Rede stehenden Gleichungen Platz finden.

Das in der α^{ten} Horizontal- und der β^{ten} Vertikalreihe von X stehende Element heiße $x_{\alpha\beta}$, so daß

$$X = (x_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n) \tag{6}$$

ist. Entsprechend sei

$$Y = (y_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n). \tag{7}$$

Man hat dann vermöge (5)

$$y_{\alpha\beta} = s_{\alpha 1} x_{1\beta} + s_{\alpha 2} x_{2\beta} + \cdots + s_{\alpha n} x_{n\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n). \tag{8}$$

Betrachtet man daher für einen festen Wert von β die Größen

$$x_{1\beta}, x_{2\beta}, \cdots, x_{n\beta} \quad \text{bez.} \quad y_{1\beta}, y_{2\beta}, \cdots, y_{n\beta}$$

als Koordinaten eines Punktes $x^{(\beta)}$ bez. $y^{(\beta)}$, so ist die Gleichung (5) gleichbedeutend mit den n Gleichungen

$$y^{(1)} = Sx^{(1)}, \; y^{(2)} = Sx^{(2)}, \cdots, y^{(n)} = Sx^{(n)}. \tag{9}$$

Wenn man also von der auf n Variable bezüglichen Substitution (3) zu der auf n^2 Variable bezüglichen Substitution (5) übergeht, so bedeutet dieses, daß man die Substitution (3) auf n simultan betrachtete Punkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$ anwendet.

Die n^2 Koeffizienten einer Substitution S denke ich mir in eine beliebige, aber fest gewählte Reihenfolge gebracht. Sie bilden dann die Koordinaten eines bestimmten Punktes im Raume $[n^2]$. Diesen Punkt bezeichne ich stets mit demselben Buchstaben, wie die betreffende Substitution. Ferner nenne ich den Raum $[n^2]$, sofern seine Punkte zur Darstellung der Substitutionen S dienen, den *Substitutionenraum*. In diesem Raume sind zwei algebraische Gebilde besonders zu beachten, denen ich die Namen *„Grundgebilde“* bez. *„singuläres Gebilde“* gebe.

Das *Grundgebilde* ist der Ort derjenigen Punkte, welche die unimodularen Substitutionen, d. h. die Substitutionen von der Determinante 1, darstellen. Auf ihm liegt insbesondere der *„Einheitspunkt“*, welcher der identischen Substitution 1 entspricht, d. i. derjenigen Substitution

$$(\delta_{\alpha\beta}), \tag{10}$$

deren Elemente die Werte

$$\delta_{\alpha\alpha} = 1, \quad \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \text{ verschieden von } \beta)$$

besitzen.

Das *singuläre* Gebilde ist der Ort derjenigen Punkte, welche die Substitutionen von der Determinante Null repräsentieren. Zu jedem Punkte S, der nicht auf dem singulären Gebilde liegt, gehört ein bestimmter Punkt S^{-1}, der Repräsentant der zu S inversen Substitution.

Die Darstellung der Substitutionen S durch die Punkte des Raumes $[n^2]$ dient vor allem zur Erleichterung der Ausdrucksweise. Sie erhält aber zugleich auch die für meine Untersuchungen wesentliche Vorstellung wach, daß man sich bei der Betrachtung der linearen homogenen Substitutionen in einem Gebiete von n^2 unabhängig veränderlichen Größen bewegt.

Mit den großen griechischen Buchstaben werde ich Gruppen linearer Substitutionen bezeichnen. Von den Substitutionen einer solchen Gruppe Γ setze ich stets, wenn ich nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerke, voraus, daß sie ganz, homogen und unimodular sind. Die hierin liegende Beschränkung ist insofern unwesentlich, als sich das Studium jeder Gruppe, deren Elemente beliebige ganze oder gebrochene, homogene oder inhomogene lineare Substitutionen sind, auf das einer Gruppe von der genannten besonderen Beschaffenheit zurückführen läßt.

Liegt eine Gruppe Γ bei n Variabeln vor, so kann man in mannigfaltiger Weise eine Gruppe Γ' bei n' Variabeln konstruieren, die zu Γ isomorph ist. Eine jede solche Gruppe Γ' heiße eine *„Darstellung"* der Gruppe Γ bei n' Variabeln oder auch im Raume $[n']$.

Ordnet man z. B. jeder Substitution (3) bei n Variabeln die Substitution (5) bei n^2 Variabeln zu und durchläuft die Substitution (3) alle Elemente einer Gruppe Γ, so durchläuft die Substitution (5) alle Elemente einer Gruppe Γ', die eine Darstellung von Γ im Substitutionenraume vorstellt.*)

Was den Begriff der *„infinitesimalen"* Substitution betrifft, so werde ich denselben in folgendem Sinne gebrauchen. Von einem unendlichen Systeme von linearen homogenen Substitutionen (2) soll gesagt werden, es enthalte infinitesimale Substitutionen, wenn sich in demselben solche von der identischen verschiedene Substitutionen befinden, deren Koeffizienten sich von denen der identischen Substitution um beliebig wenig unterscheiden. Infinitesimale Substitutionen sind also dann und nur dann

*) Mannigfaltige Beispiele sind meiner Arbeit „Zur Invariantentheorie", diese Annalen Bd. 45, zu entnehmen.

vorhanden, wenn sich innerhalb des unendlichen Systemes von Substitutionen die n^2 Ungleichungen

$$|s_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}| < \varepsilon \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n)$$

befriedigen lassen, ohne daß durchgängig $s_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ist. Dabei bezeichnet ε eine beliebig klein vorgeschriebene positive Zahl.

§ 2.

Positive quadratische Formen.

Um den Gang der Untersuchung später nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich in diesem und dem folgenden Paragraphen einige Hilfssätze voraus. Die Sätze des gegenwärtigen Paragraphen sind zwar wohlbekannt. Trotzdem möchte ich dieselben hier anführen, teils der Vollständigkeit wegen, teils um ihnen diejenige Form zu geben, in welcher ich sie weiterhin verwende.

Der Punkt x mit den Koordinaten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sei in dem reellen Raume $\mathfrak{R}[n]$ frei veränderlich. Ferner sei

$$H(x) = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n;\ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}) \tag{1}$$

eine quadratische Form der Koordinaten von x mit reellen Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$.

Für den Punkt $x = 0$, d. h. für denjenigen Punkt, dessen Koordinaten sämtlich Null sind, hat die quadratische Form den Wert Null. Wenn nun für jeden andern Punkt x der zugehörige Wert $H(x)$ positiv ist, so heißt die quadratische Form bekanntlich *positiv*.

Eine positive Form $H(x)$ läßt sich stets, und zwar nur auf *eine* Weise, in die Jacobische Gestalt

$$\begin{aligned} H(x) = {} & p_1(x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 + \cdots + t_{1n}x_n)^2 \\ & + p_2(x_2 + t_{23}x_3 + t_{24}x_4 + \cdots + t_{2n}x_n)^2 \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + p_{n-1}(x_{n-1} + t_{n-1,n}x_n)^2 \\ & + p_n x_n^2 \end{aligned} \tag{2}$$

bringen. Dabei bedeuten die p_α positive, die $t_{\alpha\beta}$ reelle Zahlen.

Nimmt man umgekehrt die Zahlen p_α als beliebige positive, die Zahlen $t_{\alpha\beta}$ als beliebige reelle Zahlen an, und bildet mit ihnen nach Gleichung (2) die Form $H(x)$, so ist letztere eine positive Form.

Ich denke mir nun die positive quadratische Form (1) beliebig aber bestimmt angenommen und bezeichne dann zur Abkürzung den Wert $H(x)$, welchen die Form in dem Punkt x des Raumes $\mathfrak{R}[n]$ besitzt, als die „*Höhe*“ des Punktes x, die Form $H(x)$ selbst aber als „*Höhenform*“.

Die Höhe verschwindet im Punkte $x = 0$, hat aber für jeden andern Punkt einen positiven Wert.

Soll nun der Punkt x eine Höhe besitzen, welche kleiner ist als eine fest gegebene positive Zahl G, so muß, wie die Gleichung (2) erkennen läßt, der absolute Betrag jeder einzelnen Koordinate des Punktes x unter einer bestimmten positiven Grenze liegen, die sich aus G leicht berechnen läßt. Um diese Tatsache bequem aussprechen zu können, führe ich folgende Redewendung ein: Es liege ein bestimmtes System von Punkten in dem Raume $\mathfrak{R}[n]$ (oder auch im Raume $[n]$) vor. Das Punktsystem heiße dann *„ganz im Endlichen liegend"*, wenn für jeden Punkt des Systems der absolute Betrag jeder einzelnen Koordinate unterhalb einer festen positiven Zahl liegt.

Demnach gilt der Satz:

Diejenigen Punkte x des Raumes $\mathfrak{R}[n]$, deren Höhen unterhalb einer gegebenen positiven Zahl G liegen, die also der Bedingung

$$H(x) < G$$

*genügen, bilden ein ganz im Endlichen liegendes Punktsystem.**)

Die Umkehrung dieses Satzes ist evident:

Liegt ein Punktsystem des Raumes $\mathfrak{R}[n]$ ganz im Endlichen, so gibt es eine positive Zahl G von der Eigenschaft, daß die Ungleichung

$$H(x) < G$$

für jeden Punkt x des Punktsystems gilt.

Die $\frac{n(n+1)}{2}$ Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ einer quadratischen Form (1) bilden — in eine beliebige, aber bestimmte Reihenfolge gebracht — die Koordinaten eines Punktes im Raume $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$. Diesen Raum nenne ich, sofern seine Punkte zur Darstellung der quadratischen Formen dienen, den *„Raum der quadratischen Formen"*.

Der Teilbereich dieses Raumes, welcher die reellen quadratischen Formen darstellt, ist nach früheren Festsetzungen mit $\mathfrak{R}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ zu bezeichnen. Innerhalb des letzteren bilden wieder diejenigen Punkte, welche den *positiven* quadratischen Formen entsprechen, einen Teilbereich, welchen ich mit $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ bezeichnen und den *„Raum der positiven quadratischen Formen"* nennen will. Die in der Gleichung (2) auftretenden Zahlen

*) Dieser Satz ist ein spezieller Fall des folgenden: Die Punkte x, deren Koordinaten einer reellen algebraischen Ungleichung $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) < 0$ genügen, bilden ein ganz im Endlichen liegendes Punktsystem, wenn die Glieder höchster Dimension auf der linken Seite der Ungleichung eine positive Form der Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_n$ bilden. Vgl. C. Jordan, Cours d'Analyse t. I, pag. 304 (Paris 1893).

(3) $$p_1, p_2, \cdots, p_n, t_{12}, \cdots, t_{n-1,n}$$

sind die Koordinaten eines bestimmten Punktes im Raume $\mathfrak{R}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$. Vermöge der Darstellung (2) der positiven quadratischen Formen (1) wird daher der Raum $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ eindeutig umkehrbar und stetig auf denjenigen Teil des Raumes $\mathfrak{R}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ abgebildet, welcher durch die Ungleichungen

$$p_1 > 0, \; p_2 > 0, \cdots, p_n > 0$$

bestimmt ist. Diese Abbildung wird, beiläufig bemerkt, von Wichtigkeit für die Untersuchung der Konvergenz der auf den Fall beliebig vieler Variabeln verallgemeinerten Poincaréschen Reihen. Hierbei sind nämlich gewisse auf den Raum $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ auszudehnende vielfache Integrale zu betrachten, deren Berechnung durch die in Rede stehende Abbildung leicht ausgeführt werden kann.

Sind $H(x)$ und $H'(x)$ zwei positive Formen, so ist auch $\lambda H(x) + \lambda' H'(x)$ eine positive Form, wenn λ und λ' irgend zwei positive Zahlen bezeichnen. Betrachtet man daher irgend zwei Punkte $(a_{\alpha\beta})$ und $(a'_{\alpha\beta})$ im Raume $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$, so wird auch jeder Punkt

(4) $$(t a_{\alpha\beta} + (1-t) a'_{\alpha\beta}) \qquad (t = 0 \cdots 1)$$

diesem Raume angehören. Die Gesamtheit der Punkte (4) bildet die *„Verbindungsstrecke"* der Punkte $(a_{\alpha\beta})$ und $(a'_{\alpha\beta})$, und diese liegt also ganz in dem Raume $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

Den Begriff der Höhe, den ich oben für die Punkte des reellen Raumes $\mathfrak{R}[n]$ eingeführt habe, definiere ich nun auch für die Punkte des Raumes $[n]$. Sei x irgend ein Punkt dieses Raumes, so sind seine Koordinaten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ irgend welche komplexe Zahlen.

Als Höhe des Punktes könnte man nun den Wert einer beliebig fixierten positiven quadratischen Form der $2n$ reellen Komponenten der Koordinaten definieren. Indessen ist es zweckmäßiger den Begriff etwas enger zu fassen, indem man nur spezielle quadratische Formen benutzt, nämlich diejenigen, die unter dem Namen der Hermiteschen Formen bekannt sind.

Zur Abkürzung der Schreibweise setze ich fest, daß, wenn eine Zahl durch einen bestimmten Buchstaben bezeichnet worden ist, die konjugierte Zahl durch denselben Buchstaben mit Anhängung des oberen Index ^{0} angedeutet werden soll.

Die allgemeine Gestalt einer Hermiteschen Form der Koordinaten des Punktes x ist dann

$$(5) \qquad \mathsf{H}(x) = \Sigma\, a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta^0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n)$$

wobei die n^2 Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ der Bedingung unterworfen sind, daß $a_{\alpha\beta}$ konjugiert zu $a_{\beta\alpha}$, also

$$(6) \qquad a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta}^0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n)$$

sein soll. Infolge dieser Bedingung besitzt die Form $\mathsf{H}(x)$ ausschließlich reelle Werte.

Ihr Wert verschwindet für den Punkt $x = 0$. Ist für jeden anderen Punkt der Wert von $\mathsf{H}(x)$ positiv, so heißt $\mathsf{H}(x)$ selbst eine „positive Form". Eine positive Hermitesche Form (5) läßt sich, und zwar nur auf eine Weise, in die Gestalt

$$\begin{aligned}(7) \quad \mathsf{H}(x) = {} & p_1(x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n)(x_1^0 + t_{12}^0 x_2^0 + \cdots + t_{1n}^0 x_n^0) \\ & + p_2(x_2 + t_{23}x_3 + \cdots + t_{2n}x_n)(x_2^0 + t_{23}^0 x_3^0 + \cdots + t_{2n}^0 x_n^0) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + p_{n-1}(x_{n-1} + t_{n-1,n}x_n)(x_{n-1}^0 + t_{n-1,n}^0 x_n^0) \\ & + p_n x_n x_n^0\end{aligned}$$

bringen, unter $p_1, p_2, \cdots, p_n$ reelle positive, unter $t_{12}, \cdots, t_{n-1,n}$ bestimmte komplexe Zahlen verstanden. Nimmt man umgekehrt $p_1, p_2, \cdots, p_n$ reell und positiv, $t_{12}, \cdots, t_{n-1,n}$ aber als irgend welche komplexe Zahlen beliebig an und bildet dann nach Gleichung (7) die Hermitesche Form $\mathsf{H}(x)$, so ist letztere stets eine positive Form.

Nachdem nun eine positive Hermitesche Form $\mathsf{H}(x)$ beliebig fixiert ist, will ich den Wert, welchen diese Form in irgend einem Punkte x des Raumes $[n]$ besitzt, als die *„Höhe"* dieses Punktes, die Form $\mathsf{H}(x)$ selbst als *„Höhenform"* bezeichnen. Es gelten dann wieder die Sätze:

Diejenigen Punkte x des Raumes $[n]$, deren Höhen unterhalb einer gegebenen positiven Zahl G liegen, die also der Bedingung

$$\mathsf{H}(x) < G$$

genügen, bilden ein ganz im Endlichen liegendes Punktsystem.

Liegt ein Punktsystem des Raumes $[n]$ ganz im Endlichen, so gibt es eine positive Zahl G von der Beschaffenheit, daß die Ungleichung

$$\mathsf{H}(x) < G$$

für jeden Punkt x des Punktsystems gilt.

Die n^2 Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ einer Hermiteschen Form (5) bilden — in eine beliebige, aber bestimmte Reihenfolge gebracht — die Koordinaten eines Punktes im Raume $[n^2]$. Wegen der Bedingungen (6) macht aber die Gesamtheit der allen Hermiteschen Formen entsprechenden Punkte nur einen Teilbereich des Raumes $[n^2]$ aus. Dieser Teilbereich heißt der *„Raum der Hermiteschen Formen"*. Innerhalb desselben bilden diejenigen

Punkte, welche die *positiven* Hermiteschen Formen darstellen, ihrerseits einen Teilbereich, welchen ich mit $\mathfrak{P}[n^2]$ bezeichnen und den *„Raum der positiven Hermiteschen Formen"* nennen will. Vermöge der Darstellung (7) der positiven Hermiteschen Formen ist der Raum $\mathfrak{P}[n^2]$ eindeutig umkehrbar und stetig auf diejenigen Punkte

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, t_{12}, \cdots, t_{n-1,n}$$

eines Raumes $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ abgebildet, deren erste n Koordinaten $p_1, p_2, \cdots, p_n$ reell und positiv sind.

Der soeben eingeführten Darstellung der Hermiteschen Formen durch die Punkte des Raumes $[n^2]$ ist für manche Zwecke eine andere durch die Punkte des *reellen* Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$ vorzuziehen. Diese erhält man folgendermaßen:

Man setze, unter α und $\beta > \alpha$ zwei Indizes der Reihe $1, 2, \cdots, n$ verstanden,

$$a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + ic_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

wobei $b_{\alpha\beta}$ und $c_{\alpha\beta}$ reell sind. Die Hermitesche Form (5) ist dann, vermöge der Bedingungen (6), vollkommen bestimmt durch die n^2 reellen Zahlen

$$a_{11}, \cdots, a_{nn}, b_{12}, c_{12}, b_{13}, c_{13}, \cdots, b_{n-1,n}, c_{n-1,n}. \tag{9}$$

Diese bilden die Koordinaten eines bestimmten Punktes des reellen Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$, welcher Punkt als Repräsentant der Form (5) angenommen werden kann.

Wenn in dieser Weise der Raum $\mathfrak{R}[n^2]$ zur Darstellung der Hermiteschen Formen benutzt wird, so bilden diejenigen Punkte dieses Raumes, welche die positiven Hermiteschen Formen darstellen, einen Teilbereich von der Eigenschaft, daß die Verbindungsstrecke irgend zweier seiner Punkte ganz in ihm enthalten ist. Dies folgt wieder einfach aus der Tatsache, daß mit $\mathsf{H}(x)$ und $\mathsf{H}'(x)$ auch $\lambda\mathsf{H}(x) + \lambda'\mathsf{H}'(x)$ eine positive Hermitesche Form ist, unter λ und λ' irgend zwei positive Zahlen verstanden.

§ 3.

Ein Hilfssatz über Systeme algebraischer Gleichungen.

Der Punkt x mit den Koordinaten $x_1, x_2, \cdots, x_n$ werde auf den reellen Raum $\mathfrak{R}[n]$ eingeschränkt. Die Gesamtheit derjenigen Punkte, deren Koordinaten einer Gleichung der Gestalt

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

genügen, bildet eine „reelle algebraische Fläche", wenn $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

eine ganze rationale Funktion bezeichnet, die nicht identisch Null ist und reelle Koeffizienten besitzt. Ich beweise nun folgenden Satz:

Im Raume $\mathfrak{R}[n]$ *sei eine abzählbare Menge von reellen algebraischen Flächen gegeben. Dann findet sich in jeder noch so kleinen Umgebung eines beliebig fixierten Punktes* a *sicher ein von* a *verschiedener Punkt* a'*, durch welchen keine einzige jener Flächen hindurchgeht.*

Seien

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

die gegebenen Flächen und $a_1, a_2, \cdots, a_n$ die Koordinaten eines im Raume $\mathfrak{R}[n]$ beliebig fixierten Punktes a. Dann ist zu zeigen, daß die reellen Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ so bestimmt werden können, daß sie erstens nicht sämtlich Null sind, daß zweitens jede derselben absolut genommen kleiner als eine beliebig vorgeschriebene positive Größe ε ist, und daß drittens für jeden Index i

$$\varphi_i(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \cdots, a_n + \varepsilon_n)$$

von Null verschieden ist.

Man überzeugt sich sofort, daß im Falle $n = 1$ der zu beweisende Satz richtig ist, da sich in jedem Intervalle $a_1 < x_1 < a_1 + \varepsilon$ Zahlen $a_1 + \varepsilon_1$ befinden, die einer gegebenen abzählbaren Zahlenmenge nicht angehören. Beim Beweise des allgemeinen Satzes darf daher vorausgesetzt werden, daß $n > 1$ und der Satz für weniger als n Variable schon bewiesen sei. Ich setze nun

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 - a_1)^{\nu_i} \psi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

indem ich mit $(x_1 - a_1)^{\nu_i}$ die höchste Potenz von $x_1 - a_1$ bezeichne, die in $\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ aufgeht.

Unter den Funktionen

$$\psi_i(a_1, x_2, \cdots, x_n)$$

der $n - 1$ Variabeln $x_2, \cdots, x_n$ ist dann keine identisch Null. Folglich können die Zahlen $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ so bestimmt werden, daß jede derselben absolut genommen kleiner als ε ist und daß für jeden Index i

$$\psi_i(a_1, a_2 + \varepsilon_2, \cdots, a_n + \varepsilon_n)$$

von Null verschieden ist. Es werden dann

$$\varphi_i(x_1, a_2 + \varepsilon_2, \cdots, a_n + \varepsilon_n) = (x_1 - a_1)^{\nu_i} \psi_i(x_1, a_2 + \varepsilon_2, \cdots, a_n + \varepsilon_n)$$

Funktionen der einen Variabeln x_1 sein, von welchen keine einzige identisch Null ist. Daher kann man ε_1 von Null verschieden und absolut genommen kleiner als ε so wählen, daß für jeden Index i

$$\varphi_i(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \cdots, a_n + \varepsilon_n)$$

von Null verschieden ist. Hiermit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Unmittelbare Folgerungen aus diesem Satze sind die nachstehenden:

1) *Im reellen Raume* $\mathfrak{R}[n]$ *sei eine abzälbare Menge von reellen algebraischen Flächen gegeben. Dann erfüllen diejenigen Punkte, durch welche keine einzige dieser Flächen hindurchgeht, den Raum* $\mathfrak{R}[n]$ *überall dicht.*

2) *Wenn keine einzige der reellen ganzen rationalen Funktionen*

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

identisch Null ist, so kann man einem Teil der Variabeln, z. B. den Variabeln $x_{r+1}, \cdots, x_n$ *solche reelle Werte* $b_{r+1}, \cdots, b_n$ *beilegen, daß keine einzige der dadurch entstehenden Funktionen*

$$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_r, b_{r+1}, \cdots, b_n) \quad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

der Variabeln $x_1, x_2, \cdots, x_r$ *identisch Null ist.*

Hat man nämlich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ so bestimmt, daß für jeden Index i

$$\varphi_i(a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2, \cdots, a_n + \varepsilon_n)$$

von Null verschieden ist, so genügt es offenbar

$$b_{r+1} = a_{r+1} + \varepsilon_{r+1}, \cdots, b_n = a_n + \varepsilon_n$$

zu nehmen. Man sieht zugleich, daß man die speziellen Werte $b_{r+1}, \cdots, b_n$ so dicht bei beliebig gewählten Werten $a_{r+1}, \cdots, a_n$ annehmen kann, wie man will.

§ 4.

Das Punktsystem einer Gruppe.

Es sei nunmehr Γ eine Gruppe, gebildet aus unendlich vielen unimodularen homogenen linearen Substitutionen bei n Variabeln.

Das Punktsystem im Substitutionenraum $[n^2]$, welches die Substitutionen der Gruppe darstellt, bezeichne ich ebenfalls mit Γ. Da die Substitutionen unimodular sind, so liegen die Punkte von Γ sämtlich auf dem Grundgebilde (§ 1) und unter ihnen findet sich insbesondere der Einheitspunkt.

Nun gilt bezüglich des Punktsystems Γ der folgende Satz:

Besitzt das Punktsystem Γ *eine Häufungsstelle im Endlichen, so ist das Punktsystem „in sich dicht", d. h. jeder seiner Punkte ist Häufungsstelle.*

In der Tat: sei P eine Häufungsstelle von Γ, die im Endlichen liegt. Dann kann man aus dem Punktsystem Γ eine Reihe von Punkten

$$S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots \tag{1}$$

herausheben, welche die eine Häufungsstelle P besitzen, was durch die Gleichung

$$\operatorname{Lim} S_i = P$$

angedeutet werden kann. Da die Punkte (1) sämtlich auf dem Grund-

ilde liegen, so gilt dasselbe vom Punkte P. Es ist daher P^{-1} ein timmter im Endlichen liegender Punkt. Die zu (1) „inverse" Reihe

$$S_1^{-1}, S_2^{-1}, \cdots, S_i^{-1}, \cdots$$

itzt offenbar die eine Häufungsstelle P^{-1}. Aus dem Begriff der Gruppe gt nun, daß mit den Punkten P und Q auch gleichzeitig der Punkt) Häufungsstelle des Punktsystems Γ ist und daß gleichzeitig mit P h SP Häufungsstelle von Γ ist, unter S eine beliebige Substitution Gruppe Γ verstanden.

Demnach ist gleichzeitig mit P auch $PP^{-1} = 1$ und folglich auch $1 = S$, d. h. jeder beliebige Punkt des Punktsystems Γ, Häufungsstelle ses Punktsystems, w. z. b. w.

Weil nun die Gruppe Γ stets und nur dann infinitesimale Substitu- ien enthält, wenn das entsprechende Punktsystem Γ den Einheitspunkt Häufungsstelle hat, so folgt:

Eine Gruppe Γ ist dann und nur dann ohne infinitesimale Substitu- ien, wenn das entsprechende Punktsystem Γ keine im Endlichen liegende ufungsstelle besitzt.

Ein Punktsystem, welches im Endlichen keine Häufungsstelle besitzt, bekanntlich abzählbar. Bezeichnet nämlich Q die Summe aus den adraten der absoluten Beträge der Koordinaten des einzelnen Punktes, gibt es in dem Punktsystem nur endlich viele Punkte, deren Q unter er gegebenen positiven Größe liegt. (Offenbar ist Q ein spezieller Fall in § 2 eingeführten Höhenbegriffes.) Demnach lassen sich die Punkte Systems nach steigenden Werten der Größe Q in eine einfach ge- nete Reihe bringen. Diese Tatsache ergibt in Verbindung mit dem ben bewiesenen Satze das Resultat:

Die Substitutionen einer Gruppe Γ ohne infinitesimale Substitutionen len stets eine abzählbare Menge.

§ 5.

uivalente Punkte und reduzierte Punkte im Substitutionenraum.

Es seien nun

$$S_0 = 1, S_1, S_2, S_3, \cdots$$

Substitutionen einer Gruppe Γ ohne infinitesimale Substitutionen.

Wenn dann X ein veränderlich gedachter Punkt des Substitutionen- mes ist, so geben die Gleichungen

$$Y = S_i X \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

e Darstellung der Gruppe Γ bei n^2 Variabeln.

Zwei Punkte X und Y, für welche eine der Gleichungen (2) besteht,

heißen *„äquivalent"*. Von zwei äquivalenten Punkten ist jeder oder keiner auf dem singulären Gebilde gelegen.

Ich werde nun in der Folge, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, stets stillschweigend voraussetzen, daß die in Betracht gezogenen Punkte des Substitutionenraumes nicht auf dem singulären Gebilde liegen.

Ist X ein Punkt des Substitutionenraumes, so möge das System der ihm äquivalenten Punkte

$$S_0 X = X,\ S_1 X,\ S_2 X,\ S_3 X, \cdots \tag{3}$$

zur Abkürzung mit $\Gamma(X)$ bezeichnet werden. Ein solches System heißt ein *„vollständiges System äquivalenter Punkte"*. Das System Γ (1) ist mit dem Punktsystem Γ (§ 4) identisch. Ein Punktsystem $\Gamma(X)$ hat folgende wichtigen Eigenschaften:

1) *Keine zwei Punkte des Systems $\Gamma(X)$ fallen zusammen.*

Denn aus $S_i X = S_k X$ folgt durch Multiplikation mit X^{-1}, daß $S_i = S_k$ sein muß.

2) *Das Punktsystem $\Gamma(X)$ hat keine Häufungsstelle im Endlichen.*

Denn wäre P eine solche Häufungsstelle des Punktsystems (3), so würde PX^{-1} eine im Endlichen liegende Häufungsstelle des Punktsystems

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3, \cdots$$

sein, während doch nach § 4 eine Häufungsstelle nicht existiert.

Es soll sich nun zunächst darum handeln, aus einem vollständigen System äquivalenter Punkte nach eindeutigem Gesetze einen oder doch eine endliche Anzahl als „Repräsentanten" des Systems auszuscheiden, gerade so wie man aus einem Systeme äquivalenter quadratischer Formen eine „reduzierte" Form ausscheidet.

Zu diesem Zwecke nehme ich die Höhenform $H(X)$ beliebig aber bestimmt an. (Es bedeutet also $H(X)$ eine positive Hermitesche Form der n^2 Koordinaten des Punktes X.) Nun bilden nach § 2 diejenigen Punkte, deren Höhen unter einer gegebenen positiven Zahl liegen, einen ganz im Endlichen liegenden Bereich. Diesem Bereiche können nur endlich viele Punkte eines vollständigen Systems (3) äquivalenter Punkte angehören, weil anderenfalls für dieses System eine Häufungsstelle im Endlichen vorhanden wäre. Man kann daher die Punkte des vollständigen Systems (3) nach steigender Höhe anordnen und ist sicher, daß ein und derselbe Höhenwert stets nur bei endlich vielen Punkten des Systems auftreten kann. Insbesondere gibt es in dem Systeme $\Gamma(X)$ eine endliche Zahl von Punkten von kleinster Höhe.

Einen jeden Punkt des Systems $\Gamma(X)$, dem innerhalb dieses Systems eine kleinste Höhe zukommt, will ich „reduziert" nennen.

In jedem vollständigen Systeme äquivalenter Punkte gibt es also eine endliche Anzahl von reduzierten Punkten.

Damit ein bestimmter Punkt X unter allen ihm äquivalenten Punkten eine minimale Höhe besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die Ungleichungen

$$\mathsf{H}(X) \leqq \mathsf{H}(S_i X) \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4}$$

erfüllt sind. *Durch die Ungleichungen* (4) *sind daher die reduzierten Punkte vollständig charakterisiert.*

Hierzu ist nun noch folgendes zu bemerken. Über die Natur der Koeffizienten in den Substitutionen der Gruppe habe ich bislang keine Voraussetzung gemacht; sie konnten reelle oder komplexe Werte besitzen. Jetzt will ich nun den besonderen Fall noch näher betrachten, in welchem die Substitutionen der Gruppe Γ ausschließlich reelle Koeffizienten aufweisen, oder, wie man kürzer sagen kann, den Fall, in welchem die Gruppe Γ „reell" ist. Dann kann man statt *aller* Punkte des Substitutionenraumes auch nur die *reellen* Punkte desselben in Betracht ziehen, so daß man sich ausschließlich in dem reellen Substitutionenraume $\mathfrak{R}[n^2]$ bewegt. Zugleich darf man die Höhenform $\mathsf{H}(X)$ als eine positive quadratische Form der n^2 reellen Koordinaten des Punktes X annehmen. Die reduzierten Punkte sind dann alle Punkte X des *reellen* Substitutionenraumes, welche die Ungleichungen (4) befriedigen.

Das Ziel der nun folgenden Betrachtungen wird eine nähere Untersuchung desjenigen Bereiches F sein, welcher durch die Gesamtheit aller reduzierten Punkte gebildet wird. Im allgemeinen Falle ist F ein Bereich des Substitutionenraumes $[n^2]$, im Falle einer reellen Gruppe ist F ein Bereich des Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$.

§ 6.

Die Untergruppe der Höhenform.

Die Höhenform $\mathsf{H}(X)$ wird der identischen Gleichung

$$\mathsf{H}(X) \equiv \mathsf{H}(SX) \tag{1}$$

selbstverständlich genügen, wenn für S die identische Substitution S_0 genommen wird. Möglicherweise besteht aber die identische Gleichung (1) auch noch für andere der Gruppe Γ angehörende Substitutionen S. Jedenfalls wird die Anzahl dieser Substitutionen eine endliche sein, da sonst in einem jeden vollständigen Systeme äquivalenter Punkte ein und derselbe Höhenwert unendlich oft auftreten würde, was nach § 5 nicht der Fall sein kann.

Diejenigen unter den Substitutionen der Gruppe Γ, für welche die identische Gleichung (1) besteht, bezeichne ich mit

(2) $$T_0 = 1,\ T_1,\ T_2, \cdots, T_{h-1},$$

so daß also die Gleichungen

(3) $$\mathsf{H}(X) \equiv \mathsf{H}(T_i X) \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, h-1)$$

identisch, d. h. für jede Wahl des Punktes X im Substitutionenraum $[n^2]$, bestehen, und daß umgekehrt jede Substitution S der Gruppe Γ, für welche die Gleichung (1) identisch gilt, notwendig unter den Substitutionen (2) vorkommt.

Diese Substitutionen (2) bilden offenbar eine Untergruppe der Gruppe Γ. Diese Untergruppe ist eine endliche Gruppe von der Ordnung h. Ich bezeichne sie mit Γ_h und nenne sie die *„Untergruppe der Höhenform* $\mathsf{H}(X)$“.

Die Gesamtheit der Substitutionen von Γ ordne ich in bekannter Weise nach den Substitutionen der Untergruppe Γ_h in h Reihen

(4) $$\left\{\begin{array}{llll} S_0 = 1, & S_1, & S_2, & S_3, \cdots \\ T_1 S_0, & T_1 S_1, & T_1 S_2, & T_1 S_3, \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{h-1} S_0, & T_{h-1} S_1, & T_{h-1} S_2, & T_{h-1} S_3, \cdots \end{array}\right.$$

an. Dabei habe ich, wie man sieht, die Bezeichnung der Substitutionen von Γ etwas modifiziert: während bisher $S_0, S_1, S_2, \cdots$ die *sämtlichen* Substitutionen von Γ bezeichneten, bilden sie von jetzt ab im allgemeinen nur einen *Teil* der Substitutionen von Γ. Die *sämtlichen* Substitutionen von Γ sind jetzt in der Form

(5) $$T_i S_k$$

enthalten, wo i die ganzen Zahlen von 0 bis $h-1$ und, unabhängig davon, k *alle* ganzen Zahlen von 0 ab durchlaufen muß. Die Substitution (5) gibt jede Substitution von Γ, aber jede auch nur *ein* Mal, d. h. die Gleichheit

$$T_i S_k = T_{i'} S_{k'}$$

besteht *nur*, wenn $i = i'$, $k = k'$, wenn also T_i mit $T_{i'}$ und zugleich S_k mit $S_{k'}$ zusammenfällt.

Das vollständige System der zu einem beliebig gewählten Punkte X äquivalenten Punkte zerlegt sich in Gruppen von je h Punkten:

(6) $$S_k X,\ T_1 S_k X, \cdots, T_{h-1} S_k X,$$

so daß stets den h Punkten derselben Gruppe die *nämliche* Höhe zukommt.

Behält man von den h Punkten einer solchen Punktgruppe nur den ersten bei, so entsteht das Punktsystem

(7) $$S_0 X = X,\ S_1 X,\ S_2 X,\ S_3 X, \cdots,$$

welches ich das *„gereinigte“* System der zu X äquivalenten Punkte nenne.

Die h Punkte (6) bilden ein vollständiges System bezüglich der Untergruppe Γ_h äquivalenter Punkte, und aus dem Punktsystem (7) ent-

steht das vollständige System $\Gamma(X)$ der zu X bezüglich der Gruppe Γ äquivalenten Punkte, indem man zu jedem Punkte $S_k X$ die ihm bezüglich der Gruppe Γ_h äquivalenten Punkte hinzufügt.

Die Gruppe Γ_h hängt von der Wahl der Höhenform $H(X)$ ab. Für den Fall, wo die Substitution

$$-1 = \begin{pmatrix} -1, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & -1, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0, & 0, & \cdots, & -1 \end{pmatrix}$$

der Gruppe Γ angehört, wird aber diese Substitution, gleichgültig wie die Höhenform $H(X)$ gewählt wurde, auch in der Gruppe Γ_h vorkommen. Die Ordnung dieser Gruppe wird daher dann stets eine gerade Zahl $h = 2h'$ sein, und die Substitutionen (2) von Γ_h lassen sich dann in zwei Reihen

$$(8) \qquad \begin{cases} T_0 = 1, & T_1, & T_2, & \cdots, & T_{h'-1}, \\ -T_0, & -T_1, & -T_2, & \cdots, & -T_{h'-1} \end{cases}$$

zerlegen. Es gelten nun folgende Sätze:

Wenn die Gruppe Γ die Substitution -1 nicht enthält, so läßt sich die Höhenform $H(X)$ stets so wählen, daß ihre Untergruppe aus der einen identischen Substitution besteht.

Wenn die Gruppe Γ die Substitution -1 enthält, so läßt sich die Höhenform $H(X)$ stets so wählen, daß ihre Untergruppe aus der identischen Substitution und der Substitution -1 besteht.

Es genüge, den Beweis dieser Sätze für den Fall einer reellen Gruppe Γ, in welchem die Höhenform $H(X)$ als positive quadratische Form der Koordinaten $x_{\alpha,\beta}$ des Punktes X angenommen wird, zu führen. Zunächst betrachte ich eine reelle quadratische Form

$$(9) \qquad H(X) = \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} c_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} x_{\alpha,\beta} x_{\alpha',\beta'}, \qquad (c_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} = c_{\alpha',\beta',\alpha,\beta})$$

in welcher ich nicht nur die n^2 Zahlen $x_{\alpha,\beta}$, sondern auch die sämtlichen Koeffizienten $c_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}$ als frei veränderliche reelle Größen ansehe. Unter S eine reelle Substitution verstanden, untersuche ich, wann die Gleichung

$$(10) \qquad H(X) = H(SX)$$

identisch in den Variabeln $c_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}$, $x_{\alpha,\beta}$ besteht. Soll dies der Fall sein, so muß identisch

$$\sum c_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} x_{\alpha,\beta} x_{\alpha',\beta'} = \sum c_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} y_{\alpha,\beta} y_{\alpha',\beta'}$$

sein, wobei $y_{\alpha,\beta}$ die Koordinaten des Punktes SX sind, welche sich als lineare homogene Funktionen der Variabeln $x_{\alpha,\beta}$ darstellen. Aus vorstehender Gleichung folgt

$$y_{\alpha\beta}\, y_{\alpha'\beta'} = x_{\alpha\beta}\, x_{\alpha'\beta'}$$

und hieraus leicht

$$y_{\alpha\beta} = \varepsilon x_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n)$$

wo ε entweder den Wert $+1$ oder den Wert -1 bezeichnet. Demnach besteht die Gleichung (10) nur dann identisch, wenn $S = 1$ oder $S = -1$ ist.

Nunmehr bilde ich das System von Gleichungen

$$\mathsf{H}(X) = \mathsf{H}(SX), \tag{11}$$

indem ich für S der Reihe nach alle Substitutionen der Gruppe Γ nehme, mit Ausschluß der Substitution $S = 1$ und auch der Substitution $\cdot S = -1$, wenn dieselbe in der Gruppe Γ vorkommen sollte. Keine einzige dieser Gleichungen (11) ist in den Variabeln $c_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}$, $x_{\alpha\beta}$ identisch erfüllt. Daher kann man nach dem letzten Satze des § 3 den Variabeln $c_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}$ solche bestimmten Werte beilegen, daß $\mathsf{H}(X)$ eine positive quadratische Form der Variabeln $x_{\alpha\beta}$ wird und daß zugleich keine einzige der Gleichungen (11) in den Variabeln $x_{\alpha\beta}$ identisch besteht.

Die so bestimmte Form $\mathsf{H}(X)$ hat dann offenbar die Eigenschaft, daß die ihr entsprechende Gruppe Γ_h keine anderen Substitutionen als die Substitution 1 und -1 enthalten kann. Eine Höhenform, deren Untergruppe nur die absolut notwendig vorhandenen Substitutionen 1 resp. 1 und -1 enthält, nenne ich eine *„allgemeine"* Höhenform der Gruppe Γ.

§ 7.

Fundamentalbereiche im Substitutionenraum.

Indem ich die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalte, betrachte ich das System der Gleichungen

$$\mathsf{H}(S_i X) = \mathsf{H}(S_k X) \tag{1}$$

unter i und k irgend zwei verschiedene Indizes der Reihe $0, 1, 2, \cdots$ verstanden.

Keine einzige dieser Gleichungen ist in den Koordinaten $x_{\alpha\beta}$ des Punktes X identisch erfüllt. Denn wäre für zwei bestimmte Indizes i und k identisch

$$\mathsf{H}(S_i X) \equiv \mathsf{H}(S_k X),$$

so würde auch identisch

$$\mathsf{H}(X) \equiv \mathsf{H}(S_k S_i^{-1} X),$$

folglich

$$S_k S_i^{-1} = T_j,$$

und

$$S_k = T_0 S_k = T_j S_i,$$

also endlich $S_k = S_i$ sein.

Im Falle einer reellen Gruppe Γ stellt jede der Gleichungen (1) eine

reelle Gleichung zweiten Grades zwischen den Koordinaten $x_{\alpha,\beta}$ vor; im Falle einer beliebigen Gruppe Γ kann man jede der Gleichungen (1) ansehen als eine reelle Gleichung zweiten Grades zwischen den $2n^2$ reellen Komponenten der Koordinaten $x_{\alpha,\beta}$.

Da nun keine einzige der Gleichungen (1) identisch besteht, so gibt es nach § 3 Punkte X des Substitutionenraumes, welche keiner einzigen der Gleichungen (1) genügen, und zwar erfüllen diese Punkte den Substitutionenraum überall dicht.

Jeden derartigen Punkt X will ich *„regulär"* nennen. Ist X ein regulärer Punkt, so werden in dem gereinigten System der zu X äquivalenten Punkte

$$S_1 X = X, \quad S_1 X, \quad S_2 X, \quad S_3 X, \cdots \tag{2}$$

keine zwei vorhanden sein, welche dieselbe Höhe besitzen, und durch diese Eigenschaft sind die regulären Punkte auch völlig charakterisiert.

Wenn X ein regulärer Punkt ist, so ist, wie leicht zu zeigen, auch SX ein regulärer Punkt, unter S eine beliebige Substitution der Gruppe Γ verstanden. In einem vollständigen System äquivalenter Punkte ist daher entweder jeder oder kein Punkt regulär.

Ein vollständiges System äquivalenter Punkte der ersten Art, in welchem also ein und folglich jeder Punkt regulär ist, heiße ein *„reguläres"* System. Dieselbe Bezeichnung verwende ich auch für die gereinigten Systeme äquivalenter Punkte.

Nach § 5 ist ein reduzierter Punkt durch die Ungleichungen

$$\mathsf{H}(X) \leqq \mathsf{H}(S_i X) \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3}$$

charakterisiert; denn das Bestehen dieser Ungleichungen ist notwendig und hinreichend, damit dem Punkte X unter allen ihm äquivalenten Punkten eine minimale Höhe zukommt. Der durch (3) bestimmte Bereich aller reduzierten Punkte ist der Bereich F des Substitutionenraumes, welcher näher untersucht werden soll.

Er heiße der zur Höhenform $\mathsf{H}(X)$ gehörende Fundamentalbereich der Gruppe Γ im Substitutionenraum, oder auch, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, kurz *„Fundamentalbereich der Gruppe Γ"*.

Bezeichnet X einen beliebigen Punkt des Substitutionenraumes, so sind unter den ihm äquivalenten Punkten eine endliche Zahl von reduzierten vorhanden. D. h.:

„Jeder Punkt X ist einer endlichen Zahl von Punkten des Fundamentalbereiches F äquivalent."

Wenn X ein reduzierter Punkt ist, so sind auch die Punkte $T_0 X = X$, $T_1 X, \cdots, T_{k-1} X$ reduziert, da ihnen die gleiche Höhe, wie dem Punkte X zukommt. D. h.

Die Punkte des Fundamentalbereiches F ordnen sich zu je h einander bezüglich der Gruppe Γ_h, also auch bezüglich der Gruppe Γ, äquivalenten an.

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen werde ich solche h Punkte, die bezüglich Γ_h einander äquivalent sind, als *nicht wesentlich verschieden* bezeichnen.

Ich führe nun weiter denjenigen Teilbereich F' des Fundamentalbereiches F in die Betrachtung ein, welcher durch die Ungleichungen

$$\mathsf{H}(X) < \mathsf{H}(S_i X) \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4}$$

charakterisiert wird.

Jedes gereinigte System äquivalenter Punkte, welches regulär ist, enthält sicher einen, und zwar nur einen Punkt, der dem Bereiche F' angehört. Denn da die Höhen der Punkte eines solchen Systems alle untereinander verschieden sind, so gibt es nur *einen* reduzierten Punkt unter ihnen und die Höhe dieses reduzierten Punktes ist *kleiner* als die Höhe jedes andern Punktes des Systems.

Zwei Punkte des Fundamentalbereiches, von denen wenigstens einer dem Bereiche F' angehört, sind nur dann einander äquivalent, wenn sie nicht wesentlich verschieden sind.

Seien nämlich X und Y Punkte des Fundamentalbereiches, von denen etwa X dem Bereiche F' angehört, seien ferner Y und X äquivalent, also

$$Y = T_k S_i X,$$

unter k einen Index der Reihe $0, 1, \cdots, h-1$, unter i einen Index der Reihe $0, 1, 2, \cdots$ verstanden. Ich behaupte, es muß $i = 0$, also $Y = T_k X$, d. h. Y und X nicht wesentlich verschiedene Punkte sein. Wäre nämlich i nicht Null, so hätte man

$$\mathsf{H}(X) < \mathsf{H}(S_i X) = \mathsf{H}(T_k S_i X) = \mathsf{H}(Y).$$

Andererseits aber, da Y dem Bereiche F angehört, also als reduzierter Punkt nicht größere Höhe hat als irgend ein ihm äquivalenter Punkt,

$$\mathsf{H}(Y) \leqq \mathsf{H}(X),$$

was im Widerspruch mit der vorhergehenden Ungleichung $\mathsf{H}(X) < \mathsf{H}(Y)$ steht. Eine der wesentlichsten Eigenschaften des Bereiches F' ist nun diese:

Der Bereich F' besteht ausschließlich aus inneren Punkten, d. h. bezeichnet X irgend einen Punkt des Bereiches F', so gehören alle Punkte des Substitutionenraumes, die sich in einer genügend klein um X abgegrenzten Umgebung befinden, ebenfalls dem Bereiche F' an.

In der Tat: sei X ein Punkt von F'. Wenn nun keine Umgebung von X vorhanden wäre, die ganz dem Bereiche F' angehört, so würde eine Reihe von Punkten

(5) $$X_1,\ X_2, \cdots, X_j, \cdots$$

existieren, von denen keiner dem Bereiche F' angehört und welche den Punkt X als einzige Häufungsstelle besitzen. Daß die Punkte (5) F' nicht angehören, drückt sich durch die Ungleichungen

(6) $$\mathsf{H}(X_1) \geqq \mathsf{H}(S_{i_1} X_1),\quad \mathsf{H}(X_2) \geqq \mathsf{H}(S_{i_2} X_2), \cdots, \mathsf{H}(X_j) \geqq \mathsf{H}(S_{i_j} X_j), \cdots$$

aus, in welchen $i_1, i_2, \cdots, i_j, \cdots$ passend zu wählende Indizes der Reihe $1, 2, \cdots$ bedeuten. Da die Punkte (5) den Punkt X als einzige Häufungsstelle besitzen, so bilden sie ein Punktsystem, das ganz im Endlichen liegt. Die Höhen dieser Punkte bleiben daher unter einer festen positiven Grenze und nach (6) gilt das Nämliche für die Höhen der Punkte

(7) $$S_{i_1} X_1,\ S_{i_2} X_2, \cdots, S_{i_j} X_j, \cdots .$$

Folglich bilden diese Punkte (7) ebenfalls ein ganz im Endlichen liegendes Punktsystem. Weil nun Gleiches für die Punkte

$$X_1^{-1},\ X_2^{-1}, \cdots, X_j^{-1}, \cdots$$

gilt, welche die eine Häufungsstelle X^{-1} besitzen, so werden auch die Punkte

(8) $$S_{i_1} = (S_{i_1} X_1)\, X_1^{-1},\quad S_{i_2} = (S_{i_2} X_2)\, X_2^{-1}, \cdots$$

ein ganz im Endlichen liegendes Punktsystem bilden. Daher können unter diesen Punkten nur endlich viele verschiedene vorhanden sein, weil sie sonst, im Widerspruch mit § 4, eine Häufungsstelle im Endlichen besitzen würden. Es kommt also unter den Punkten (8) sicher ein Punkt — etwa S_i — unendlich oft vor. Die Punkte (7) besitzen dann die Häufungsstelle $S_i X$ und für diese folgt aus den Ungleichungen (6)

$$\mathsf{H}(X) \geqq \mathsf{H}(S_i X),$$

entgegen der Voraussetzung, daß X dem Gebiete F' angehört, also den Ungleichungen (4) genügt. Somit ist die Annahme, der aufgestellte Satz sei nicht richtig, unzulässig.

Jeder Punkt des Bereiches F, also jeder reduzierte Punkt, gehört dem Bereiche F' oder seiner Begrenzung an.

Um dieses zu beweisen, betrachte ich einen beliebigen Punkt P des Substitutionenraumes und eine Reihe von regulären Punkten

(9) $$P_1,\ P_2, \cdots, P_k, \cdots,$$

die P als Grenzlage haben. Die Indizes $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$ aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots$ wähle ich so, daß

(10) $$X_1 = S_{i_1} P_1,\quad X_2 = S_{i_2} P_2, \cdots, X_k = S_{i_k} P_k, \cdots$$

reduzierte Punkte sind. Diese reduzierten Punkte liegen, da sie regulär sind, sämtlich im Bereiche F'. Für jeden Index k gilt

(11) $$\mathsf{H}(X_k) \leqq \mathsf{H}(P_k),\quad \text{d. i.}\quad \mathsf{H}(S_{i_k} P_k) \leqq \mathsf{H}(P_k).$$

Die Punkte (9) bilden ein ganz im Endlichen liegendes Punktsystem und ebenso die zu (9) „inversen" Punkte P_1^{-1}, $P_2^{-1}, \cdots, P_k^{-1}, \cdots$. Hieraus und aus den Ungleichungen (11) folgert man, daß auch die Punkte $S_{i_k} P_k$ und also auch die Punkte $S_{i_k} = S_{i_k} P_k P_k^{-1}$ ein ganz im Endlichen liegendes Punktsystem bilden. Es muß folglich unter den Indizes $i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots$ notwendig einer — er heiße i — unendlich oft auftreten. Demnach gilt für unendlich viele Indizes k

$$X_k = S_i P_k, \quad \mathsf{H}(X_k) \leqq \mathsf{H}(S X_k), \tag{12}$$

wobei S eine beliebig gewählte Substitution von Γ bezeichnet. Läßt man k über alle Grenzen wachsen, so nähern sich die Punkte $S_i P_k$ der Grenzlage

$$X = S_i P, \tag{13}$$

und für diese gilt nach der Ungleichung (12)

$$\mathsf{H}(X) \leqq \mathsf{H}(S X). \tag{14}$$

Der Punkt X ist nach (14) reduzierter Punkt und nach (13) dem beliebig gewählten Punkt P äquivalent; er ist also ein beliebiger reduzierter Punkt. Da er ferner Grenzlage der Punkte X_k ist, so liegt er im Innern oder an der Begrenzung von F'. Der aufgestellte Satz ist damit bewiesen.

Jeder Punkt der Begrenzung von F', der im Endlichen liegt und nicht dem singulären Gebilde angehört, ist reduzierter Punkt.

Denn ist X ein im Endlichen liegender Punkt der Begrenzung von F', so sei derselbe etwa Grenzlage der Reihe von Punkten

$$X_1, \quad X_2, \cdots, X_k, \cdots$$

die dem Bereiche F' angehören. Für den Punkt X_k gilt

$$\mathsf{H}(X_k) < \mathsf{H}(S_i X_k) \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

und hieraus, indem man k unendlich wachsen läßt,

$$\mathsf{H}(X) \leqq \mathsf{H}(S_i X) \qquad (i = 1, 2, \cdots). \tag{15}$$

Ist X außerdem ein Punkt, der nicht auf dem singulären Gebilde liegt, so ist demnach X ein reduzierter Punkt, w. z. b. w.

Aus den letzten beiden Sätzen geht hervor, daß der Fundamentalbereich F aus den Punkten des Bereiches F' und denjenigen Punkten der Begrenzung von F' besteht, die im Endlichen und nicht auf dem singulären Gebilde liegen. Die Punkte von F' sind die inneren Punkte von F, die an der Begrenzung von F' liegenden Punkte die „Randpunkte" von F. Bezeichnet X einen Punkt von F, der an der Begrenzung von F' liegt, so muß in den Ungleichungen (3) mindestens für *einen* Index i das Gleichheitszeichen gelten, weil sonst X dem Bereiche F'

selbst angehören würde. Jeder Randpunkt von F befindet sich also auf einer der Flächen

$$\mathsf{H}(X) = \mathsf{H}(S_i X) \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots). \tag{16}$$

Um für einen bestimmten Randpunkt X die zugehörigen Flächen (16), auf denen er liegt, zu bestimmen, hat man das zu X gehörige gereinigte System äquivalenter Punkte nach aufsteigender Höhe zu ordnen. Ergibt sich dabei etwa

$$\mathsf{H}(X) = \mathsf{H}(S_1 X) = \mathsf{H}(S_2 X) = \mathsf{H}(S_r X) < \mathsf{H}(S_{r+1} X) \leqq \cdots, \tag{17}$$

so sind die $i = 1, 2, \cdots, r$ entsprechenden Flächen (16) diejenigen, auf welchen der betrachtete Randpunkt X liegt. Die Anzahl r dieser Flächen ist den Eigenschaften der Höhe zufolge stets eine *endliche*. Man betrachte nun eine Reihe von Punkten des Bereiches F'

$$X_1, \quad X_2, \cdots, X_k, \cdots, \tag{18}$$

welche den Randpunkt X als Grenzlage besitzen. In dem zu X_k gehörenden gereinigten System äquivalenter Punkte sei $S_{i_k} X_k$ derjenige oder einer derjenigen, welchen das zweite Höhenminimum zukommt, so daß also

$$\mathsf{H}(X_k) < \mathsf{H}(S_{i_k} X_k) \leqq \mathsf{H}(S_i X_k) \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots). \tag{19}$$

Ich behaupte nun, daß von einem genügend groß gewählten Index k ab die Indizes i_k sämtlich der Reihe $1, 2, \cdots, r$ angehörend vorausgesetzt werden dürfen. Andernfalls bestänben nämlich für unendlich viele Indizes k die Ungleichungen

$$\mathsf{H}(X_k) < \mathsf{H}(S_{i_k} X_k) < \mathsf{H}(S_j X_k) \qquad (j = 1, 2, \cdots, r), \tag{20}$$

wobei die Indizes i_k sämtlich größer als r sind. Durch eine schon wiederholt angewandte Schlußweise würde hieraus folgen, daß unter den Indizes i_k ein und derselbe Index i unendlich oft auftreten müßte. Indem man sodann k unendlich wachsen läßt, würde aus (20) folgen, daß

$$\mathsf{H}(S_i X) \leqq \mathsf{H}(S_j X) \qquad (j = 1, 2, \cdots, r)$$

wäre, was den Ungleichungen (17) widerstreitet.

Hieraus geht hervor, daß die Flächen (16), auf denen sich die Randpunkte von F finden, jedenfalls unter denjenigen Flächen zu suchen sind, die auf folgende Weise erhalten werden. Man fixiere einen Punkt — er heiße X_0 — im Bereiche F' und ordne das ihm entsprechende gereinigte System äquivalenter Punkte nach steigender Höhe. Dabei möge sich herausstellen, daß den Punkten $S_{i'} X_0$, $S_{i''} X_0, \cdots, S_{i^{(\alpha)}} X_0$ das zweite Höhenminimum entspricht, so daß

$$\mathsf{H}(X_0) < \mathsf{H}(S_{i'} X_0) = \mathsf{H}(S_{i''} X_0) = \cdots = \mathsf{H}(S_{i^{(\alpha)}} X_0) < \cdots$$

ist. Endlich bilde man die Flächen

$$\mathsf{H}(X) = \mathsf{H}(S_{i'} X), \quad \mathsf{H}(X) = \mathsf{H}(S_{i''} X), \cdots, \mathsf{H}(X) = \mathsf{H}(S_{i^{(\alpha)}} X). \tag{21}$$

Unter den so für alle möglichen Lagen von X_0 entstehenden Flächen (21) befinden sich dann sicher auch diejenigen, welche die Randpunkte des Fundamentalbereiches F tragen.

Jeder beliebige (nicht auf dem singulären Gebilde liegende) Punkt P des Substitutionenraumes ist entweder genau h untereinander nicht wesentlich verschiedenen Punkten des Bereiches F' äquivalent, oder aber er ist gewissen in endlicher Anzahl vorhandenen Punkten der Begrenzung von F' äquivalent. Diese Tatsache läßt sich noch in anderer, anschaulicherer Weise ausdrücken. Dabei will ich einen Punkt P *erster* oder *zweiter Art* nennen, je nachdem er einem Punkte von F' oder einem Punkte der Begrenzung von F' äquivalent ist.

Wenn der Punkt X_0 jede mögliche Lage in dem Bereiche F' erhält und i irgend einen Index der Reihe $0, 1, 2, \cdots$ bedeutet, so wird der Punkt $S_i X_0$ einen gewissen Bereich beschreiben, den ich mit $S_i F'$ bezeichnen will. Der Bereich $S_0 F'$ ist mit F' identisch. Die Bereiche

$$S_0 F' = F', \quad S_1 F', \quad S_2 F', \cdots \tag{22}$$

haben nun die Eigenschaft, daß jeder Punkt erster Art einem und nur einem dieser Bereiche angehört, und daß umgekehrt jeder Punkt, der einem der Bereiche (22) angehört, ein Punkt erster Art ist. Keine zwei dieser Bereiche haben einen gemeinsamen Punkt. Jeder Punkt zweiter Art gehört der Begrenzung von mindestens zwei, stets aber sicher von einer endlichen Anzahl der Bereiche (22) an, und umgekehrt ist jeder Punkt P, der der Begrenzung eines der Bereiche (22) angehört, von der zweiten Art.

Die Bereiche (22) geben also eine einfache und lückenlose Einteilung des Substitutionenraumes, wobei, wie immer, die auf dem singulären Gebilde liegenden Punkte von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben.

§ 8.

Darstellung der reellen Gruppen im Raume der positiven quadratischen Formen.

Ich werde nun den Fall einer reellen Gruppe näher betrachten und die bisherigen, dann auf den reellen Substitutionenraum $\mathfrak{R}[n^2]$ bezüglichen, Ergebnisse in gewisser Weise auf den Raum der positiven quadratischen Formen übertragen. Hierbei bediene ich mich folgender abkürzenden Bezeichnungen. Ist

$$P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \qquad (\alpha, \beta, = 1, 2, \cdots, n; \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}) \tag{1}$$

eine reelle quadratische Form von n Variabeln $u_1, u_2, \cdots, u_n$, so soll

der Buchstabe P nicht nur zur Bezeichnung der Form, sondern ebenso zur Bezeichnung des die Form repräsentierenden Punktes im Raume $\mathfrak{R}\left[n\frac{n+1}{2}\right]$, sowie zur Bezeichnung der aus den Koeffizienten der Form gebildeten Substitution

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

verwendet werden. Bezeichnet ferner X eine beliebige Substitution mit reellen oder komplexen Koeffizienten, so will ich, in Übereinstimmung mit einer früheren Festsetzung, mit X^0 diejenige Substitution bezeichnen, deren Koeffizienten zu den entsprechenden Koeffizienten von X konjugiert sind (so daß $X^0 = X$, wenn X reelle Koeffizienten hat), und mit X' diejenige Substitution, die aus X^0 durch Vertauschung der Horizontal- mit den Vertikalreihen entsteht. Im Falle einer reellen Substitution X geht X' direkt aus X durch Vertauschung der Horizontal- mit den Vertikalreihen hervor. Die reellen Substitutionen (2), die den reellen quadratischen Formen (1) entsprechen, sind durch die Gleichung

$$P' = P$$

charakterisiert.

Die Punkte des reellen Substitutionenraumes $\mathfrak{R}[n^2]$, die nicht auf dem singulären Gebilde liegen*), setze ich nun folgendermaßen in Beziehung zu den Punkten des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ der positiven quadratischen Formen:

Dem Punkte

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}, & x_{12}, & \cdots, & x_{1n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1}, & x_{n2}, & \cdots, & x_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

des Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$ soll die quadratische Form

$$P = \sum_{i=1}^{n} (x_{1i}u_1 + x_{2i}u_2 + \cdots + x_{ni}u_n)^2 \tag{4}$$

und damit auch der Punkt P des Raumes der positiven quadratischen Formen zugeordnet werden.

Die Koeffizienten der Form P lauten

$$a_{\alpha\beta} = x_{\alpha 1}x_{\beta 1} + x_{\alpha 2}x_{\beta 2} + \cdots + x_{\alpha n}x_{\beta n} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

*) Diesen Zusatz werde ich weiterhin unterdrücken, indem ich an der schon oben getroffenen Bestimmung festhalte, daß unter einem Punkte des Substitutionenraumes ohne weiteren Zusatz stets ein solcher verstanden werden soll, der nicht auf dem singulären Gebilde liegt.

und die aus diesen Koeffizienten gebildete Substitution (2) wird daher

$$P = XX'. \tag{6}$$

Hiernach entspricht nun jedem Punkte X des Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$ ein völlig bestimmter Punkt P des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$. Da jede positive quadratische Form auf unendlich viele Weisen als Summe von Quadraten reeller Linearformen darstellbar ist, so werden umgekehrt einem beliebig fixierten Punkte P des Raumes der positiven quadratischen Formen unendlich viele Punkte des Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$ entsprechen. Bezeichnet X einen bestimmten dieser Punkte, so sind *alle* P entsprechenden Punkte des Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$ in der Form

$$XT \tag{7}$$

enthalten, unter T jede orthogonale reelle Substitution verstanden.

Sei nun S irgend eine reelle Substitution von nicht verschwindender Determinante, X ein variabler Punkt des Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$. Der Punkt Y werde von X abhängig gemacht durch die Gleichung

$$Y = SX. \tag{8}$$

Den Punkten X und Y entsprechen bez. die Punkte

$$P = XX', \quad Q = YY' \tag{9}$$

des Raumes der positiven Formen. Da nun aus (8)

$$Y' = X'S', \quad YY' = SX \cdot X'S'$$

folgt, so ist der Punkt Q vom Punkte P abhängig vermöge der Gleichung

$$Q = SPS'. \tag{10}$$

Diese Gleichung ergibt die $\frac{n(n+1)}{2}$ Koordinaten des Punktes Q als lineare homogene Funktionen derjenigen des Punktes P. Während also die Gleichung (8) eine durch die Substitution S bestimmte Substitution bei n^2 Variabeln vorstellt, stellt die Gleichung (10) eine durch S bestimmte Substitution bei $\frac{n(n+1)}{2}$ Variabeln dar.

Zunächst erhebt sich nun die Frage, unter welcher Bedingung zwei Substitutionen S und $\bar{S}$ die nämliche Substitution (10) entspricht. Dies wird dann und nur dann der Fall sein, wenn identisch in den Koordinaten von P die Gleichung

$$SPS' = \bar{S}P\bar{S}'$$

gilt. Setzt man jetzt

$$S^{-1}\bar{S} = T \quad \text{oder} \quad \bar{S} = ST, \quad \bar{S}' = T'S', \tag{11}$$

so geht vorstehende Gleichung über in

$$P = TPT'.$$

Nimmt man hierin $P = 1$, so kommt $TT' = 1$, also auch $T'T = 1$ und

$$PT = TP, \tag{12}$$

d. i.

$$a_{\alpha 1}t_{1\beta} + a_{\alpha 2}t_{2\beta} + \cdots + a_{\alpha n}t_{n\beta} = t_{\alpha 1}a_{1\beta} + t_{\alpha 2}a_{2\beta} + \cdots + t_{\alpha n}a_{n\beta} \tag{13}$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n),$$

wenn $t_{\alpha\beta}$ die Koeffizienten der Substitution T und $a_{\alpha\beta}$ die der Substitution P bedeuten. Die Gleichungen (13) müssen identisch in den $\frac{n(n+1)}{2}$ Größen $a_{\alpha\beta}$ erfüllt sein. Sind nun die Indizes α und β verschieden, so enthalten die beiden Reihen

$$a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \cdots, a_{\alpha n} \quad \text{und} \quad a_{1\beta}, a_{2\beta}, \cdots, a_{n\beta},$$

nur das *eine* gemeinsame Glied $a_{\alpha\beta}$ und die betreffende Gleichung (13) ergibt daher

$$t_{\beta\beta} = t_{\alpha\alpha}, \quad t_{\gamma\beta} = 0, \quad \text{wenn } \gamma \text{ verschieden von } \beta.$$

Da ferner $TT' = 1$ sein muß, so folgt

$$T = \pm 1$$

und nach (11)

$$\bar{S} = \pm S.$$

Demnach entspricht zwei Substitutionen $\bar{S}$ und S dann und nur dann dieselbe Substitution (10), *wenn entweder $\bar{S}$ mit S oder mit $-S$ zusammenfällt.*

Schließlich sei noch auf folgende bekannte Tatsache hingewiesen, welche die Gleichung (10) bequem zu bilden gestattet:

Betrachtet man die Formen

$$P = \sum a_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta, \qquad Q = \sum b_{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta, \tag{14}$$

so bedeutet die Gleichung (10) nichts anderes, als daß die Form P durch die Substitution

$$u = S'v \tag{15}$$

in die Form Q übergeht. Die Gleichung (15) ist in demselben Sinne zu verstehen, wie die Gleichung (3) im § 1.

Nun mögen die Substitutionen unserer Gruppe Γ, die wir als reell voraussetzen, zunächst wie folgt bezeichnet werden. Wenn die Gruppe Γ die Substitution -1 nicht enthält, so seien

$$S_0 = 1, \ S_1, \ S_2, \ S_3, \cdots \tag{16}$$

die sämtlichen Substitutionen von Γ. Wenn aber Γ die Substitution -1 enthält, so sollen die Substitutionen (16) so gewählt sein, daß sie zusammen mit den Substitutionen

$$-S_0 = -1, \ -S_1, \ -S_2, \ -S_3 \cdots \tag{16'}$$

die sämtlichen Substitutionen von Γ vorstellen.

Läßt man in der Gleichung (8) an die Stelle von S nach und nach die Substitutionen (16) bez. die Substitutionen (16) und (16′) treten, so geben die entstehenden Gleichungen die Darstellung der Gruppe Γ im Substitutionenraum $\mathfrak{R}[n^2]$.

Läßt man ebenso in der Gleichung (10) an die Stelle von S die Substitutionen von Γ treten, so ist zu beachten, daß zwei verschiedene Substitutionen von Γ dann und nur dann dieselbe Gleichung (10) liefern, wenn sie ein Paar $(S_i, -S_i)$ bilden. Die aus der Gleichung (10) entstehenden Gleichungen stellen demnach eine zu Γ holoedrisch isomorphe Gruppe von linearen Substitutionen bei $\frac{n(n+1)}{2}$ Variabeln vor, wenn Γ die Substitution -1 nicht enthält.

Wenn dagegen Γ die Substitution -1 enthält, so geben die Substitutionen (16′) dieselben Gleichungen (10), wie die Substitutionen (16).

In diesem Falle ist also die durch die Gleichungen

$$Q = S_i P S_i' \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots) \tag{17}$$

definierte Gruppe bei $\frac{n(n+1)}{2}$ Variabeln in der Weise auf die Gruppe Γ isomorph bezogen, daß jeder Substitution von Γ freilich eine einzige Substitution (17), aber umgekehrt jeder Substitution (17) zwei, durch das Vorzeichen verschiedene Substitutionen Γ entsprechen.

In den Gleichungen (17) denke ich mir die Veränderlichkeit von P (und also auch die von Q) auf den Raum der positiven quadratischen Formen eingeschränkt, und die durch diese Gleichungen definierte Gruppe — sie heiße Γ' — will ich in jedem Falle, also gleichgültig ob Γ die Substitution -1 enthält oder nicht, als „Darstellung der Gruppe Γ im Raume der positiven quadratischen Formen“ oder kürzer als „*Darstellung von* Γ *im Raume* $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$“ bezeichnen.

Betrachtet man einen Punkt X des Substitutionenraumes $\mathfrak{R}[n^2]$, so bilden die Punkte

$$S_0 X = X,\ S_1 X,\ S_2 X, \cdots \tag{18}$$

mit eventueller Hinzunahme der Punkte

$$-S_0 X,\ -S_1 X,\ -S_2 X, \cdots \tag{18′}$$

ein vollständiges System äquivalenter Punkte im Substitutionenraume.

Nimmt man nun die diesen Punkten entsprechenden Punkte des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$, so erhält man, wenn $XX' = P$ gesetzt wird, die Punkte

$$S_0 P S_0' = P,\ S_1 P S_1',\ S_2 P S_2', \cdots. \tag{19}$$

Die letzteren bilden ein „*vollständiges System äquivalenter Punkte*“ des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$. Das auf diese Weise erzeugte System (19) ist das

allgemeinste, welches denkbar ist, da durch geeignete Wahl des Punktes X bewirkt werden kann, daß $P = XX'$ mit einem beliebig fixierten Punkte des Raumes der positiven Formen zusammenfällt. Aus dem Systeme äquivalenter Punkte (18) bez. (18) und (18′) erhält man jedes andere, das zu demselben Punktsystem (19) Anlaß gibt, indem man an die Stelle des Punktes X den Punkt XT setzt, unter T eine beliebige orthogonale Substitution verstanden.

Während im Substitutionenraum ein vollständiges System äquivalenter Punkte *stets* aus lauter getrennten Punkten besteht, ist dies im Raume der positiven Formen nicht mehr der Fall. Von den Punkten (19) werden die Punkte $S_i P S_i'$ und $S_k P S_k'$ zusammenfallen, wenn

$$S_i P S_i' = S_k P S_k' \tag{20}$$

ist. Setzt man nun

$$S_i = S_k T, \tag{21}$$

so geht (20) über in

$$TPT' = P, \tag{22}$$

d. h. T ist eine solche Substitution der Gruppe, für welche T', auf die quadratische Form P angewandt, diese Form in sich überführt. Immer also, wenn der Punkt P so gewählt ist, daß die Gleichung (22) durch eine Substitution T, die von ± 1 verschieden ist und der Gruppe Γ angehört, befriedigt werden kann, wird das Punktsystem (19) nicht aus lauter getrennten Punkten bestehen. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Anzahl der Substitutionen T für einen gegebenen Punkt P stets eine endliche ist, und daß jeder in der Reihe (19) auftretende Punkt ebenso oft in der Reihe vorkommt wie jeder andere; doch ist ein näheres Eingehen auf diese Verhältnisse hier nicht nötig. Da keine der Gleichungen (20), die allen möglichen Kombinationen der Indizes i und k entsprechen, identisch in den Koordinaten von P besteht, so erfüllen jedenfalls diejenigen Punkte P, für welche das Punktsystem (19) aus lauter verschiedenen Punkten besteht, den Raum der positiven quadratischen Formen überall dicht.

§ 9.

Höhe und reduzierte Punkte im Raume der positiven quadratischen Formen.

Die Höhenform $\mathsf{H}(X)$ wähle ich nun so, daß ihr Wert nur abhängig ist von den Koordinaten $a_{\alpha\beta}$ des Punktes $P = XX'$, der dem Punkte X des Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$ im Raume $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ entspricht. Dies geschieht, indem ich

(1) $\mathsf{H}(X) = \psi(x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1}) + \psi(x_{12}, x_{22}, \cdots, x_{n2}) + \cdots + \psi(x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{nn})$

setze, unter

(2) $\psi(u) \equiv \psi(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \sum c_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n;\ c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha})$

eine positive quadratische Form der Variabeln $u_1, u_2, \cdots, u_n$ verstanden.

In der Tat ergibt sich aus (1) und (2) und Gleichung (5) des vorigen Paragraphen

(3) $$\mathsf{H}(X) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}(x_{\alpha 1} x_{\beta 1} + x_{\alpha 2} x_{\beta 2} + \cdots + x_{\alpha n} x_{\beta n}) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta},$$

wobei die $a_{\alpha\beta}$ die Koordinaten des Punktes $P = XX'$ des Raumes der positiven quadratischen Formen bezeichnen.

Den Wert $\sum c_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$ nenne ich die „Höhe" des Punktes P des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ und bezeichne ihn dementsprechend auch mit $\mathsf{H}(P)$.

Es gilt dann nach (3) der Satz:

Die Höhe $\mathsf{H}(X)$ eines Punktes X des Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$ ist stets dieselbe, wie die Höhe $\mathsf{H}(P)$ des entsprechenden Punktes $P = XX'$ des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

Heißt ferner ein Punkt P des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ „reduziert", wenn ihm unter allen ihm äquivalenten Punkten (vgl. (19) § 8) ein minimaler Wert der Höhe zukommt, so folgt:

Zwei einander entsprechende Punkte X des Raumes $\mathfrak{R}[n^2]$ und $P = XX'$ des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ sind stets gleichzeitig reduziert oder nicht reduziert.

In jedem vollständigen System äquivalenter Punkte des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ gibt es einen oder mehrere, stets aber nur endlich viele reduzierte Punkte.

Über die Untergruppe der Höhenform (1) ist folgendes zu bemerken. Nach § 6 umfaßt diese Untergruppe alle diejenigen Substitutionen S der Gruppe Γ, für welche die Identität

$$H(X) \equiv H(SX)$$

besteht. Berücksichtigt man, daß nach § 1 die Gleichung (5) daselbst mit den dortigen Gleichungen (9) gleichbedeutend sind, so erkennt man:

„Die Untergruppe der Höhenform (1) umfaßt alle diejenigen Substitutionen S der Gruppe Γ, welche die quadratische Form (2) ungeändert lassen, die also der identischen Gleichung

(4) $$\psi(Su) \equiv \psi(u)$$

genügen."

Die Substitutionen dieser Untergruppe Γ_k mögen, wie in § 6, mit

(5) $$T_0 = 1,\ T_1,\ T_2, \cdots, T_{k-1}$$

bezeichnet und nunmehr, ebenso wie dort, die Substitutionen von Γ in die h Reihen

$$(6)\qquad \begin{cases} S_0 = 1, & S_1, & S_2, & S_3, \cdots \\ T_1 S_0, & T_1 S_1, & T_1 S_2, & T_1 S_3, \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{h-1} S_0, & T_{h-1} S_1, & T_{h-1} S_2, & T_{h-1} S_3, \cdots \end{cases}$$

angeordnet werden.

Da die Gleichung (4) identisch in den Koeffizienten $c_{\alpha\beta}$ und den Variabeln $u_1, u_2, \cdots, u_n$ der Form ψ nur dann bestehen kann, wenn $S = \pm 1$ ist, so ergibt sich durch eine oben angewandte Schlußweise, daß die Form ψ und damit die Höhenform (1) stets so gewählt werden kann, daß die Untergruppe Γ_h nur die absolut notwendig vorhandenen Substitutionen: 1, wenn Γ die Substitution -1 nicht enthält, und 1 und -1, wenn Γ die Substitution -1 enthält, umfaßt. Bei so getroffener Wahl der Höhenform ist dann also $h = 1$ bez. $h = 2$.

Im allgemeinen Falle hatte ich ein Punktsystem

$$(7)\qquad S_0 X = X,\ S_1 X,\ S_2 X, \cdots$$

als ein „gereinigtes System äquivalenter Punkte“ und je h bezüglich Γ_h äquivalenter Punkte

$$(8)\qquad T_0 X = X,\ T_1 X,\ T_2 X, \cdots, T_{h-1} X$$

als „nicht wesentlich verschieden“ bezeichnet.

Diese Bezeichnungen übertrage ich auf den Raum $\mathfrak{P}^{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]}$ und nenne also in diesem Raume ein Punktsystem

$$(9)\qquad S_0 P S_0' = P,\ S_1 P S_1',\ S_2 P S_2', \cdots$$

ein „gereinigtes System äquivalenter Punkte“ und bezeichne die Punkte

$$(10)\qquad T_0 P T_0' = P,\ T_1 P T_1', \cdots, T_{h-1} P T_{h-1}'$$

als „nicht wesentlich verschieden“. Nicht wesentlich verschiedene Punkte haben stets dieselbe Höhe. Wenn die Gruppe Γ die Substitution -1 nicht enthält, so besteht eine Gruppe (10) nicht wesentlich verschiedener Punkte im allgemeinen aus h getrennten Punkten, im andern Falle aber nur aus $\frac{1}{2} h$.

Wenn also die Höhenform so gewählt ist, daß $h = 1$ bez. $h = 2$ wird, so enthält die Gruppe (10) nur einen einzigen Punkt P und das gereinigte System (9) ist dann immer zugleich ein vollständiges System äquivalenter Punkte.

§ 10.

Fundamentalbereiche im Raume der positiven quadratischen Formen.

Der Bereich D aller reduzierten Punkte P im Raume $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ ist vollständig durch das System von Ungleichungen

$$H(P) \leqq H(S_i P S_i') \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$$

d. i.

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta} \leqq \sum c_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

charakterisiert, wobei die $a_{\alpha\beta}^{(i)}$ die Koordinaten des Punktes $S_i P S_i'$ bezeichnen. Diese Koordinaten sind lineare homogene Funktionen der Koordinaten $a_{\alpha\beta}$ des Punktes P.

Der Bereich D heiße *Fundamentalbereich der Gruppe* Γ *im Raume* $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$.

Derselbe ist vollständig bestimmt, sobald die Höhenform oder also die Form

$$\psi(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \sum c_{\alpha\beta}\, u_\alpha u_\beta \tag{2}$$

festgelegt worden ist, und möge daher, wenn erforderlich, als zu der Form (2) gehörig bezeichnet werden.

Der Fundamentalbereich D ist durch ein System von lauter linearen homogenen Ungleichungen (1) *charakterisiert.*

Hieraus folgt, daß mit den Punkten $(a_{\alpha\beta})$ und $(a'_{\alpha\beta})$ auch jeder Punkt $(\lambda a_{\alpha\beta} + \lambda' a'_{\alpha\beta})$, unter λ und λ' positive Zahlen verstanden, dem Bereiche D angehört und daß also insbesondere der Bereich D aus einem einzigen Stück besteht.

Dieselbe Eigenschaft kommt auch dem Bereiche D' zu, welcher durch die linearen Ungleichungen

$$\sum c_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta} < \sum c_{\alpha\beta}\, a_{\alpha\beta}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3}$$

definiert ist.

Übrigens entsprechen die Bereiche D und D' bezüglich den Bereichen F und F' des Substitutionenraumes $\mathfrak{R}[n^2]$, nämlich: wenn X und $P = XX'$ zwei entsprechende Punkte im Raume $\mathfrak{R}[n^2]$ bez. im Raume $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ bedeuten, so liegt P im Bereiche D (D'), wenn X im Bereiche F (F') liegt und umgekehrt: es liegt X im Bereiche F (F'), wenn P im Bereiche D (D') liegt. Infolgedessen übertragen sich die Eigenschaften der Bereiche F und F' (vgl. § 7) ohne weiteres auf die Bereiche D und D'.

Es sei hier nur folgendes hervorgehoben:

Der Bereich D' besteht ausschließlich aus inneren Punkten. Der Bereich D setzt sich zusammen aus dem Bereich D' und denjenigen Punkten von $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$, die an der Begrenzung von D' liegen. Der Bereich D' bildet also das Innere des Bereiches D.

Jeder Punkt P des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ ist entweder einem inneren Punkte von D (also einem Punkte von D') oder einem Randpunkte von D (also einem Punkte der Begrenzung von D') äquivalent. Je nachdem der erste oder der zweite Fall (die sich ausschließen) eintritt, heiße P ein Punkt erster oder ein Punkt zweiter Art.

Die Punkte von D, welche einem Punkte erster Art äquivalent sind, bilden ein System von h bez. $\frac{h}{2}$ nicht wesentlich verschiedenen Punkten. Die Punkte von D, welche einem bestimmten Punkte zweiter Art äquivalent sind, bilden eine endliche Zahl von Systemen nicht wesentlich verschiedener Punkte.

Bezeichnet man mit $S_i D'$ denjenigen Bereich, welcher aus D' hervorgeht, wenn jeder Punkt P von D' durch den Punkt $S_i P S_i'$ ersetzt wird, so geben die Bereiche

$$S_0 D' = D',\ S_1 D',\ S_2 D', \cdots \tag{4}$$

eine einfache und lückenlose Einteilung des Raumes der positiven quadratischen Formen. Jeder Punkt, der einem dieser Bereiche angehört, ist erster Art, und jeder Punkt erster Art gehört einem und nur einem dieser Bereiche an. Jeder Punkt des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$, der zweiter Art ist, gehört der Begrenzung von mindestens zweien, stets aber von endlich vielen der Bereiche an, und umgekehrt ist jeder Punkt des Raumes $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$, der der Begrenzung eines der Bereiche angehört, ein Punkt zweiter Art.

Wird die Höhenform so gewählt, daß ein System nicht wesentlich verschiedener Punkte immer nur aus einem einzelnen Punkte besteht, so haben dann die Bereiche (4) die Eigenschaft, daß zwei verschiedene Punkte eines und desselben Bereiches niemals einander äquivalent sind.

Diese Sätze modifizieren sich in leicht festzustellender Weise, wenn man die Koordinaten $(a_{\alpha\beta})$ als homogene Größen ansieht, d. h. wenn man zwei Punkte als nicht verschieden ansieht, falls die Koordinaten des einen durch Multiplikation der Koordinaten des andern mit einer und derselben nicht verschwindenden Zahl entstehen.

§ 11.

Der Fall $n = 2$.

Im einfachsten Falle $n = 2$ bilden die Punkte (a_{11}, a_{12}, a_{22}) des Raumes der positiven quadratischen Formen, wenn a_{11}, a_{12}, a_{22} als rechtwinklige Koordinaten im gewöhnlichen Raume angesehen werden, das Innere des Kegels

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

an dessen Stelle bei homogener Auffassung das Innere

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0 \tag{1}$$

des Kegelschnitts $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ tritt, den ich mit K bezeichnen will.

Nach Annahme einer positiven quadratischen Form

$$\psi(u_1, u_2) = c_{11} u_1^2 + 2 c_{12} u_1 u_2 + c_{22} u_2^2 \tag{2}$$

ist die Höhe des Punktes $P(a_{11}, a_{12}, a_{22})$ durch

$$\mathsf{H}(P) = c_{11} a_{11} + 2 c_{12} a_{12} + c_{22} a_{22} \tag{3}$$

gegeben und der Bereich D durch die Ungleichungen

$$c_{11} a_{11} + 2 c_{12} a_{12} + c_{22} a_{22} \leqq c_{11} a_{11}^{(i)} + 2 c_{12} a_{12}^{(i)} + c_{22} a_{22}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

definiert. Der Bereich D wird bei homogener Auffassung ein durch lauter Gerade begrenztes Stück des Innern des Kegelschnittes K und ist also das, was Herr Fricke einen „normalen Diskontinuitätsbereich" der Gruppe nennt. Zur näheren Charakterisierung des Zusammenhanges, in welchem die durch die Ungleichungen (4) gegebene Definition des Bereiches D mit den Betrachtungen steht, durch welche Herr Fricke die Existenz der normalen Diskontinuitätsbereiche anschaulich macht*), dienen folgende Bemerkungen.

Zur Vereinfachung will ich die Koordinaten eines Punktes im Innern des Kegelschnittes K durch die Bedingungen

$$a_{11} > 0, \; a_{22} > 0, \; a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 1 \tag{5}$$

normieren. Da $a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - (a_{12}^{(i)})^2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ ist, so wird der Bereich D im Innern von K auch nach der eben festgesetzten Normierung noch durch die Ungleichungen (4) definiert. Die Höhe eines Punktes P im Innern von K sei jetzt durch die Formel (3) definiert, unter a_{11}, a_{12}, a_{22} die *normierten* Koordinaten von P verstanden. Der Bereich D umfaßt dann also alle diejenigen Punkte P im Innern von K, deren Höhe unter allen ihnen äquivalenten Punkten einen minimalen Wert besitzt. Die Koeffizienten der Form $\psi(u_1, u_2)$ dürfen und sollen so angenommen werden, daß

*) Fricke-Klein, l. c. p. 106—109.

$(c_{22}, -c_{12}, c_{11})$ die normierten Koordinaten eines Punktes C im Innern von K sind.

Sind nun (a_{11}, a_{12}, a_{22}) und $(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22})$ irgend zwei Punkte im Innern von K, so ist ihre Cayleysche Entfernung

$$(6) \qquad \mathsf{E} = \lg \frac{J+\sqrt{J^2-4\Delta\Delta'}}{J-\sqrt{J^2-4\Delta\Delta'}} = \lg \frac{J+\sqrt{J^2-4}}{J-\sqrt{J^2-4}},$$

wobei

$$(7) \qquad J = a_{11}a'_{22} - 2a_{12}a'_{12} + a_{22}a'_{11}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1, \quad \Delta' = a'_{11}a'_{12} - a'^2_{12} = 1,$$

und die auftretende Quadratwurzel positiv zu nehmen ist.

Läßt man jetzt $(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22})$ mit dem Punkte C zusammenfallen, so geht J in die Höhe $\mathsf{H}(P)$ des Punktes $P(a_{11}, a_{12}, a_{22})$ über, und es drückt sich also die Cayleysche Entfernung des Punktes P von dem Punkte C durch

$$(8) \qquad (CP) = \lg \frac{\mathsf{H}(P)+\sqrt{\mathsf{H}^2(P)-4}}{\mathsf{H}(P)-\sqrt{\mathsf{H}^2(P)-4}}$$

aus. Da nun der hier auftretende Logarithmus mit wachsendem $\mathsf{H}(P)$ beständig wächst, so folgt schließlich:

Der Bereich D kann auch durch die Aussage charakterisiert werden, daß ein Punkt P ihm dann und nur dann angehört, wenn seine Cayleysche Entfernung von dem festen Punkte C nicht größer ist als die Cayleysche Entfernung eines jeden ihm äquivalenten Punktes von demselben festen Punkte C.

Der Übergang von dem Innern des Kegelschnitts K zu der Ebene einer komplexen Variabeln

$$(9) \qquad \omega = x + iy$$

vollzieht sich in bekannter Weise. Jedem Punkte $P(a_{11}, a_{12}, a_{22})$ im Innern von K, dessen Koordinaten normiert vorausgesetzt werden, ordnet man zu den Punkt

$$(10) \qquad \omega = \frac{a_{12}+i}{a_{22}}.$$

Die Gruppe Γ geht dadurch über in die allgemeinste reelle Gruppe von gebrochenen linearen Substitutionen

$$(11) \qquad \omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

ohne infinitesimale Substitutionen. Überträgt man den Begriff der Höhe von dem Punkte P auf den entsprechenden Punkt ω und bezeichnet dementsprechend $\mathsf{H}(P)$ auch mit $\mathsf{H}(\omega)$, so ergibt eine leichte Rechnung als Ausdruck der Höhe eines Punktes $\omega = x + iy$,

$$(12) \qquad \mathsf{H}(\omega) = 2i \cdot \frac{c_{11}\omega\omega^0 + c_{12}(\omega+\omega^0) + c_{22}}{\omega-\omega^0} = \frac{c_{11}(x^2+y^2) + 2c_{12}x + c_{22}}{y}.$$

Der Bereich D geht über in ein Stück der ω-Ebene, welches ausschließlich durch Kreise, deren Mittelpunkte auf der Achse der reellen Zahlen liegen, begrenzt wird. Seine Punkte sind wieder durch die Minimumseigenschaft ihrer Höhen $H(\omega)$ völlig charakterisiert, also durch die Ungleichungen

$$H(\omega) \leqq H\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right), \tag{13}$$

die den verschiedenen Substitutionen (11) der Gruppe entsprechen. Setzt man in (13) die Höhenausdrücke nach (12) ein, so ergibt sich die explizite Definition des Fundamentalbereiches in der positiven Halbebene der Variabeln $\omega = x + iy$ durch die Ungleichungen

$$c_{11}(x^2+y^2) + 2c_{12}x + c_{22} \leqq c'_{11}(x^2+y^2) + 2c'_{12}x + c'_{22}, \tag{13'}$$

wobei zur Abkürzung

$$\left|\begin{array}{l} c'_{11} = c_{11}\alpha^2 + 2c_{12}\alpha\gamma + c_{22}\gamma^2 \\ c'_{12} = c_{11}\alpha\beta + c_{12}(\alpha\delta+\beta\gamma) + c_{22}\gamma\delta \\ c'_{22} = c_{11}\beta^2 + 2c_{12}\beta\delta + c_{22}\delta^2 \end{array}\right. \tag{14}$$

gesetzt ist. Nach der allgemeinen Theorie sind die Punkte dieses Fundamentalbereiches immer zu je h einander äquivalent, wenn h die Anzahl derjenigen Substitutionen (11) der Gruppe bezeichnet, welche die Form $\psi(u_1, u_2) = c_{11}u_1^2 + 2c_{12}u_1u_2 + c_{22}u_2^2$ in sich überführen, für die also $c'_{11} = c_{11}$, $c'_{12} = c_{12}$, $c'_{22} = c_{22}$ wird. Bei „allgemeiner" Wahl von $\psi(u_1, u_2)$ wird $h = 1$.*)

§ 12.

Darstellung einer beliebigen Gruppe im Raume der positiven Hermiteschen Formen.

Die Gruppe Γ, auf welche sich die Untersuchungen in den § 4—7 beziehen, will ich nun als eine solche voraussetzen, deren Substitutionen beliebige reelle oder komplexe Werte besitzen. Der Punkt

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}, \cdots, x_{1n} \\ \vdots \\ x_{n1}, \cdots, x_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

ist jetzt im Substitutionenraume $[n^2]$ frei veränderlich bis auf die eine Einschränkung, daß er dem singulären Gebilde nicht angehören darf.

Ist

$$P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}u_\alpha u'_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n;\ a_{\alpha\beta} = a^0_{\beta\alpha}) \tag{2}$$

*) Vgl. meine Arbeit „Über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen", diese Annalen Bd. 58, p. 344 u. 345.

eine Hermitesche Form der Veränderlichen $u_1, u_2, \cdots, u_n$, so soll der Buchstabe P nicht nur zur Bezeichnung dieser Form, sondern auch zur Bezeichnung des die Form repräsentierenden Punktes im Raume der Hermiteschen Formen und auch zur Bezeichnung der aus den Koeffizienten der Form gebildeten Substitution

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

verwandt werden. Nach den Festsetzungen in § 8 sind die Gleichungen $a_{\alpha\beta} = a^0_{\beta\alpha}$ mit der einen Gleichung

$$P' = P$$

gleichbedeutend.

Jedem Punkte X des Substitutionenraumes $[n^2]$ ordne ich nun die positive Hermitesche Form

$$(4) \qquad P = \sum_{i=1}^{n} [x_{1i}u_1 + u_{2i}u_2 + \cdots + u_{ni}u_n][x^0_{1i}u^0_1 + x^0_{2i}u^0_2 + \cdots + x^0_{ni}u^0_n]$$

und damit auch den Punkt P des Raumes $\mathfrak{P}[n^2]$ der positiven Hermiteschen Formen zu. Die Koordinaten dieses Punktes P sind ersichtlich

$$(5) \qquad a_{\alpha\beta} = x_{\alpha 1}x^0_{\beta 1} + x_{\alpha 2}x^0_{\beta 2} + \cdots + x_{\alpha n}x^0_{\beta n}$$

und folglich

$$(6) \qquad P = XX'.$$

Bezeichnet S eine beliebige Substitution von nicht verschwindender Determinante und werden die Punkte X und Y des Substitutionenraumes $[n^2]$ durch die Gleichung

$$(7) \qquad Y = SX$$

voneinander abhängig gemacht, so besteht zwischen den X und Y bez. entsprechenden Punkten P und Q des Raumes $\mathfrak{P}[n^2]$ die Gleichung

$$(8) \qquad Q = SPS',$$

welche eine auf die n^2 Koordinaten von P bezügliche lineare homogene Substitution vorstellt. Wie in § 8 folgt hier, daß zwei Substitutionen S und $\bar{S}$ dann und nur dann dieselbe Substitution (8) entspricht, wenn $\bar{S} = \pm S$ ist.

Durchläuft daher S die Substitutionen der Gruppe Γ, so werden die entsprechenden Gleichungen (8) eine holoedrisch isomorphe oder eine hemiedrisch isomorphe Gruppe zu Γ definieren, je nachdem die Substitution -1 in Γ nicht enthalten oder enthalten ist. Indem ich P (und also

auch Q) in den betreffenden Gleichungen (8) auf den Raum $\mathfrak{P}[n^2]$ einschränke, bezeichne ich die durch diese Gleichungen definierte Gruppe als „Darstellung von Γ im Raume $\mathfrak{P}[n^2]$ der positiven Hermiteschen Formen".

§ 13.

Höhe und reduzierte Punkte im Raume $\mathfrak{P}[n^2]$.

Die Höhenform $\mathsf{H}(X)$, welche eine positive Hermitesche Form der Koordinaten von X vorstellt, wähle ich nun so, daß ihr Wert nur von den Koordinaten des X entsprechenden Punktes $P = XX'$ abhängt. Dies geschieht auf die allgemeinste Weise folgendermaßen:

Es sei

$$(1) \quad \psi(u) \equiv \psi(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta^0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n;\ c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}^0)$$

eine beliebig angenommene positive Hermitesche Form der n Variabeln $u_1, u_2, \cdots, u_n$; und aus dieser werde die Höhenform $\mathsf{H}(X)$ nach der Gleichung

$$(2) \qquad \mathsf{H}(X) = \psi(x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{n1}) + \cdots + \psi(x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{nn})$$

gebildet. Nach (5) in § 12 findet sich

$$(3) \qquad \mathsf{H}(X) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n),$$

wobei $(a_{\alpha\beta})$ die Koordinaten des Punktes P bedeuten. Der Wert von $\mathsf{H}(X)$ heiße deshalb auch „Höhe" des Punktes P im Raume $\mathfrak{P}[n^2]$ und werde dementsprechend auch mit $\mathsf{H}(P)$ bezeichnet. Überhaupt übertrage ich — in völliger Analogie mit den obigen auf reelle Gruppen bezüglichen Betrachtungen — die für den Substitutionenraum $[n^2]$ eingeführten Begriffe und Bezeichnungen auf den Raum $\mathfrak{P}[n^2]$ der positiven Hermiteschen Formen.

Die Untergruppe der Höhenform (2) umfaßt diejenigen Substitutionen

$$(4) \qquad T_0 = 1,\ T_1,\ T_2, \cdots, T_{h-1}$$

der Gruppe Γ, welche die Hermitesche Form (1) in sich transformieren, für die also

$$(5) \qquad \psi(Tu) = \psi(u)$$

identisch in den Variabeln $u_1, u_2, \cdots, u_n$ gilt.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des § 6 entspricht einem gereinigten System äquivalenter Punkte des Raumes $[n^2]$

$$(6) \qquad S_0 X = X,\ S_1 X,\ S_2 X, \cdots$$

das „gereinigte System äquivalenter Punkte“ des Raumes $\mathfrak{P}[n^2]$:

$$S_0 P S_0' = P,\ S_1 P S_1',\ S_2 P S_2',\ \cdots, \tag{7}$$

unter P den Punkt XX' verstanden. Einem System nicht wesentlich verschiedener Punkte des Raumes $[n^2]$

$$T_0 X = X,\ T_1 X,\ T_2 X,\ \cdots,\ T_{h-1} X \tag{8}$$

entspricht das System „nicht wesentlich verschiedener“ Punkte

$$T_0 P T_0' = P,\ T_1 P T_1',\ \cdots,\ T_{h-1} P T_{h-1}' \tag{9}$$

des Raumes $\mathfrak{P}[n^2]$. Ein solches System (9) umfaßt h oder $\frac{1}{2}h$ Punkte (die für besondere Lagen von P jedoch zum Teil zusammenfallen können), je nachdem die Gruppe Γ die Substitution -1 nicht enthält oder enthält. Die Form (1), welche die Höhe festlegt, läßt sich immer so wählen, daß $h = 1$ bez. $h = 2$ wird, daß also ein System (9) immer nur *einen* Punkt enthält und also jedes System (7) zugleich ein *vollständiges* System äquivalenter Punkte ist. Ein Punkt P ist „reduziert“, wenn in dem ihm entsprechenden System (7) kein Punkt vorkommt, dessen Höhe kleiner als die Höhe von P ist.

Zwei einander entsprechende Punkte X im Raume $[n^2]$ und $P = XX'$ im Raume $\mathfrak{P}[n^2]$ sind gleichzeitig reduziert oder nicht.

§ 14.

Fundamentalbereiche im Raume der positiven Hermiteschen Formen.

Dem Bereiche F und seinem Inneren F' des Substitutionenraumes $[n^2]$ (vgl. § 7) entspricht ein Bereich D und sein Inneres D' im Raume $\mathfrak{P}[n^2]$. Dieser Bereich D heiße „*Fundamentalbereich der Gruppe* Γ *im Raume* $\mathfrak{P}[n^2]$“. Er ist vollkommen bestimmt nach Annahme der Form $\psi(u)$ (vgl. (1) in § 13), umfaßt alle reduzierten Punkte P des Raumes $\mathfrak{P}[n^2]$ und ist also, wenn $a_{\alpha\beta}$ die Koordinaten von P, sowie $a_{\alpha\beta}^{(i)}$ die Koordinaten von $S_i P S_i'$ bezeichnen, völlig charakterisiert durch die Ungleichungen

$$\Sigma c_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \leqq \Sigma c_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^{(i)}. \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

Diese Ungleichungen sind in den Koordinaten $a_{\alpha\beta}$ des Punktes P sämtlich linear und homogen. Im übrigen brauche ich auf die weiteren Eigenschaften des Bereiches D nicht näher einzugehen, da dieselben aus den in § 7 bewiesenen Eigenschaften des Bereiches F ohne weiteres abgelesen werden können.

§ 15.

Der Fall $n = 2$.

Im Falle einer Gruppe Γ von unimodularen Substitutionen der Gestalt

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 \end{cases}$$

oder kürzer

$$(1') \qquad (y_1, y_2) = S(x_1, x_2)$$

spezialisieren sich die allgemeinen Betrachtungen folgendermaßen.

Der einzelne Punkt P des Raumes $\mathfrak{P}[n^2] = \mathfrak{P}[4]$ hat vier Koordinaten

$$(2) \qquad a_{11},\ a_{22},\ a_{12},\ a_{21},$$

welche den Bedingungen unterworfen sind, daß a_{11}, a_{22} reelle positive, a_{12} und a_{21} konjugierte Zahlen sind und daß

$$(3) \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

ist. Die Darstellung der Gruppe Γ im Raume $\mathfrak{P}[4]$ wird durch die Gleichungen

$$(4) \qquad Q = SPS'$$

oder, ausführlich geschrieben,

$$(4') \qquad \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^0 & \gamma^0 \\ \beta^0 & \delta^0 \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} die Koordinaten des Punktes Q bezeichnen.

Nach Annahme einer positiven Hermiteschen Form

$$(5) \qquad \psi(u) \equiv \psi(u_1, u_2) = c_{11}u_1u_1^0 + c_{12}u_1u_2^0 + c_{21}u_2u_1^0 + c_{22}u_2u_2^0$$

ist die Höhe des Punktes P mit den Koordinaten (2) durch

$$(6) \qquad \mathsf{H}(P) = c_{11}a_{11} + c_{12}a_{12} + c_{21}a_{21} + c_{22}a_{22}$$

definiert. Der Fundamentalbereich D umfaßt dann alle diejenigen Punkte P, welche den Ungleichungen

$$(7) \qquad \mathsf{H}(P) \leqq \mathsf{H}(Q)$$

genügen. Für Q sind hier der Reihe nach alle dem Punkte P äquivalenten Punkte zu setzen. Die Punkte P des Bereiches D sind also durch die linearen homogenen Ungleichungen

$$(7') \qquad c_{11}a_{11} + c_{12}a_{12} + c_{21}a_{21} + c_{22}a_{22} \leqq c_{11}b_{11} + c_{12}b_{12} + c_{21}b_{21} + c_{22}b_{22}$$

charakterisiert, wobei man sich b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} gemäß (4') durch a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} ausgedrückt zu denken hat.

Die Untergruppe der Höhenform besteht aus allen denjenigen Substitutionen (1) der Gruppe Γ, welche die Form (5) in sich transformieren, für welche also

$$\psi(\alpha u_1 + \beta u_2, \gamma u_1 + \delta u_2) \equiv \psi(u_1, u_2)$$

wird, oder, was auf dasselbe hinauskommt, für welche

$$\begin{pmatrix} c_{11}, c_{12} \\ c_{21}, c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\, \gamma \\ \beta\, \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}, c_{12} \\ c_{21}, c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^0\, \beta^0 \\ \gamma^0\, \delta^0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

wird.

Die anschaulichste Darstellung des Fundamentalbereiches D erhält man, indem man den Raum $\mathfrak{P}[4]$ folgendermaßen auf das Innere der Kugel K:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{9}$$

abbildet. Man ordnet dem Punkte $P(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ denjenigen Punkt $\overline{P}$ im gewöhnlichen Raume zu, dessen rechtwinklige Koordinaten x, y, z durch die Proportion

$$a_{11} : a_{22} : a_{12} : a_{21} = 1 - z : 1 + z : x + iy : x - iy \tag{10}$$

bestimmt sind. Nach (3) befriedigen die Koordinaten von $\overline{P}$ die Ungleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1,$$

d. h. $\overline{P}$ liegt im Inneren der Kugel K. Umgekehrt entsprechen einem Punkte $\overline{P}$ unendlich viele Punkte P, deren Koordinaten aber zueinander proportional sind, und welche daher sämtlich reduziert sind, wenn es einer unter ihnen ist. Ein Punkt $\overline{P}$ heiße reduziert, wenn ihm ein reduzierter Punkt P im Raume $\mathfrak{P}[4]$ entspricht. Die Gesamtheit der reduzierten Punkte $\overline{P}$ bilden den (der Form $\psi(u_1, u_2)$ entsprechenden) „Fundamentalbereich $\overline{D}$“ der Gruppe Γ, und dieser ist das Bild des Bereiches D. Der Bereich $\overline{D}$ wird durch die aus (7′) hervorgehenden linearen Ungleichungen völlig charakterisiert und besteht aus einem einzigen, ausschließlich durch Ebenen begrenzten Stücke des Kugelinneren.

Die bekannte Abbildung des Kugelinneren auf den Halbraum $z > 0$, bei welcher Ebenen in Kugeln übergehen, führt zu den ursprünglich von Poincaré betrachteten Fundamentalpolyedern.*)

*) Vgl. für diesen Paragraphen Fricke-Klein, l. c. p. 53 ff. und Poincaré, Mémoire sur les groupes kleinéens. Acta mathematica, t. 3, p. 49. — Der Begriff der Höhe steht, entsprechend den Ausführungen in § 11, in einfachem Zusammenhang mit der Cayleyschen Maßbestimmung im Inneren der Kugel K.

§ 16.

Die Picardsche Gruppe.

Als Beispiel möge hier die Konstruktion eines Fundamentalbereiches der Picardschen Gruppe folgen, d. h. derjenigen Gruppe, welche aus den sämtlichen unimodularen Substitutionen

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 \end{cases}$$

besteht, deren Koeffizienten α, β, γ, δ Gaußsche komplexe ganze Zahlen sind.

Die Form $\psi(u_1, u_2)$ sei durch

$$(2) \qquad \psi(u_1, u_2) = u_1 u_1^0 + u_2 u_2^0$$

definiert, so daß

$$c_{11} = c_{22} = 1, \quad c_{12} = c_{21} = 0$$

ist. Die Höhe des Punktes P mit den Koordinaten a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} ist demnach

$$(3) \qquad \mathsf{H}(P) = a_{11} + a_{22}.$$

Die Untergruppe der Höhenform besteht (nach (8) des vorigen Paragraphen) aus denjenigen Substitutionen (1), für welche

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \gamma \\ \beta, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^0 & \beta^0 \\ \gamma^0 & \delta^0 \end{pmatrix} = 1,$$

d. i.

$$(4) \qquad \alpha\alpha^0 + \gamma\gamma^0 = 1, \ \alpha\beta^0 + \gamma\delta^0 = \beta\alpha^0 + \delta\gamma^0 = 0, \ \beta\beta^0 + \delta\delta^0 = 1$$

ist. Diesen Bedingungen genügen, wie man sofort konstatiert, die 8 Substitutionen

$$(5) \qquad \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \pm \begin{pmatrix} 0, & i \\ i, & 0 \end{pmatrix},$$

welche also die in Rede stehende Gruppe Γ_h bilden. Die Ordnung h ist hier also 8.

Der Fundamentalbereich D wird (nach (7′) des vorigen Paragraphen) durch die Ungleichungen

$$(6) \qquad a_{11} + a_{22} \leqq b_{11} + b_{22},$$

d. i.

$$(6') \qquad a_{11} + a_{22} \leqq (\alpha\alpha^0 + \gamma\gamma^0)a_{11} + (\alpha\beta^0 + \gamma\delta^0)a_{12} + (\beta\alpha^0 + \delta\gamma^0)a_{21} + (\beta\beta^0 + \delta\delta^0)a_{22}$$

charakterisiert, welche den sämtlichen Substitutionen (1) entsprechen.

Das Innere D' von D wird durch die Ungleichungen

$$(7) \qquad a_{11} + a_{22} < (\alpha\alpha^0 + \gamma\gamma^0)a_{11} + (\alpha\beta^0 + \gamma\delta^0)a_{12} + (\beta\alpha^0 + \delta\gamma^0)a_{21} + (\beta\beta^0 + \delta\delta^0)a_{22}$$

charakterisiert, welche den sämtlichen Substitutionen (1) mit Ausschluß der acht Substitutionen (5) entsprechen.

Nimmt man in (7) für $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ der Reihe nach die acht Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1, & \pm 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \pm 1, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & \pm i \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \pm i, & 1 \end{pmatrix},$$

so ergeben sich die acht Ungleichungen:

$$(8) \quad a_{22} > \pm (a_{21} + a_{12}), \quad a_{11} > \pm (a_{21} + a_{12}), \quad a_{22} > \pm i(a_{12} - a_{21}),$$
$$a_{11} > \pm i(a_{12} - a_{21}).$$

Eine leichte Diskussion zeigt nun, daß die sämtlichen Ungleichungen (7) erfüllt sind, sobald nur die acht Ungleichungen (8) bestehen. Mit anderen Worten:

Das Innere D' des Fundamentalbereiches D ist durch die Ungleichungen (8) vollständig charakterisiert.

Geht man auf das Innere der Kugel K

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

über, so transformieren sich die Ungleichungen (8) in

$$1 + z > \pm 2x, \quad 1 - z > \pm 2x, \quad 1 + z > \pm 2y, \quad 1 - z > \pm 2y,$$

d. h.:

Der Fundamentalbereich $\overline{D}$ ist das von den acht Ebenen

$$1 \pm z \pm 2x = 0, \quad 1 \pm z \pm 2y = 0$$

begrenzte Oktaeder.

Da die Ordnung der Gruppe Γ_4 gleich 8 ist und die Gruppe Γ die Substitution -1 enthält, so sind die Punkte im Inneren des Oktaeders zu je vier („nicht wesentlich verschiedenen") (x, y, z), $(-x, -y, z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$ einander äquivalent.*)

§ 17.

Schlußbemerkungen.

Das in der Einleitung angegebene Ziel, eine allgemeine Methode zur Herstellung eines Fundamentalbereiches für eine gegebene Gruppe ohne infinitesimale Substitutionen zu entwickeln, glaube ich im vorstehenden erreicht zu haben. Als eines der Hauptergebnisse meiner Untersuchung

*) Vgl. die Herstellung des Fundamentalbereiches der Picardschen Gruppe bei Fricke-Klein, l. c. p. 79 ff., sowie in meines Schülers O. Bohler Dissertation: „Über die Picardschen Gruppen aus dem Zahlkörper der dritten und der vierten Einheitswurzel" (Zürich 1905), in welcher auch die zahlentheoretischen Anwendungen des Fundamentalbereiches ins einzelne durchgeführt sind.

betrachte ich die Tatsache, daß im Raume der positiven quadratischen bez. der positiven Hermiteschen Formen stets Fundamentalbereiche von den oben bewiesenen Eigenschaften existieren, die durch ein System von linearen homogenen Ungleichungen charakterisiert sind, welche explizite aus den Substitutionen der Gruppe sofort hingeschrieben werden können. Eine weitere Untersuchung dieser Ungleichungen würde die nächste sich bietende Aufgabe sein. Dabei steht im Vordergrunde des Interesses die Frage, wie man aus dem Systeme von Ungleichungen die wesentlichen, aus denen alle übrigen folgen, auszuscheiden hat und wann insbesondere (wie z. B. im Falle der Picardschen Gruppe) diese wesentlichen Ungleichungen in endlicher Anzahl vorhanden sind (wann der Fundamentalbereich durch eine endliche Anzahl von Ebenen begrenzt wird). Ist letzteres der Fall, so besitzt ersichtlich die Gruppe eine endliche Zahl von erzeugenden Substitutionen. Tritt an die Stelle der Gruppe Γ eine endliche Gruppe, in welchem Falle die oben durchgeführten Untersuchungen anwendbar bleiben, so wird die aufgeworfene Frage vollkommen erledigt durch die Entwicklungen, welche H. Minkowski in Kap. I § 19 seiner „Geometrie der Zahlen“ (Leipzig 1896) mitgeteilt hat.

Schließlich möchte ich noch auf die inhaltsreiche Abhandlung von Guido Fubini „Sulla teoria dei gruppi discontinui“ hinweisen, die in dem kürzlich (April 1905) erschienenen Hefte der Annali di Matematica veröffentlicht ist. In dieser Abhandlung wird unter anderem, und zwar im wesentlichen auf Grund derselben Hilfssätze, die ich oben in den §§ 2 und 4 angegeben habe, der Nachweis geführt, daß jede Gruppe Γ ohne infinitesimale Substitutionen in dem Raume $\mathfrak{P}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ bez. $\mathfrak{P}[n^2]$ „eigentlich diskontinuierlich“ ist, d. h. daß in einer genügend kleinen Umgebung eines beliebigen Punktes des bez. Raumes keine zwei bezüglich der Gruppe äquivalente Punkte vorhanden sind. Dagegen wird die Frage der Konstruktion und Eigenart der Fundamentalbereiche, welche den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit bildet, von Herrn Fubini nicht behandelt. Übrigens ist diese Frage am Schlusse der vier in den Bänden 38, 40, 42 und 43 dieser Annalen veröffentlichten Abhandlungen aufgestellt worden, in welchen Herr L. Bianchi äußerst wertvolles Material zur Theorie der linearen Substitutionen mit komplexen Koeffizienten gibt.

Zürich, 5. Mai 1905.

Nachdem die vorstehende Arbeit schon in den Händen der Redaktion der Annalen war, erhielt ich durch die Freundlichkeit des Herrn G. Fubini auch Kenntnis von einem früheren Aufsatze „Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e dei sistemi di tali forme“ (Atti dell' Accademia

Gioenia 1903), in welchem er auf S. 21 die Herstellung des Fundamentalpolyeders für Kollineationsgruppen nach einer analogen Methode bespricht, wie sie Herr R. Fricke (l. c.) bei seinen „Normalpolygonen“ verwendet hat. Auch in der inzwischen erschienenen Abhandlung von E. Study „Kürzeste Wege im komplexen Gebiet“ (diese Annalen, Bd. 60) wird die Bildung der Fundamentalbereiche, insbesondere für endliche Kollineationsgruppen, beiläufig behandelt (S. 365—367). In bezug auf endliche Gruppen möchte ich hier noch die Bemerkung anfügen, daß die Herstellung des Fundamentalbereiches für diese Gruppen keinerlei besondere Theorien verlangt, sondern auf folgendem ganz elementaren Wege geschehen kann. Man bilde eine Linearform der Koordinaten eines frei veränderlichen Punktes desjenigen Raumes, in welchem die Kollineationsgruppe betrachtet wird. Diese Linearform sei so gewählt, daß sie durch keine einzige Kollineation der Gruppe in sich übergeht. Als „Höhe“ eines Punktes sei derjenige Wert bezeichnet, welchen die Linearform in dem betreffenden Punkte besitzt, und „reduziert“ heiße ein Punkt, dessen Höhe in algebraischem Sinne nicht größer als die Höhe jedes ihm äquivalenten Punktes ist. Dann bilden offenbar alle reduzierten Punkte einen von Ebenen begrenzten Fundamentalbereich der Gruppe.

Zürich, 3. Juli 1905.

Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen.

Von

F. Klein in Göttingen.

Nachdem letzthin in diesen Annalen (wie vorher im Journal für Mathematik*)) von der Zurückführung der Auflösung der Gleichungen fünften Grades auf die Ikosaedergleichung erneut die Rede gewesen ist, interessiert vielleicht ein besonders anschaulicher Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung — und also der allgemeinen Gleichungen fünften Grades — durch Wurzelzeichen. Dieser Beweis benutzt den einfachen Umstand, daß die Wurzeln $z_1, z_2, \cdots, z_{60}$ der Ikosaedergleichung als Funktionen des Ikosaederparameters Z in charakteristischer Weise verzweigt sind, nämlich so, daß von den Blättern der zugehörigen Riemannschen Fläche bei $Z = 0$ je 3, bei $Z = 1$ je 2, bei $Z = \infty$ je 5 miteinander im Zyklus zusammenhängen, andere Verzweigungen aber nicht auftreten.

Wir müssen uns zuerst den Abelschen Satz in Erinnerung rufen, daß, im Falle eine Gleichung durch Wurzelzeichen lösbar ist, man allen bei der Auflösung auftretenden Wurzelgrößen eine solche Form geben kann, daß sie rationale Funktionen der Wurzeln $z_1, \cdots, z_n$ der vorgelegten Gleichung vorstellen.

Nehmen wir nun an, daß die Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen lösbar sei, und richten unsere Aufmerksamkeit insonderheit auf die *innerste* dabei auftretende Wurzelgröße! Dieselbe ist, eben weil sie die innerste Wurzelgröße ist, aus einer rationalen Funktion von Z, welche $R(Z)$ heißen mag, gezogen. Wir wollen den Grad der Wurzel, was der Allgemeinheit unseres Ansatzes keinen Eintrag tut und hinterher eine einfachere Ausdrucksweise gestattet, als Primzahl p nehmen. Bemerken wir noch, daß

*) Bd. 129: Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades (aus einem Briefe an Hrn. K. Hensel in Marburg); abgedruckt in Bd. 61 dieser Annalen.

$R(Z)$ gewiß keine p^{te} Potenz ist; sonst würde man $\sqrt[p]{R(Z)}$ nicht als innerste vorkommende Wurzel mitrechnen. Nun soll $\sqrt[p]{R(Z)}$ nach dem Abelschen Satze gleich einer rationalen Funktion der Wurzeln $z_1, z_2, \cdots, z_{60}$ der Ikosaedergleichung sein:

$$\sqrt[p]{R(Z)} = r(z_1, z_2, \cdots, z_{60}).$$

Ich sage, daß hierin bereits ein Widerspruch liegt und zwar wegen der Verzweigung der $z_1, z_2, \cdots, z_{60}$ in bezug auf Z.

Aus dieser Verzweigung folgt nämlich sofort, daß r als Funktion von Z wieder nur bei $Z = 0, 1, \infty$ verzweigt sein kann und zwar nur so, daß Blätter, die bei $Z = 0$ nicht isoliert verlaufen, zu je 3 im Zyklus zusammenhängen, Blätter, die bei $Z = 1$ verzweigt sind, zu je 2, und Blätter, die es bei $Z = \infty$ sind, zu je 5. *Eine solche Verzweigung kann aber bei einer Funktion $\sqrt[p]{R(Z)}$ nie auftreten.*

Um dies möglichst präzis zu fassen, schreiben wir für Z homogen machend $Z_1 : Z_2$, spalten dann $R(Z_1/Z_2)$ in Zähler und Nenner:

$$R = \frac{\varphi(Z_1, Z_2)}{\psi(Z_1, Z_2)},$$

wo φ, ψ teilerfremde Polynome desselben Grades sein werden, und zerlegen φ, ψ in ihre Linearfaktoren. Wir erhalten so etwa

$$\varphi = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \cdots l_\mu^{\alpha_\mu}, \quad \psi = m_1^{\beta_1} m_2^{\beta_2} \cdots m_\nu^{\beta_\nu},$$

wo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\mu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu$$

sein wird. Die Blätter der zu $\sqrt[p]{R(Z)}$ gehörigen Riemannschen Fläche werden überall da, wo ein Linearfaktor l oder m verschwindet, dessen Multiplizität α bez. β *nicht* durch p teilbar ist, alle p im Zyklus zusammenhängen, andere Verzweigungen aber nicht aufweisen.

Nun ist die Sache die, daß von Verzweigungsstellen der in Rede stehenden Art notwendig mindestens 2 auftreten. In der Tat: aus der für die α, β geltenden Gleichung schließen wir auf das Bestehen der Kongruenz

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\mu \equiv \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu \pmod{p},$$

und eine solche Kongruenz kann — wenn nicht alle α, β einzeln durch p teilbar sind, was auszuschließen ist, weil dann $R(Z)$ eine p^{te} Potenz sein würde — nur so statthaben, daß mindestens zwei der Zahlen α, β nicht durch p teilbar sind.

Die Funktion $\sqrt[p]{R(Z)}$ hat also in der Tat eine Verzweigung, welche mit derjenigen einer Funktion $r(z_1, z_2, \cdots, z_{60})$ niemals übereinstimmen kann.

Offenbar gewinnen wir durch die so formulierte Überlegung gleich einen allgemeineren Satz. Es sei $f(z, Z) = 0$ eine algebraische Gleichung

für z, die den Parameter Z rational enthält. Als Funktion von Z seien die Wurzeln z bei $Z = A, B, C, \cdots$ verzweigt. Bei $Z = A$ möge eine Anzahl von Blättern zu je $\varkappa_1$ zusammenhängen, andere zu je $\varkappa_2$ usw. usw. Ich bilde mir das kleinste gemeinsame Multiplum der Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots$ und nenne es $\varkappa$. Eine entsprechende Bedeutung mögen für die Verzweigungsstelle $Z = B$ die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ bez. λ, für die Verzweigungsstelle $Z = C$ die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \cdots$ bez. μ haben. *Die vorgelegte Gleichung ist gewiß nicht durch Wurzelzeichen lösbar, wenn die Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu, \cdots$ alle relativ prim sind.*

Juist, den 26. August 1905.

Zur Theorie der n^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. II. Über n^{te} Normenreste.

Von

W. LIETZMANN in Schoeneberg bei Berlin.

Einleitung.

Wir verstehen im folgenden unter dem Grundkörper k einen beliebigen algebraischen Oberkörper des Körpers der n^{ten} Einheitswurzel. Für den Fall, daß n genau durch die h_1^{te} Potenz von 2 teilbar, von der Geradheit h_1 ist, setzen wir k als Oberkörper auch des $2^{h_1+1\text{ten}}$ Kreiskörpers voraus. (Läßt man diese im allgemeinen nicht wesentliche Annahme fallen, dann nimmt Def. 2 eine etwas kompliziertere Fassung an; siehe Anm.**), pg. 376.) Die Zerlegung der Zahl n in rationale Primfaktoren*) sei

$$n = l_1^{h_1} l_2^{h_2} \cdots l_e^{h_e}.$$

Den Mittelpunkt einer Theorie des relativ-zyklischen Körpers $K(\sqrt[n]{\mu})$,

*) Wir nehmen damit eine kleine Änderung gegenüber der 1. Abhandlung vor: siehe W. Lietzmann, Zur Theorie der n^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. Math. Ann. Bd. 60, p. 263 ff. (Zitiert mit I.)

Wir benutzen die Gelegenheit, um eine Unrichtigkeit dieser Arbeit richtig zu stellen. Die in Satz 8 und der Folgerung ausgesprochene Bedingung ist nur eine hinreichende, nicht eine notwendige. Aus diesem Grunde muß der zweite Teil der Definition 3 die allgemeinere Fassung erhalten: „Ist $\left(\frac{\mu}{l_1}\right)_{l_i^{h_i}} \neq 1$, so ist $\left(\frac{\mu}{l_1}\right)_{l_i^{h_i}}$ eine primitive $l_i^{k_i\text{te}}$ Einheitswurzel, wenn $\left(\frac{\mu}{l_1}\right)_{l_i^{h_i-k_i}} = +1$, jedoch $\left(\frac{\mu}{l_1}\right)_{l_i^{h_i-k_i+1}} \neq 1$ ist. Ist die Relativdiskriminante von $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ teilbar durch l_1, dann setzen wir $\left(\frac{\mu}{l_1}\right)_{l_i^{h_i}} = 0$.“ Diese allgemeinere Fassung hat zur Folge, daß in den Sätzen 7 und 9 die Beschränkung auf die $l_i^{h_i\text{ten}}$ und $l_i^{h_i-1\text{ten}}$ Nebenstrahlen und in den Sätzen III der Anwendung die Bedingungen $\left(\frac{\lambda}{m}\right)_{l_i^{h_i}} = \zeta$ fortfallen.

eine ganze Zahl im Grundkörper k, würde das Reziprozitätsgesetz der ^{n} Potenzreste bilden. Ein Hilfsbegriff zu dessen Beweis, gleichzeitig ch ein Mittel, das Gesetz übersichtlich in seiner allgemeinsten Form szusprechen, ist das Normenrestsymbol. Von diesem geht dann für n Fall zu n primer Klassenzahl in k über den Begriff des Geschlechts ıweg der Weg zum Beweise des Reziprozitätsgesetzes, zunächst für ıen speziellen Fall, für sogenannte primäre Zahlen. Die folgenden Aus-ırungen beschäftigen sich mit dem Normenrestsymbol. Das Fortschreiten analog dem beim Potenzrestsymbol. Wie dort mit dem Potenzrest-griff, so beginnen wir hier mit dem Normenrestbegriff (Definition 1) d geben eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß ıe Zahl in einem relativ-zyklischen Körper vom Relativgrade n nach ıem beliebigen Primideal Normenrest ist. (Satz 1, 2.) Dann gehen wir e früher zum Potenzrestsymbol, so jetzt zum Normenrestsymbol (Defi-ion 2, 3, 4) über. Die Ausführungen zeigen, daß auch die Theorie r Normenreste und n^{ter} Normenrestsymbole mit derjenigen $l_i^{h_i\,ter}$ erledigt . (Satz 1, 3.) Eine Anwendung dessen ist es, daß das allgemeinste ziprozitätsgesetz n^{ter} Potenzreste zugleich mit dem der $l_i^{h_i\,ten}$ bewiesen (pg. 380). In der Theorie der Potenzreste ist der zwischen Potenzrest d Wert des Potenzrestsymbols bestehende Parallelismus leicht zu zeigen. ır entsprechende Nachweis für Normenreste ist langwieriger und wird ır zunächst nur für Primideale geführt, welche prim zu n sind. Dieser ıuptsatz der Theorie n^{ter} Normenreste ist Aufgabe des letzten Teils der beit. (Satz 5.)

§ 1.

Der Begriff des n^{ten} Normenrestes.

Definition 1. Es seien ν und μ zwei ganze Zahlen des Grund-rpers k, μ jedoch nicht $l_1, l_2, \cdots, l_e^{te}$ Potenz einer Zahl in k; $\mathfrak{w}$ sei ı Primideal in k. Ist dann nach jeder beliebig vorschreibbaren positiven nzen rationalen Potenz von $\mathfrak{w}$ als Modul ν der Relativnorm einer ent-rechend gewählten ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt[n]{\mu})$, die Relativnorm $K(\sqrt[n]{\mu})$ bezüglich k genommen, kongruent, dann heißt ν *ein* n^{ter} *rmenrest in* $K(\sqrt[n]{\mu})$ *nach* $\mathfrak{w}$.

Dieser Definition entsprechend können wir von $l_i^{h_i\,ten}$ und ebenso von ^{en} Normenresten sprechen, wo $0 < b_i < h_i$, $i = 1, 2, \cdots, e$ ist. Man ennt leicht

Satz 1. Notwendig und hinreichend dafür, daß ν ein n^{ter} Normen-ıt in $K(\sqrt[n]{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$ ist, ist die Bedingung, daß μ gleichzeitig $l_1^{h_1\,ter}, l_2^{h_2\,ter}, \cdots$ $l_e^{h_e\,ter}$ Normenrest bezw. in den Körpern $K(\sqrt[h_1]{\mu})$, $K(\sqrt[h_2]{\mu}), \cdots, K(\sqrt[h_e]{\mu})$ ch $\mathfrak{w}$ ist.

Wir schließen an Definition 1 zwei Bemerkungen an:

1. Alle n^{ten} Normenreste in $K(\sqrt[n]{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$ bilden in ihrer Gesamtheit einen Zahlstrahl, wir nennen ihn den *Hauptstrahl der n^{ten} Normenreste.* Ebenso bilden die $l_i^{h_i\text{te}}$ Normenreste in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$, $(i=1,2,\cdots,e)$, einen Zahlstrahl, wir nennen ihn *den $l_i^{h_i\text{ten}}$ Nebenstrahl der n^{ten} Normenreste.* In analoger Weise können wir schließlich noch von $l_i^{b_i\text{ten}}$ $(0<b_i<h_i, i=1,2,\cdots,e)$ Nebenstrahlen der n^{ten} Normenreste sprechen. Der Hauptstrahl baut sich aus diesen Nebenstrahlen in genau der gleichen Weise auf, wie wir das beim Hauptstrahl der n^{ten} Potenzreste gesehen haben. (Vergl. I, § 2, pg. 264.)

2. Wir setzten bisher von μ voraus, es sei keine $l_1, l_2, \cdots, l_e^{\text{te}}$ Potenz einer Zahl in k. Wir lassen diese Einschränkung jetzt fallen, indem wir die folgende Ergänzung zur Definition 1 geben: Es sei μ die $l_i^{h_i-k_i\text{te}}$ Potenz einer Zahl μ' des Körpers k, also

$$\mu = \mu'^{l_i^{h_i-k_i}}.$$

Darin sei die positive ganze rationale Zahl k_i entweder $=0$ oder, falls $k_i>0$ ist, so gewählt, daß μ nicht mehr die $l_i^{h_i-k_i+1\text{te}}$ Potenz einer Zahl in k wird. Dann sagen wir, ν ist ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$, wenn ν ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{k_i}]{\mu'})$ nach $\mathfrak{w}$ ist. Im Falle $k_i=0$ ist ν stets $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest. Daraus ergibt sich dann die Definition des n^{ten} Normenrestes auch für den in Definition 1 ausgeschlossenen Fall. Entsprechend definieren wir $l_i^{b_i\text{te}}$ Normenreste $(0<b_i<h_i)$ und haben dann eine für alle Fälle gültige Definition des Normenrestbegriffes gegeben.

Satz 2. Es seien ν und μ zwei ganze Zahlen des Körpers k, μ sei jedoch nicht l_i^{te} Potenz einer Zahl in k, ferner sei ξ_i eine $l_i^{h_i\text{te}}$ primitive Einheitswurzel und $\mathfrak{p}$ ein zu $1-\xi_i$ primes Primideal in k, das in ν genau zur b^{ten} Potenz aufgeht. Dann ist *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ν ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ ist,* die Existenz einer ganzen Zahl A des Körpers $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$, welche der Kongruenz

$$\nu \equiv n_{k,\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}(\mathsf{A}) \quad (\mathfrak{p}^{b+1}) \tag{1}$$

genügt.

Ist andererseits $\mathfrak{l}$ ein in $1-\xi_i$ genau zur l^{ten}, in ν genau zur b^{ten} Potenz aufgehendes Primideal des Körpers k, dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ν ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{l}$ ist, die Existenz einer ganzen Zahl A des Körpers $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$, welche der Kongruenz

(2) $$\nu \equiv n \underset{k,\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}{}(\mathsf{A}) \quad \left(\mathfrak{l}^{l_i^{h_i-1}(l_i+(h_i-1)(l_i-1))+b'+1}\right)$$

genügt.

Beweis. Die angegebenen Bedingungen sind notwendig, das lehrt Definition 1. Sie sind aber auch hinreichend, wie man beweist, indem man bei beliebig vorgeschriebener ganzer rationaler Potenz m von $\mathfrak{p}$ bezw. $\mathfrak{l}$ die Existenz einer ganzen Zahl A' in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nachweist, deren Relativnorm nach der vorgeschriebenen m^{ten} Potenz von $\mathfrak{p}$ bezw. $\mathfrak{l}$ der Zahl ν kongruent ist. Wir nehmen zunächst $b = 0$ an, können also im Falle der ersten Aussage $m > 1$ voraussetzen. Wir bestimmen eine ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl A^* in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ derart, daß

(3) $$\mathsf{A}\mathsf{A}^* \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}^m)$$

wird. Dann wird wegen (1)

$$n \underset{k,\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}{}(\mathsf{A}^*) \cdot \nu \equiv 1 \quad (\mathfrak{p}).$$

Nach I, Satz 1 pg. 265 folgt daraus die Existenz einer ganzen Zahl β des Körpers k, welche der Kongruenz

$$n \underset{k,\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}{}(\mathsf{A}^*) \cdot \nu \equiv \beta^{l_i^{h_i}} \quad (\mathfrak{p}^m)$$

genügt. Benutzt man jetzt wieder (3), so folgt, was wir beweisen wollten:

(4) $$\nu \equiv n \underset{k,\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}{}(\mathsf{A} \cdot \beta) \quad (\mathfrak{p}^m).$$

Ist $b \neq 0$, dann ist es immer möglich, eine ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl

$$\nu' = \frac{\nu}{\pi} \varrho^{l_i^{h_i}}$$

im Grundkörper k zu bestimmen, wo π die Relativnorm einer ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ und ϱ eine ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl des Grundkörpers ist. Für ν' erhält man dann eine Kongruenz der Gestalt (4) und daraus folgt, daß wie ν' auch ν der Relativnorm einer ganzen Zahl in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}^m$, wo jetzt $m > b + 1$ ist, kongruent ist.

Wie im Falle eines zu l_i primen Primideales verfährt man beim Beweise des zweiten Teiles, indem man dabei I, Satz 2 pg. 266 anwendet.

Auf Grund des eben bewiesenen Satzes ist für Normenreste jeden Grades und nach jedem Primideal des Grundkörpers die notwendige und hinreichende Bedingung anzugeben.

§ 2.

Das Normenrestsymbol.

Definition 2. Es sei, wenn $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_e$ wie bisher bezw. $l_1^{b_1^{te}}, l_2^{b_2^{te}}, \cdots, l_e^{b_e^{te}}$ primitive Einheitswurzeln sind, $\mathfrak{p}$ ein zu $1-\xi_1, 1-\xi_2, \cdots, 1-\xi_e$ primes Primideal in k, welches in den ganzen Zahlen ν und μ desselben Körpers genau zur b^{ten} bezw. a^{ten} Potenz aufgeht. Man wähle nun zwei zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahlen ϱ und σ in k so aus, daß

$$\frac{\nu^a}{\mu^b} = \frac{\varrho}{\sigma}$$

ist. Dann *definieren wir das Symbol* $\left|\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right|$ *durch die Gleichung*

$$\left|\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right| = \left|\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right| \cdot \left|\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right|^{-1}. \tag{1}$$

Das so definierte Symbol nennen wir aus Gründen, die mit Satz 5 klar werden, *das n^{te} Normenrestsymbol.**)

Gemäß dieser Definition erhalten wir für die $l_1^{b_1^{ten}}, l_2^{b_2^{ten}}, \cdots, l_e^{b_e^{ten}}$ Normenrestsymbole die Gleichungen

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{b_i}} = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{b_i}} \cdot \left(\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{b_i}}^{-1} \tag{2}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, e).$$

Entsprechende Definitionen erhält man für $l_i^{b_i^{te}}$ Normenrestsymbole, wo $0 < b_i < h_i$, $i = 1, 2, \cdots, e$ ist.**)

*) Einfacher könnte man die Definition so formulieren:

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\nu^a \cdot \mu^{b(n-1)}}{\mathfrak{p}}\right\},$$

wenn man bedenkt, daß der Zähler des Potenzrestsymboles — wenn dieser Ausdruck gestattet — durch die $a \cdot b \cdot n^{te}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar ist, und die Definition des Potenzrestsymboles (vergl. I, Def. 2, pg. 267) für denjenigen Fall heranzieht, wo der Zähler durch ein Vielfaches der n^{ten} Potenz des Nenners teilbar ist.

**) Ist $l_1 = 2$, so ist im Falle, wo der Grundkörper nicht den Körper der $l_1^{h_1+1^{ten}}$, sondern nur den der $l_1^{h_1^{ten}}$ Einheitswurzel enthält (vergl. pg. 372), die Definition

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_1^{h_1}} = \left(\frac{\varrho \cdot \sigma^{-1} \cdot (-1)^{a \cdot b}}{\mathfrak{p}}\right)_{l_1^{h_1}}$$

zu setzen. Enthält, wie wir annahmen, k auch den Körper der $l_1^{h_1+1^{ten}}$ Einheitswurzel, dann fällt das Glied $\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)_{l_1^{h_1}}^{a \cdot b}$ weg, da sein Wert immer $+1$ ist.

Satz 3. *Zwischen dem n^{ten} und den $l_i^{h_i\,\text{ten}}$ $(i=1,2,\cdots,e)$ Normenrestsymbolen besteht die Beziehung*

$$\left\{\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right\} = {}_{l_1^{h_1}}\!\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{a_1} \cdot {}_{l_2^{h_2}}\!\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{a_2} \cdots {}_{l_e^{h_e}}\!\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{a_e}, \tag{3}$$

wo die ganzen rationalen Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_e$ den Kongruenzen

$$\begin{aligned} a_1 l_2^{h_2} \cdot l_3^{h_3} \cdots l_e^{h_e} &\equiv 1 \ (l_1^{h_1}), \\ a_2 l_1^{h_1} \cdot l_3^{h_3} \cdots l_e^{h_e} &\equiv 1 \ (l_2^{h_2}), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_e l_1^{h_1} \cdot l_2^{h_2} \cdots l_{e-1}^{h_{e-1}} &\equiv 1 \ (l_e^{h_e}) \end{aligned} \tag{4}$$

genügen.

Beweis. Nach dem in I, § 3 pg. 268 Abgeleiteten ist

$$\begin{aligned} \left\{\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right\} &= {}_{l_1^{h_1}}\!\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^{a_1} \cdot {}_{l_2^{h_2}}\!\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^{a_2} \cdots {}_{l_e^{h_e}}\!\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^{a_e}, \\ \left\{\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right\} &= {}_{l_1^{h_1}}\!\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right)^{a_1} \cdot {}_{l_2^{h_2}}\!\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right)^{a_2} \cdots {}_{l_e^{h_e}}\!\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right)^{a_e}, \end{aligned} \tag{5}$$

wo $a_1, a_2, \cdots, a_e$ den Kongruenzen (4) genügen. Aus den Gleichungen (1), (2), (5) folgt jetzt sofort die Beziehung (3), (4).

Die Behandlung n^{ter} Normenrestsymbole, soweit diese bisher definiert sind, ist mit Satz 3 auf diejenige $l_i^{h_i\,\text{ter}}$ Normenrestsymbole zurückgeführt.

Wir fügen wieder zwei den bei der Definition 1 gemachten analoge Bemerkungen an:

1. Es liege ein $l_i^{h_i\,\text{tes}}$ Normenrestsymbol ${}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ vor. Ist dann μ die $l_i^{h_i-k_i\,\text{te}}$ Potenz einer Zahl in k, wo k_i eine ganze rationale Zahl $\geqq 0$ und $\leqq h_i$ ist, ist also etwa

$$\mu = \mu'^{\,l_i^{h_i-k_i}},$$

dann wird, wie aus der Definition zu entnehmen,

$${}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right) = {}_{l_i^{k_i}}\!\left(\frac{\nu,\mu'}{\mathfrak{p}}\right).$$

Ist andererseits ν die $l_i^{h_i-k_i\,\text{te}}$ Potenz einer Zahl in k, etwa

$$\nu = \nu'^{\,l_i^{h_i-k_i}},$$

dann wird entsprechend

$${}_{l_i^{h_i}}\!\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right) = {}_{l_i^{k_i}}\!\left(\frac{\nu',\mu}{\mathfrak{p}}\right).$$

Bevor wir zur zweiten Bemerkung übergehen, müssen wir einen für das Rechnen mit Normenrestsymbolen wichtigen Satz einschalten:

Satz 4. Es seien ν, μ, ν', μ', ν^*, μ^* ganze Zahlen in k, und unter ihnen seien ν^* und μ^* so beschaffen, daß die Quotienten $\frac{\nu}{\nu^*}$ und $\frac{\mu}{\mu^*}$ n^{te} Potenzen von Zahlen in k sind. Dann gelten die folgenden Formeln für die Normenrestsymbole:

(1) $$\left\{\frac{\mu, \mu}{\mathfrak{p}}\right\} = +1,$$

(2) $$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right\} \cdot \left\{\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{p}}\right\} = +1,$$

(3) $$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right\} \cdot \left\{\frac{\nu', \mu}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\nu \cdot \nu', \mu}{\mathfrak{p}}\right\},$$

(4) $$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right\} \cdot \left\{\frac{\nu, \mu'}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\nu, \mu \cdot \mu'}{\mathfrak{p}}\right\},$$

(5) $$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right\}.$$

Beweis. Die Formeln (1) und (2) gibt die Definition 2 an die Hand. Um (3) zu beweisen, setzen wir voraus, μ, ν, ν' seien genau durch die bezw. a, b, b'^{ten} Potenzen von $\mathfrak{p}$ teilbar. Ist dann

$$\frac{\nu^a}{\mu^b} = \frac{\varrho_1}{\sigma_1}; \qquad \frac{\nu'^a}{\mu^{b'}} = \frac{\varrho_2}{\sigma_2},$$

also

$$\frac{(\nu \cdot \nu')^a}{\mu^{b+b'}} = \frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2}{\sigma_1 \cdot \sigma_2},$$

dann liefert Definition 2 die Gleichung

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right\} \cdot \left\{\frac{\nu', \mu}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\varrho_1}{\mathfrak{p}}\right\} \cdot \left\{\frac{\sigma_1}{\mathfrak{p}}\right\}^{-1} \cdot \left\{\frac{\varrho_2}{\mathfrak{p}}\right\} \cdot \left\{\frac{\sigma_2}{\mathfrak{p}}\right\}^{-1} = \left\{\frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2}{\mathfrak{p}}\right\} \cdot \left\{\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\mathfrak{p}}\right\}^{-1} = \left\{\frac{\nu \cdot \nu', \mu}{\mathfrak{p}}\right\}.$$

Damit ist die Gleichung (3) bewiesen. Formel (4) folgt aus (2) und (3), Formel (5) aus (3) und (4) unter Berücksichtigung der Bemerkung 1 zu Definition 2.

2. Halten wir μ und $\mathfrak{p}$ fest, so bilden alle ganzen Zahlen ν in k, welche der Gleichung

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right\} = +1$$

genügen, einen Zahlstrahl. Das geht aus der Gleichung (3) von Satz 4 hervor. Ebenso bilden alle Zahlen ν, für die

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_i^{h_i} = +1$$

ist, Zahlstrahlen. Den ersten nennen wir den *Hauptstrahl der zu μ und $\mathfrak{p}$ gehörigen n^{ten} Normenrestsymbole*, den letzteren $l_i^{h_i^{ten}}$ *Nebenstrahl der zu μ und $\mathfrak{p}$ gehörigen n^{ten} Normenrestsymbole*. Notwendig und hinreichend

dafür, daß eine Zahl des Körpers k dem Hauptstrahl angehört, ist die Bedingung, daß diese Zahl dem $l_1^{h_1\,\text{ten}}$, dem $l_2^{h_2\,\text{ten}}$, $\cdots$, dem $l_e^{h_e\,\text{ten}}$ Nebenstrahl gleichzeitig angehört. Wir können noch weitere $l_i^{b_i\,\text{te}}$ Nebenstrahlen $(0<b_i<h_i;\ i=1,2,\cdots,e)$ hinzufügen und sehen so, daß die Gliederung des Hauptstrahles in Nebenstrahlen die gleiche ist wie diejenige des Zahlstrahls der n^{ten} Normenreste. Die Aufgabe des folgenden Paragraphen wird es sein, die Identität beider festzustellen.

Auch wenn man ν und $\mathfrak{p}$ festhält, μ variieren läßt, läßt sich auf Grund der Gleichung (4) von Satz 4 ein analog gebauter Zahlstrahl angeben.

Definition 3. Es seien in

$$1-\xi_i=\mathfrak{l}_i\cdot\mathfrak{l}_{i,2}^{(2)}\cdots\mathfrak{l}_{i,z}^{(z)}$$

$\mathfrak{l}_i$, $\mathfrak{l}_{i,2}$, $\cdots$, $\mathfrak{l}_{i,z}$ voneinander verschiedene Primideale in k, ν und μ seien ganze Zahlen in k, die genau durch die b^{te} bezw. a^{te} Potenz von $\mathfrak{l}_i$ teilbar sind. *Wir definieren dann das $l_i^{h_i\,\text{te}}$ Normenrestsymbol* $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_i}\right)_{l_i^{h_i}}$ *durch die Gleichung*

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_i}\right)_{l_i^{h_i}}=\prod_{(\mathfrak{w})}{}'\left(\frac{\nu,\mu^*}{\mathfrak{w}}\right)_{l_i^{h_i}}^{-1}.$$

Hierin ist das Produkt über alle zu $1-\xi_i$ primen Primideale in k zu erstrecken; μ^* genügt den Kongruenzen

$$\mu^*\equiv\mu\left(\mathfrak{l}_i^{l_i^{h_i-1}(l_i+(h_i-1)(l_i-1))+\alpha+1}\right),$$
$$\mu^*\equiv\alpha^{l_i^{h_i}}\left(\mathfrak{l}_{i,2}^{(2)\,l_i^{h_i-1}(l_i+(h_i-1)(l_i-1))+1}\cdots\mathfrak{l}_{i,z}^{(z)\,l_i^{h_i-1}(l_i+(h_i-1)(l_i-1))+1}\right).$$

Darin ist α eine zu den Idealen $\mathfrak{l}_{i,2},\cdots,\mathfrak{l}_{i,z}$ prime ganze Zahl in k.

Definition 4. Ist $\mathfrak{l}$ ein in irgend welchen der Zahlen $1-\xi_1, 1-\xi_2,\cdots, 1-\xi_e$ aufgehendes Primideal des Körpers k, dann *definiere ich das Symbol* $\left\{\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}}\right\}$ *durch die Gleichung*

$$\left\{\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}}\right\}=\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}}\right)_{l_1^{h_1}}^{a_1}\cdot\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}}\right)_{l_2^{h_2}}^{a_2}\cdots\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}}\right)_{l_e^{h_e}}^{a_e},$$

wo die ganzen rationalen Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_e$ den Kongruenzen

$$\begin{aligned}
a_1 l_2^{h_2}\cdot l_3^{h_3}\cdots l_e^{h_e} &\equiv 1\ (l_1^{h_1}),\\
a_2 l_1^{h_1}\cdot l_3^{h_3}\cdots l_e^{h_e} &\equiv 1\ (l_2^{h_2}),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_e l_1^{h_1}\cdot l_2^{h_2}\cdots l_{e-1}^{h_{e-1}} &\equiv 1\ (l_e^{h_e})
\end{aligned}$$

genügen.

Anwendung. Es sei, wenn ν und μ zwei ganze Zahlen im Körper k sind, für $l_1^{h_1\,\text{te}}, l_2^{h_2\,\text{te}}, \cdots, l_e^{h_e\,\text{te}}$ Normenrestsymbole der Satz:

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)^{h_i} = +1$$
$$(i = 1, 2, \cdots, e),$$

das Produkt erstreckt über alle Primideale in k, bewiesen. Diese Gleichung stellt das allgemeinste Reziprozitätsgesetz $l_i^{h_i \text{ter}}$ Potenzreste dar, in dem das sogenannte allgemeine Reziprozitätsgesetz und die beiden Ergänzungsgesetze als spezielle Fälle enthalten sind. Das Reziprozitätsgesetz ist bisher bewiesen für $h_i = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, e)$, aber nur unter einschränkenden Bedingungen für den Körper k. Ist die Klassenzahl des Körpers k teilbar durch l_i, dann greift die Frage des Klassenkörpers ein und die Fassung des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes und entsprechend auch Definition 3 erfährt eine Änderung.*) Setzen wir aber einmal den Grundkörper k so beschaffen voraus, daß unsere Voraussetzung erfüllt ist, dann gilt auch das Reziprozitätsgesetz n^{ter} Potenzreste

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1.$$

Es ist nämlich nach Satz 3 und der Definition 4

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \prod_{(\mathfrak{w})} \left[\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)^{a_1} \cdot \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)^{a_2} \cdots \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)^{a_e}\right],$$

wo die ganzen rationalen Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_e$ die Kongruenzen der Definition 4 erfüllen. Es wird also auf Grund unserer Voraussetzung, wie wir behaupteten,

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = +1.$$

Das eben Gesagte zeigt, wie schon das in I, § 6 pg. 280 Gefundene, daß man die Reziprozitätsgesetze n^{ter} Potenzreste beherrscht, wenn man diejenigen der $l_i^{h_i \text{ten}}$ Potenzreste kennt.

§ 3.

Normenrest und Normenrestsymbol.

Wir nannten das in § 2 eingeführte Symbol das Normenrestsymbol. Die Berechtigung für diese Bezeichnung gibt der Parallelismus, der zwischen dem Wert des Symbols und dem Normenrestcharakter besteht. Wir können diese Beziehung vorerst nur für diejenigen Primideale des

*) Vergl. D. Hilbert, Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. Acta math. Bd. 23, pg. 99 ff.

Grundkörpers nachweisen, welche prim zu den Zahlen $l_1, l_2, \cdots, l_e$, also zu n sind. Der entsprechende Beweis für die Primideale des Grundkörpers, welche Teiler von n sind, läßt sich erst nach Erledigung anderer Kapitel der Theorie n^{ter} Potenzreste geben. Wir beweisen demgemäß in diesem Paragraphen den folgenden Satz:

Satz 5. *Es seien ν und μ zwei ganze Zahlen und $\mathfrak{p}$ ein zu den Zahlen $1-\xi_1, 1-\xi_2, \cdots, 1-\xi_e$ primes Primideal in k. Gehört dann ν dem Hauptstrahl der n^{ten} Normenreste in $K(\sqrt[n]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ an, so gehört ν auch zum Hauptstrahl der zu μ und $\mathfrak{p}$ gehörenden Normenrestsymbole und umgekehrt. Gehört ν zu einem Nebenstrahl jenes ersten Hauptstrahles, so gehört ν auch zu dem entsprechenden Nebenstrahle des anderen und umgekehrt.*

Beweis: Der Aufbau des Hauptstrahles aus $l_1^{h_1 ten}, l_2^{h_2 ten}, \cdots, l_e^{h_e ten}$ Nebenstrahlen sowohl bei den Normenresten als bei den Normenrestsymbolen (vergl. die Sätze 1 und 3) gewährleistet die Richtigkeit des Satzes, wenn wir ihn für den Fall $n = l_i^{h_i}$ beweisen.

Der Satz gilt für l_i^{te} Normenreste.*) Wir nehmen an, wir hätten ihn schon für $l_i^{h_i-1te}$ Normenreste bewiesen; wir wollen ihn dann unter dieser Voraussetzung für $l_i^{h_i te}$ Normenreste beweisen. Gemäß einer Bemerkung zu den Definitionen 1 und 2 können wir von den Fällen absehen, wo ν oder μ — oder auch beide — l_i^{te} Potenzen von Zahlen in k sind. Sie erledigen sich sofort auf Grund der Theorie $l_i^{h_i-1ter}$ Normenreste.

Wir bezeichnen im Verlaufe des Beweises zur Abkürzung l_i^{te} Potenzrest- bezw. Normenrestsymbole durch runde Klammern ohne Index links unten und deuten in zweifelhaften Fällen durch Index rechts unten an, in welchem Körper das betreffende Symbol zu nehmen ist.

Wir unterscheiden im weiteren 4 Fälle:

Fall I. Es seien ν und μ beide prim zu $\mathfrak{p}$. Nach der Definition 2 ist dann in jedem Falle

$$_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1.$$

Wir haben also zu beweisen, daß ν in diesem Falle stets Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ ist.

*) Vergl. für $l_i = 2$:

D. Hilbert, Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Math. Ann. Bd. 51. Satz 9. 10. 11. 12. 13. pg. 12 ff.;

für l_i gleich einer ungeraden Primzahl:

Ph. Furtwängler, Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste. Abhandlg. d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1902. Satz 15. pg. 16 ff.

Nach der Theorie l_i^{ter} Normenreste ist wegen

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_k = +1$$

im Körper $K(\sqrt[l_i]{\mu})$ eine ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl $\bar{\alpha}$ angebbar derart, daß

$$\nu \equiv n_{k, \sqrt[l_i]{\mu}}(\bar{\alpha}) \quad (\mathfrak{p}) \tag{1}$$

ist. Jetzt stehen zwei Möglichkeiten offen:

1. Es ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_k = +1$, $\mathfrak{p}$ zerfällt also im Körper $K(\sqrt[l_i]{\mu})$ in l_i verschiedene Primideale; es sei etwa:

$$\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} \cdot \bar{s}^{-} \cdots \bar{s}^{l_i - 1}\bar{\mathfrak{p}},$$

wo $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal in $K(\sqrt[l_i]{\mu})$ und $\bar{s}$ und deren Potenzen die Substitutionen der Relativgruppe andeuten. Nach der Definition 2 ist dann im Körper $K(\sqrt[l_i]{\mu})$

$$\left(\frac{\bar{\alpha}, \sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}}^{l_i^{h_i - 1}} = +1$$

$$\left(\frac{\bar{\alpha}, \sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{s}\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}}^{l_i^{h_i - 1}} = +1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\bar{\alpha}, \sqrt[l_i]{\mu}}{\bar{s}^{l_i - 1}\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}}^{l_i^{h_i - 1}} = +1.$$

Aus diesen l_i Gleichungen folgt nach der Theorie $l_i^{h_i - 1\text{ter}}$ Normenreste die Existenz von l_i ganzen Zahlen $A_1, A_2, \cdots, A_{l_i}$ des Körpers $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$, welche dem folgenden System von Kongruenzen genügen:

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} &\equiv n_{\sqrt[l_i]{\mu}, \sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}(A_1) \quad (\bar{\mathfrak{p}}) \\
\bar{\alpha} &\equiv n_{\sqrt[l_i]{\mu}, \sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}(A_2) \quad (\bar{s}\,\bar{\mathfrak{p}}) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\bar{\alpha} &\equiv n_{\sqrt[l_i]{\mu}, \sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}(A_{l_i}) \quad (\bar{s}^{l_i - 1}\bar{\mathfrak{p}}).
\end{aligned} \tag{2}$$

Bestimmt man eine ganze Zahl A im Körper $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ derart, daß

$$\begin{aligned}
A &\equiv A_1 (\bar{\mathfrak{p}}) \\
A &\equiv A_2 (\bar{s}\,\bar{\mathfrak{p}}) \\
&\cdots\cdots \\
A &\equiv A_{l_i} (\bar{s}^{l_i - 1}\bar{\mathfrak{p}})
\end{aligned}$$

ist — möglich ist das, weil $\bar{\mathfrak{p}}$ und seine Relativkonjugierten einander teilerfremd sind —, dann läßt sich das System der Gleichungen (2) zusammenziehen in die eine Kongruenz

$$\bar{\alpha} \equiv n_{\sqrt[l_i]{\mu},\, \sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}(A)\,(\mathfrak{p}). \tag{3}$$

Entsprechende Kongruenzen ergeben sich für die zu $\bar{\alpha}$ relativkonjugierten Zahlen; aus ihnen allen folgt in Verbindung mit (1), daß ν ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ ist. Damit ist in diesem ersten Falle der Beweis unseres Satzes erbracht.

2. Ist $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_k \neq +1$, zerfällt also $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt[l_i]{\mu})$ nicht, dann ist nach der Definition 2

$$\left(\frac{\bar{\alpha}, \sqrt[l_i]{\mu}}{\mathfrak{p}}\right)_{\sqrt[l_i]{\mu}}^{l_i^{h_i-1}} = +1.$$

Auf Grund der Annahme, unser Satz sei für $l_i^{h_i-1\text{te}}$ Potenzreste schon bewiesen, folgt wieder die Existenz einer ganzen im Körper $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ gelegenen Zahl A derart, daß

$$\bar{\alpha} \equiv n_{\sqrt[l_i]{\mu},\, \sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}(\bar{A})\,(\mathfrak{p})$$

ist, und daraus folgt weiter wie oben, daß ν ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ ist.

Fall II. Es sei μ genau durch die a^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar, ν dagegen sei prim zu $\mathfrak{p}$, dann ist nach der Definition des Normenrestsymbols

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}}^{a}.$$

Ist a durch $l_i^{h_i}$ teilbar, dann ist immer $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1$; wir können in diesem Falle den Beweis auf Fall I zurückführen. Es sei nämlich π eine genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare, ϱ eine durch $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$ teilbare, zu $\mathfrak{p}$ jedoch prime, ganze Zahl in k. Dann ist wegen Formel (5) des Satzes 4 mit $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}}$ auch

und da $\frac{\mu \varrho^a}{\pi^a}$ eine zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl ist, können wir hier Fall I anwenden. Es ist also ν in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\frac{\mu \varrho^a}{\pi^a}}\right)$ und damit, weil $a \equiv 0 (l_i^{h_i})$ ist, auch in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ ein $l_i^{h_i\,\text{ter}}$ Normenrest nach $\mathfrak{p}$.

Es sei a genau durch die a_i^{te} Potenz von l_i teilbar, dann können wir nach dem eben ausgeführten ohne Einschränkung annehmen, daß

$$0 \leqq a_i < h_i$$

ist. Es sei etwa

$$a = a' \cdot l_i^{a_i},$$

dann ist

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}}^{a} = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i - a_i}}^{a'}.$$

Ist jetzt $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1$, so ist demnach $\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i - a_i}} = +1$, also etwa

$$\nu \equiv \alpha^{l_i^{h_i - a_i}} (\mathfrak{p}), \tag{1}$$

wo α eine zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k ist. Das $l_i^{a_i\,\text{te}}$ Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{a_i}}$ hat nach der Definition 2 den Wert $+1$. Da $a_i \leqq l_i - 1$ ist, können wir hier die Resultate der Theorie $l_i^{h_i - 1\,\text{ter}}$ Normenreste anwenden: danach ist α ein $l_i^{a_i\,\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{a_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$. Verbinden wir das mit (1), so ergibt sich: ν ist ein $l_i^{h_i\,\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Es sei umgekehrt ν ein $l_i^{h_i\,\text{ter}}$ Normenrest, also etwa

$$\nu \equiv n_{k, \sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}} (A) (\mathfrak{p}), \tag{2}$$

wo A eine ganze zu $\mathfrak{p}$ prime Zahl in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ ist. Das Zerlegungsgesetz der Primideale des Körpers k im Körper $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ lehrt, daß, wenn $\mathfrak{p}$ ein in $\mathfrak{p}$ aufgehendes Primideal des Körpers $K(\sqrt[l_i^{a_i}]{\mu})$ ist — für $a_i = 0$ ist dieser Körper mit k identisch —, $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ in $l_i^{h_i - a_i}$ gleiche Primideale zerfällt. Deshalb können wir A als ganze Zahl $\bar{\alpha}$ des Körpers $K(\sqrt[l_i^{a_i}]{\mu})$ wählen. Setzen wir

$$\alpha = n_{k, \sqrt[l_i^{a_i}]{\mu}} (\bar{\alpha}),$$

wo α eine ganze Zahl des Grundkörpers ist, so folgt schließlich aus (2)

$$\nu \equiv \alpha_i^{h_i - a_i} \ (\mathfrak{p}),$$

oder, in Symbolform geschrieben,

$$_{l_i^{h_i} - a_i}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1;$$

das war zu beweisen.

Die übrigen Aussagen des Satzes folgen unter Benutzung des eben Bewiesenen durch Rückgang auf die Theorie der $l_i^{h_i - 1\text{ten}}$ Normenreste. Ist beispielsweise $_{l_i^{h_i} - a_i}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)$ eine primitive l_i^{te} Einheitswurzel, so ist

$$_{l_i^{h_i} - a_i - 1}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1,$$

also nach der Definition 2

$$_{l_i^{h_i} - 1}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = +1.$$

ν ist deshalb nach der Theorie $l_i^{h_i - 1\text{ter}}$ Normenreste ein $l_i^{h_i - 1\text{ter}}$ Normenrest in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i - 1}]{\mu}\right)$ nach $\mathfrak{p}$. Aber auch in $K\left(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}\right)$ ist ν nur ein $l_i^{h_i - 1\text{ter}}$ Normenrest nach $\mathfrak{p}$. Wäre nämlich ν ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest, dann müßte nach dem eben Bewiesenen

$$_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = {}_{l_i^{h_i} - a_i}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)^{a'} = +1$$

sein, und das trifft nicht zu. Mit diesem Beispiel ist die Art der hier und auch später an analoger Stelle anzuwendenden Schlußfolge gekennzeichnet.

Fall III. Es sei μ prim zu $\mathfrak{p}$, ν dagegen sei genau durch die b^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar. Dann ist nach der Definition 2

$$_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = {}_{l_i^{h_i}}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{-b}.$$

Ist b durch $l_i^{h_i}$ teilbar, dann läßt sich der Beweis ähnlich wie an entsprechender Stelle bei II auf das in I Bewiesene zurückführen, wir setzen daher im folgenden $b \not\equiv 0 (l_i^{h_i})$ voraus. Es sei b genau durch die b_i^{te} Potenz von l_i teilbar, wo wir

$$0 < b_i < h_i$$

annehmen können, und es sei etwa

$$b = b' \cdot l_i^{b_i}.$$

Nach der Definition 2 ist jetzt

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i - b_i}}^{-b'}.$$

Gehen wir also von der Voraussetzung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1$$

aus, so ist auch

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i - b_i}} = +1.$$

Nach dem Zerlegungsgesetz der Primideale im relativ-zyklischen Körper zerfällt deshalb $\mathfrak{p}$ im Körper $K(\sqrt[l_i^{h_i - b_i}]{\mu})$ in $l_i^{h_i - b_i}$ verschiedene Primideale, deren eines $\bar{\mathfrak{p}}$ sei. Ist dann $\bar{\pi}$ eine ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt[l_i^{h_i - b_i}]{\mu})$, welche genau durch die erste Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$ teilbar, aber prim zu den von $\bar{\mathfrak{p}}$ verschiedenen Teilern von $\mathfrak{p}$ ist, dann ist die ganze Zahl

$$\pi = n_{k, \sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}(\bar{\pi})$$

des Grundkörpers k genau durch die $l_i^{b_i\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar. Es sei weiter ϱ eine zu $\mathfrak{p}$ prime, durch $\frac{\pi}{\mathfrak{p}^{b_i}}$ teilbare ganze Zahl des Grundkörpers. Die ganze Zahl $\frac{\nu}{\pi^{b'}} \varrho^{l_i^{h_i b'}}$ des Körpers k ist dann prim zu $\mathfrak{p}$. Da auch μ prim zu $\mathfrak{p}$ ist, folgt aus der Definition 2

$$\left(\frac{\frac{\nu}{\pi^{b'}} \varrho^{l_i^{h_i b'}}, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1.$$

Nach dem im Fall I schon Bewiesenen folgt daraus, daß die Zahl $\frac{\nu}{\pi^{b'}} \varrho^{l_i^{h_i b'}}$ und damit auch ν ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ ist.

Es sei umgekehrt ν ein $l_i^{h_i\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$, also etwa

$$\nu \equiv n_{k, \sqrt[l_i^{h_i}]{\mu}}(A) \ (\mathfrak{p}^{h+1}),$$

wo A eine ganze Zahl des Körpers $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ ist. Da

$$b \equiv 0 (l_i^{b_i})$$

ist, muß notwendig

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}, A)(\mathfrak{p}, S'A) \cdots (\mathfrak{p}, S'^{l_i^{h_l - b_i - 1}} A) \quad (1)$$

sein, wo S' und seine Potenzen eine gewisse Untergruppe der Substitutionen der Relativgruppe bezeichnen. (Für $b_i = 0$ fällt die Untergruppe mit der Relativgruppe selbst zusammen.) Da μ prim zu $\mathfrak{p}$ ist und deshalb $\mathfrak{p}$ in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nur in verschiedene Ideale zerfallen kann, besagt die Gleichung (1), daß

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i - b_i}} = +1$$

ist, und das war zu beweisen.

Da die übrigen Aussagen unseres Satzes leicht durch Rückgang auf die Theorie $l_i^{h_i - 1^{ter}}$ Normenreste folgen, ist mit dem Bewiesenen der Fall III vollständig erledigt.

Fall IV. Es sei μ genau durch die a^{te}, ν genau durch die b^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar. Wir bestimmen a_i und a' bezw. b_i und b' als positive ganze rationale Zahlen so, daß a' und b' in

$$a = l_i^{a_i} \cdot a',$$
$$b = l_i^{b_i} \cdot b'$$

prim zu l_i sind. Es ist keine Einschränkung, wenn wir

$$0 \leqq a_i < h_i,$$
$$0 < b_i < h_i$$

annehmen. Wir setzen jetzt

1. voraus, es sei

$$a_i \leqq b_i.$$

In diesem Falle ist es möglich, zwei positive ganze rationale Zahlen c und d so zu bestimmen, daß

$$b + a \cdot c = l_i^{h_i} \cdot d$$

ist. Es sei π eine genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare, ϱ eine durch $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$ teilbare, zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k, dann ist die ganze Zahl

$$\nu \cdot \mu^c \cdot \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{l_i^{h_i d}}$$

des Körpers k prim zu $\mathfrak{p}$. Unter Beachtung der Formeln (1) und (5) von Satz 4 ist wegen der Voraussetzung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = 1$$

auch

$$\left(\frac{\nu \cdot \mu^c \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{l_i^{h_i d}}, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1. \tag{1}$$

Nach dem im Fall II Bewiesenen ist jetzt $\nu \cdot \mu^c \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{l_i^{h_i d}}$ und damit auch ν ein $l_i^{h_i\,\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$.

Ist umgekehrt ν ein $l_i^{h_i\,\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$, so ist dies auch mit der wie eben bestimmten Zahl $\nu \cdot \mu^c \cdot \left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{l_i^{h_i d}}$ der Fall. Mithin gilt nach Fall II die Gleichung (1) und deshalb auch gemäß den Formeln (1) und (5) von Satz 4 die Gleichung

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1.$$

Die Identität aller anderen Nebenstrahlen weist man gestützt auf die Theorie $l_i^{h_i - 1\,\text{ter}}$ Normenreste nach.

2. Es bleibt noch der Fall $a_i > b_i$ zu erledigen.

Wir schicken eine Vorbetrachtung voraus. Es sei entweder $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1$ oder ν ein $l_i^{h_i\,\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$. Wegen

$$a_i \leqq h_i - 1$$

ist dann, im Falle der zweiten Voraussetzung nach der Theorie $l_i^{h_i - 1\,\text{ter}}$ Normenreste,

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{a_i}} = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{-b}_{l_i^{a_i}} = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{-b'}_{l_i^{a_i - b_i}} = +1.$$

$\mathfrak{p}$ zerfällt deshalb im Körper $K(\sqrt[l_i^{a_i - b_i}]{\mu})$ in $l_i^{a_i - b_i}$ verschiedene Primideale. Es sei etwa

$$\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}} \cdot \bar{s}\bar{\mathfrak{p}} \cdots \bar{s}^{l_i^{a_i - b_i - 1}}\bar{\mathfrak{p}},$$

wo $\bar{s}$ und seine Potenzen die Substitutionen der zu $K(\sqrt[l_i^{a_i - b_i}]{\mu})$ gehörigen Relativgruppe angeben. $\sqrt[l_i^{a_i - b_i}]{\mu}$ ist genau durch die $a' \cdot l_i^{b_i\,\text{te}}$ Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$, von $\bar{s}\bar{\mathfrak{p}}, \cdots$, von $\bar{s}^{l_i^{a_i - b_i - 1}}\bar{\mathfrak{p}}$ teilbar. In dem Oberkörper $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$, der bezüglich $K(\sqrt[l_i^{a_i - b_i}]{\mu})$ vom Relativgrad $l_i^{h_i - a_i + b_i}$ ist, zerfällt deshalb $\bar{\mathfrak{p}}$ jedenfalls in $l_i^{h_i - a_i}$ gleiche Ideale. $\mathfrak{P}$ sei eines derselben und Π eine ganze in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ gelegene Zahl, welche genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar und prim zu den übrigen Teilern von $\mathfrak{p}$ ist. Dann ist die ganze Zahl

$$\bar{\pi} = n_{\substack{l_i^{a_i - b_i} \\ \sqrt[l_i]{\mu}}}{}_{\substack{l_i^{h_i} \\ \sqrt[l_i]{\mu}}}(\Pi)$$

des Körpers $K(\sqrt[l_i^{a_i-b_i}]{\mu})$ teilbar genau durch die $l_i^{b_i\,\text{te}}$ Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}$ und prim zu den übrigen Teilern von $\mathfrak{p}$. Entsprechend wird $\bar{s}\bar{\pi}$ teilbar genau durch die $l_i^{b_i\,\text{te}}$ Potenz von $\bar{s}\bar{\mathfrak{p}}$, prim aber zu den übrigen Teilern von $\mathfrak{p}$, und ähnlich so für die andern Relativkonjugierten. Schließlich wird die ganze Zahl

$$\pi = n_{k,\sqrt[l_i^{a_i-b_i}]{\mu}}^{l_i^{a_i-b_i}}(\bar{\pi})$$

des Körpers k, welche auch Relativnorm einer Zahl in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ ist, genau durch die $l_i^{b_i\,\text{te}}$ Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar.

Wir wollen beweisen, daß

$$\left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1$$

ist. Wir bestimmen die ganzen positiven rationalen Zahlen c und d so, daß

$$a + bc = l_i^{h_i} d$$

ist, und beachten für das Folgende, daß hierin c durch $l_i^{a_i-b_i}$ teilbar ist, daß also etwa

$$c = l_i^{a_i-b_i} c'$$

ist. Es sei $\varkappa$ eine genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare, ϱ eine durch $\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}$ teilbare, zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k. Dann ist nach unserer Bestimmung die ganze Zahl $\mu\pi^c\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)^{l_i^{h_i}d}$ des Körpers k prim zu $\mathfrak{p}$. Nach der Theorie $l_i^{h_i-1\,\text{ter}}$ Potenzreste ist

$$\text{(I)}\qquad \left(\frac{\pi, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{a_i-b_i}} = \left(\frac{\pi,\ \mu\pi^c\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)^{l_i^{h_i}d}}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{a_i-b_i}} = \left(\frac{\mu\pi^c\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)^{l_i^{h_i}d}}{\mathfrak{p}}\right)^{-l_i^{b_i}}_{l_i^{a_i-b_i}} = 1.$$

Ebenso folgt, da die Zahlen $\bar{\pi}$, $s\bar{\pi}$ u. s. f. des Körpers $K(\sqrt[l_i^{a_i-b_i}]{\mu})$ Relativnormen von Zahlen des Körpers $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ sind, in gleicher Weise

$$\left(\frac{\bar{\pi}, \sqrt[l_i^{a_i-b_i}]{\mu}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)^{l_i^{a_i-b_i}}_{\sqrt[l_i^{a_i-b_i}]{\mu}} = \left(\frac{\bar{\pi}, \sqrt[l_i^{a_i-b_i}]{\mu}\cdot\bar{\pi}^{c'}\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)^{l_i^{h_i-a_i+b_i}\cdot d}}{\mathfrak{p}}\right)^{a_i-b_i}_{\sqrt[l_i^{a_i-b_i}]{\mu}} = +1,$$

$$l_i^{h_i-a_i+b_i} \qquad l_i^{h_i-a_i+b_i}$$

mithin

(IIa) $$\left(\frac{\sqrt[f_i^{a_i-b_i}]{\mu}\,\pi^{c}\left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{d\,f_i^{a_i-a_i+b_i}}}{\mathfrak{p}}\right)^{-f_i^{b_i}}_{f_i^{a_i-a_i+b_i}} \cdot \left(\frac{\sqrt[f_i^{a_i-b_i}]{\mu}}{\mathfrak{p}}\right)_{f_i^{a_i-b_i}} = +1$$

und andererseits

(IIb) $$\left(\frac{\bar{\varepsilon}\,\bar{\pi}\cdot\sqrt[f_i^{a_i-b_i}]{\mu}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{f_i^{a_i-a_i+b_i}} \cdot \left(\frac{\sqrt[f_i^{a_i-b_i}]{\mu}}{\mathfrak{p}}\right)_{f_i^{a_i-b_i}} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}\,\bar{\pi}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)^{a'f_i^{b_i}}_{f_i^{a_i-a_i+b_i}} = +1.$$

Durch Multiplikation der Gleichung (IIa) mit allen, elementar veränderten $f_i^{a_i-b_i}-1$ Gleichungen (IIb) erhalten wir

(II) $$\left(\frac{\sqrt[f_i^{a_i-b_i}]{\mu}\,\pi^{c}\left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{d\,f_i^{a_i-a_i+b_i}}}{\mathfrak{p}}\right)^{-f_i^{b_i}}_{f_i^{a_i-a_i+b_i}} \cdot \left(\frac{\sqrt[f_i^{a_i-b_i}]{\mu}}{\mathfrak{p}}\right)_{f_i^{a_i-b_i}} = +1.$$

Die Vereinigung von (I) und (II) liefert dann

$$\left(\frac{\mu\,\pi^{c}\left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{f_i^{b_i}d}}{\mathfrak{p}}\right)^{f_i^{b_i}}_{f_i^{b_i}} = +1$$

und daraus folgt

$$\left(\frac{\pi,\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{f_i^{b_i}}_{f_i^{b_i}} = \left(\frac{\pi,\mu\,\pi^{c}\left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{f_i^{b_i}d}}{\mathfrak{p}}\right)^{f_i^{b_i}}_{f_i^{b_i}} = +1.$$

Damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

Nach dieser Voruntersuchung können wir an unsern Beweis herangehen. Wir bestimmen die ganzen rationalen positiven Zahlen c und d so, daß

$$b + f_i^{b_i} \cdot c = f_i^{b_i} d$$

ist. π und ϱ seien bestimmt wie oben, dann ist die ganze Zahl $\nu\pi^{c}\left(\frac{\varrho}{\pi}\right)^{f_i^{b_i}d}$ des Grundkörpers prim zu $\mathfrak{p}$. Nach dem eben Bewiesenen können wir die Voraussetzung

(1) $$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{p}}\right)^{f_i^{b_i}}_{f_i^{b_i}} = +1$$

umschreiben in die Form

$$(2) \qquad \left(\frac{\nu\pi^{c}\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)^{l_i^{h_i d}}, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1.$$

Auf dies Symbol können wir das in Fall II Bewiesene anwenden, wonach die Zahl $\nu\pi^{c}\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)^{l_i^{h_i d}}$ und damit, weil π Relativnorm einer ganzen Zahl in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ ist, auch ν ein $l_i^{h_i\,\text{ter}}$ Normenrest in $K(\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$ ist.

Ist umgekehrt ν ein $l_i^{h_i\,\text{ter}}$ Normenrest in $K\sqrt[l_i^{h_i}]{\mu})$ nach $\mathfrak{p}$, so ist es auch $\nu\pi^{c}\left(\frac{\varrho}{\varkappa}\right)^{l_i^{h_i d}}$, wo $\varkappa$ und ϱ wie oben bestimmt sind. Nach Fall II gilt also die Gleichung (2) und damit

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{l_i^{h_i}} = +1.$$

Die übrigen Aussagen des Satzes, der mit diesem letzten Falle vollständig erledigt ist, folgen wieder durch Rückgang auf die Theorie $l_i^{h_i-1\,\text{ter}}$ Normenreste.

Landsberg a. W., Dezember 1904.

Das Hauptachsenproblem der Flächen 2. Ordnung.

Von

OTTO STAUDE in Rostock.

Mehrere der zahlreichen *Beweise für die Realität der Wurzeln* der kubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ des Hauptachsenproblems der Flächen 2. Ordnung beruhen darauf, daß die *Diskriminante* als eine *Summe von Quadraten* dargestellt wird.

Auf einen ähnlichen Grundgedanken stützt sich auch der im folgenden mitgeteilte neue Beweis, indem er das *Produkt der Diskriminante D* der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ *und der Diskriminante D'* der Gleichung $\Delta'(\lambda) = 0$ durch die *Quadrate* der Unterdeterminanten der Determinante $\Delta(\lambda)$ und zugleich die Diskriminante D' selbst durch die Quadrate der Elemente der Determinante $\Delta(\lambda)$ ausdrückt (vgl. die Gleichungen (31), (22) und (28), (24)).

Dieser neue Beweis hat den doppelten Vorzug, daß die benutzten Quadratdarstellungen sich ohne jeden Umweg ergeben, und daß sie zugleich das Verschwinden der Unterdeterminanten von $\Delta(\lambda)$ für eine zweifache und der Elemente von $\Delta(\lambda)$ für eine dreifache Wurzel unmittelbar zum Ausdruck bringen.

1. *Die Diskriminanten D und D' bei der kubischen Gleichung.* Wir bezeichnen die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$g(x) = x^3 + px^2 + qx + r = 0 \tag{1}$$

mit x_1, x_2, x_3; die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$g'(x) = 3x^2 + 2px + q = 0 \tag{2}$$

mit x_1', x_2' und die Wurzel der linearen Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} g''(x) = 3x + p = 0 \tag{3}$$

mit $x'' = -\frac{p}{3}$.

Die *Diskriminanten* der beiden Gleichungen (1) und (2):

$$D = -(x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2, \tag{4}$$

$$D' = -(x_1' - x_2')^2 \tag{5}$$

lauten in den Koeffizienten:

$$D = 4p^3r - p^2q^2 - 18pqr + 4q^3 + 27r^2, \tag{6}$$

$$D' = -\frac{4}{9}(p^2 - 3q). \tag{7}$$

2. *Bedingung reeller und Bedingungen mehrfacher Wurzeln.* Die kubische Gleichung (1) hat *drei verschiedene reelle* Wurzeln unter der Bedingung:

$$D < 0. \tag{8}$$

Sie hat *eine zweifache und eine einfache* Wurzel für:

$$D = 0, \quad D' \neq 0 \tag{9}$$

und *eine dreifache* Wurzel für:

$$D = 0, \quad D' = 0. \tag{10}$$

Die Bedingungen sind in allen drei Fällen notwendig und hinreichend.

3. *Andere Darstellung der Diskriminanten D und D'.* Indem man mittels der Relationen:

$$x_1' + x_2' = -\frac{2p}{3}, \qquad x_1' x_2' = \frac{q}{3},$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 = \frac{4p^2}{9} - \frac{2q}{3}, \quad x_1'^3 + x_2'^3 = -\frac{8p^3}{27} + \frac{2pq}{3}$$

die symmetrischen Funktionen $g(x_1') \cdot g(x_2')$ und $g''(x_1') \cdot g''(x_2')$ von x_1', x_2' berechnet, erhält man *für D und D' die neue Darstellungsweise:*

$$\frac{1}{27} D = g(x_1') \cdot g(x_2'), \tag{11}$$

$$9D' = g''(x_1') \cdot g''(x_2'). \tag{12}$$

Zugleich ist nach (2) unter Benutzung des Wertes $x'' = -\frac{p}{3}$:

$$\frac{3}{4} D' = g'(x''). \tag{13}$$

4. *Die kubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ des Hauptachsenproblems.* Die kubische Gleichung des Hauptachsenproblems der Flächen 2. Ordnung lautet:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \lambda \end{vmatrix} \tag{14}$$

$$= \lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0.$$

Hier sind $a_{kl} = a_{lk}$ reelle Konstanten und ist zur Abkürzung gesetzt:

$$r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

(16) $$p = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad q = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

wobei $A_{kl} = A_{lk}$ die Unterdeterminanten 2. Grades von r sind.

5. *Die Unterdeterminanten und Ableitungen von* $\Delta(\lambda)$. Wir bezeichnen mit $\Delta_{kl}(\lambda)$ die Unterdeterminanten 2. Grades von $\Delta(\lambda)$, so daß insbesondere:

(17) $$\begin{cases} \Delta_{11}(\lambda) = (a_{22}+\lambda)(a_{33}+\lambda) - a_{23}^2, \\ \Delta_{22}(\lambda) = (a_{33}+\lambda)(a_{11}+\lambda) - a_{31}^2, \\ \Delta_{33}(\lambda) = (a_{11}+\lambda)(a_{22}+\lambda) - a_{12}^2. \end{cases}$$

Danach ergibt sich für die *Ableitungen* von $\Delta(\lambda)$:

(18) $$\Delta'(\lambda) = \Delta_{11}(\lambda) + \Delta_{22}(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda),$$

(19) $$\tfrac{1}{2}\Delta''(\lambda) = (a_{11}+\lambda) + (a_{22}+\lambda) + (a_{33}+\lambda).$$

6. *Identische Gleichungen zwischen* $\Delta(\lambda)$, $\Delta'(\lambda)$, $\Delta''(\lambda)$. Für die Determinante (14) gelten die Gleichungen:

(20) $$\begin{cases} \Delta_{22}(\lambda)\Delta_{33}(\lambda) - \Delta_{23}^2(\lambda) = (a_{11}+\lambda)\Delta(\lambda), \\ \Delta_{33}(\lambda)\Delta_{11}(\lambda) - \Delta_{31}^2(\lambda) = (a_{22}+\lambda)\Delta(\lambda), \\ \Delta_{11}(\lambda)\Delta_{22}(\lambda) - \Delta_{12}^2(\lambda) = (a_{33}+\lambda)\Delta(\lambda). \end{cases}$$

Nach (18) und (20) wird nun:

$$\Delta_{11}(\lambda)\Delta'(\lambda) = \Delta_{11}^2(\lambda) + \Delta_{12}^2(\lambda) + \Delta_{13}^2(\lambda) + ((a_{22}+\lambda)+(a_{33}+\lambda))\Delta(\lambda),$$
$$\Delta_{22}(\lambda)\Delta'(\lambda) = \Delta_{21}^2(\lambda) + \Delta_{22}^2(\lambda) + \Delta_{23}^2(\lambda) + ((a_{33}+\lambda)+(a_{11}+\lambda))\Delta(\lambda),$$
$$\Delta_{33}(\lambda)\Delta'(\lambda) = \Delta_{31}^2(\lambda) + \Delta_{32}^2(\lambda) + \Delta_{33}^2(\lambda) + ((a_{11}+\lambda)+(a_{22}+\lambda))\Delta(\lambda).$$

Durch Addition der drei Gleichungen folgt mit Hinblick auf (18) und (19):

(21) $$\Delta'^2(\lambda) = S^2(\lambda) + \Delta''(\lambda)\Delta(\lambda),$$

falls zur Abkürzung gesetzt wird:

(22) $$S^2(\lambda) = \Delta_{11}^2(\lambda) + \Delta_{22}^2(\lambda) + \Delta_{33}^2(\lambda) + 2\Delta_{23}^2(\lambda) + 2\Delta_{31}^2(\lambda) + 2\Delta_{12}^2(\lambda).$$

Aus (19) und (17) ergibt sich:

$$(a_{11}+\lambda)\tfrac{1}{2}\Delta''(\lambda) = (a_{11}+\lambda)^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + \Delta_{22}(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda),$$

$$(a_{22}+\lambda)\tfrac{1}{2}\Delta''(\lambda) = a_{21}^2 + (a_{22}+\lambda)^2 + a_{23}^2 + \Delta_{33}(\lambda) + \Delta_{11}(\lambda),$$

$$(a_{33}+\lambda)\tfrac{1}{2}\Delta''(\lambda) = a_{31}^2 + a_{32}^2 + (a_{33}+\lambda)^2 + \Delta_{11}(\lambda) + \Delta_{22}(\lambda).$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich mit Rücksicht auf (19) und (18):

(23) $$\tfrac{1}{4}\Delta''^2(\lambda) = s^2(\lambda) + 2\Delta'(\lambda),$$

falls zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(24)\quad s^2(\lambda) = (a_{11}+\lambda)^2 + (a_{22}+\lambda)^2 + (a_{33}+\lambda)^2 + 2a_{23}^2 + 2a_{31}^2 + 2a_{12}^2.$$

Die beiden Gleichungen (21) *und* (23) *gelten identisch in* λ.

7. *Die Diskriminante* D' *der Gleichung* $\Delta'(\lambda) = 0$. Sind λ_1', λ_2' die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(25)\quad \Delta'(\lambda) = 0,$$

so ist für die Diskriminante D' derselben Gleichung nach (13):

$$(26)\quad \tfrac{3}{4} D' = \Delta'(\lambda''),$$

wo λ'' die Wurzel der Gleichung:

$$(27)\quad \Delta''(\lambda) = 0$$

ist. Wendet man daher die in λ identische Gleichung (23) auf $\lambda = \lambda''$ an, so ergibt sich:

$$(28)\quad \tfrac{3}{2} D' = -\, s^2(\lambda'').$$

Hieraus folgt nach (24), da λ'' reell ist:

Die Diskriminante D' *der quadratischen Gleichung* (25) *ist negativ; die Wurzeln* λ_1', λ_2' *der Gleichung* (25) *sind reell* (vgl. (5)).

Andererseits ist nach (12):

$$(29)\quad 9D' = \Delta''(\lambda_1') \cdot \Delta''(\lambda_2').$$

8. *Die Diskriminante* D *der Gleichung* $\Delta(\lambda) = 0$. Für die Diskriminante D der kubischen Gleichung (14) ist nach (11):

$$(30)\quad \tfrac{1}{27} D = \Delta(\lambda_1') \cdot \Delta(\lambda_2').$$

Wendet man nun die in λ identische Gleichung (21) auf die beiden Wurzeln von λ_1', λ_2' von (25) an, so ergibt sich:

$$\Delta''(\lambda_1') \cdot \Delta(\lambda_1') = -\, S^2(\lambda_1'), \quad \Delta''(\lambda_2') \cdot \Delta(\lambda_2') = -\, S^2(\lambda_2')$$

und durch Multiplikation beider Gleichungen:

$$\Delta''(\lambda_1') \cdot \Delta''(\lambda_2') \cdot \Delta(\lambda_1') \cdot \Delta(\lambda_2') = S^2(\lambda_1') \cdot S^2(\lambda_2')$$

und nach (29) und (30):

$$(31)\quad \tfrac{1}{3} D'D = S^2(\lambda_1') \cdot S^2(\lambda_2').$$

Da nun nach Nr. 7 λ_1' und λ_2' reell und daher nach (22) $S^2(\lambda_1')$ und $S^2(\lambda_2')$ positiv sind, dagegen nach (28) D' negativ ist, so folgt:

Die Diskriminante D *der kubischen Gleichung* (14) *ist negativ; die drei Wurzeln* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *der Gleichung* (14) *sind reell* (vgl. (4)).

9. *Eine zweifache und eine einfache Wurzel.* Wenn die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ eine zweifache Wurzel $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ und eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_3$ hat, so ist jene zugleich einfache Wurzel von $\Delta'(\lambda) = 0$, so daß etwa:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_1' + \lambda_2'. \tag{32}$$

Alsdann folgt aus (31) mit Rücksicht auf (9):

$$S^2(\lambda_1') \cdot S^2(\lambda_2') = 0.$$

Nun kann aber $S^2(\lambda_2')$ nicht Null sein; denn sonst würden nach (22) alle Unterdeterminanten $\Delta_{k\,l}(\lambda_2')$ und damit neben $\Delta'(\lambda_2')$ auch $\Delta(\lambda_2')$ verschwinden; es wäre daher λ_2' zweifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$, was nach (32) nicht der Fall ist. Daher muß $S^2(\lambda_1') = 0$ sein, und daher folgt mit Rücksicht auf (22) und (32):

Für eine zweifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$ verschwinden stets alle Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$.

Wenn andererseits für irgend einen Wert $\lambda = \lambda_1'$ alle Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$ Null sind, so verschwindet für ihn nach (14) und (18) auch $\Delta(\lambda)$ und $\Delta'(\lambda)$. Daher ist $\lambda = \lambda_1'$ eine zweifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$.

10. *Dreifache Wurzel.* Wenn die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ eine dreifache Wurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ hat, so ist diese zugleich zweifache von $\Delta'(\lambda) = 0$ und einfache von $\Delta''(\lambda) = 0$, so daß:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1' = \lambda_2' = \lambda''. \tag{33}$$

Aus (28) folgt daher mit Rücksicht auf (10) und (24):

Für eine dreifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$ verschwinden stets alle Elemente von $\Delta(\lambda)$.

Wenn andererseits für irgend einen Wert $\lambda = \lambda''$ alle Elemente von $\Delta(\lambda)$ Null sind, so verschwinden für ihn nach (14), (18) und (19) auch $\Delta(\lambda)$, $\Delta'(\lambda)$ und $\Delta''(\lambda)$. Daher ist $\lambda = \lambda''$ eine dreifache Wurzel von $\Delta(\lambda)$.

Rostock, Mai 1905.

Über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t}=0$.

Von

S. Kepinski in Lemberg.

Wenn man eine Randwertaufgabe für die Differentialgleichung:

$$L(z)\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t}=0 \tag{1}$$

vermittels der Green-Riemannschen Methode lösen will, hat man bekanntlich vor allem eine entsprechende Lösung der zu (1) adjungierten Differentialgleichung

$$M(v)\equiv\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{m+1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{n}{x}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{m+1}{x^2}v=0 \tag{2}$$

zu wählen. Als eine solche Lösung wählen wir die folgende:

$$v=\frac{x^{m+1}}{(t_0-t)^m}e^{-n\frac{x_0+x}{t_0-t}}w\left[\frac{xx_0}{(t_0-t)^2}\right] \tag{3}$$

wo x_0, t_0 zwei beliebige Parameter sind, und w als Funktion von

$$\xi=\frac{xx_0}{(t_0-t)^2}$$

der Differentialgleichung:

$$\xi\frac{d^2w}{d\xi^2}+(m+1)\frac{dw}{d\xi}-n^2w=0 \tag{4}$$

genügt. In der Tat verifiziert man leicht, daß

$$M(v)=\frac{x^m x_0}{(t_0-t)^{m+3}}\left[\xi\frac{d^2w}{d\xi^2}+(m+1)\frac{dw}{d\xi}-n^2w\right]$$

ist. Dieses Integral v besitzt noch die wichtige Eigenschaft, daß es als Funktion der Parameter x_0, t_0 der Differentialgleichung (1) genügt. In der Tat ist:

$$L(v)=\frac{x^{m+1}}{x_0(t_0-t)^{m+3}}\left[\xi\frac{d^2w}{d\xi^2}+(m+1)\frac{dw}{d\xi}-n^2w\right].$$

Die Funktion $w(\xi)$ läßt sich durch die Besselschen Funktionen ausdrücken. Wenn man nämlich in (4)

$$\xi = -\frac{\zeta^2}{4n^2}, \quad w = \zeta^{-m} W(\xi)$$

setzt, bekommt man für W die Gleichung

$$\frac{d^2W}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dW}{d\zeta} + \left(1 - \frac{m^2}{\zeta^2}\right)W = 0,$$

der die Besselschen Funktionen

$$J^m(\zeta), \quad Y^m(\zeta)$$

genügen. Es ist also

$$w(\xi) = (in\sqrt{\xi})^{-m}\left[AJ^m(2in\sqrt{\xi}) + BY^m(2in\sqrt{\xi})\right]$$

und

$$v = \frac{1}{i^m}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x}{t_0 - t}\left[AJ^m\left(2in\frac{\sqrt{xx_0}}{t_0 - t}\right) + BY^m\left(2in\frac{\sqrt{xx_0}}{t_0 - t}\right)\right] e^{-n\frac{x_0 + x}{t_0 - t}}.$$

Aus dieser Schar der Integrale heben wir folgende hervor:

a) für $m \geqq 0$

$$v = \frac{1}{i^m}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x}{t_0 - t} e^{-n\frac{x_0 + x}{t_0 - t}} J^m(2in\sqrt{\xi}) \tag{5}$$

oder

$$v = \frac{n^m x^{m+1}}{(t_0 - t)^{m+1}} e^{-n\frac{x_0 + x}{t_0 - t}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{n^{2s}\xi^s}{s!\,\Gamma(m+1+s)}, \tag{5*}$$

b) für $m \leqq 0$, $m = -\mu$

$$v = \frac{1}{i^\mu}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{x}{t_0 - t} e^{-n\frac{x_0 + x}{t_0 - t}} J^\mu(2in\sqrt{\xi}) \tag{6}$$

oder

$$v = n^\mu \frac{x x_0^\mu}{(t_0 - t)^{\mu+1}} e^{-n\frac{x_0 + x}{t_0 - t}} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{n^{2s}\xi^s}{s!\,\Gamma(\mu+1+s)}; \quad \xi = \frac{x x_0}{(t_0 - t)^2}. \tag{6*}$$

In der Folge werden wir annehmen, daß $x_0 > 0$ und $t_0 > 0$ sind. Dann ergibt sich aus den Ausdrücken (5*), (6*), daß die Funktion v sowie ihre Derivierten im Gebiete (G): $x \geqq 0$, $t \leqq t_0$ der (x, t)-Ebene endliche und kontinuierliche Funktionen ihrer Argumente x, t sind. Weiter zeigt sich, daß für $x = \infty$ die Funktion v, sowie ihre Derivierte $\frac{\partial v}{\partial x}$ der Grenze Null zustreben. In der Tat hat man für sehr großes x, also für sehr großes ξ asymptotisch*)

*) Siehe Gray and Matthews, Treatise on Bessel Functions, pg. 70.

$$J^m(2in\sqrt{\xi}) \sim \frac{i^m e^{2n\sqrt{\xi}}}{2\sqrt{n\pi}\sqrt[4]{\xi}},$$

raus folgt: für $m > 0$

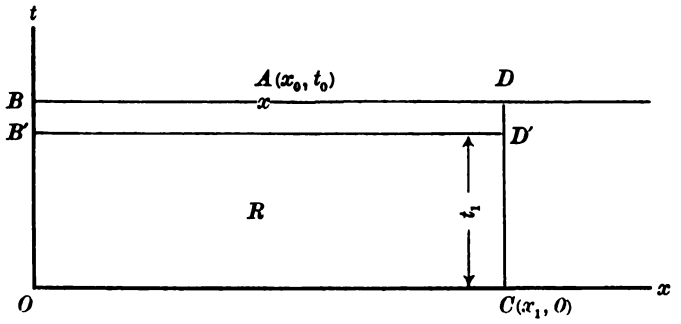
$$v \sim \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{x}{t_0 - t}} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2m+1}{4}} e^{-n\frac{(\sqrt{x_0}-\sqrt{x})^2}{t_0 - t}};$$

$m = -\mu \leqq 0$

$$v \sim \frac{1}{2\sqrt{n}\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{x}{t_0 - t}} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{2\mu-1}{4}} e^{-n\frac{(\sqrt{x_0}-\sqrt{x})^2}{t_0 - t}};$$

s aber liefert ohne weiteres die Richtigkeit der Behauptung. Auf selbe Weise kann man beweisen, daß auch $\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=\infty} = 0$ ist.

Wir wollen festlegen, daß das gesuchte Integral $z(x, t)$ der Differenlgleichung (1) sowie seine Derivierten erster und zweiter Ordnung für $\geqq 0$, $t \geqq 0$ endliche und stetige Funktionen sein sollen. Indem wir



nn vom Gebiete (G) den Bereich R durch die Grenzlinien $B'D'$: $= t_1 < t_0$, und CD': $x = x_1 > x_0$ ausscheiden, können wir auf den Beich R den Greenschen Satz anwenden:

$$\iint [vL(z) - zM(v)]\,dx\,dt = \int (Q\,dt - P\,dx),$$

$$P = -\frac{n}{x} zv, \quad Q = v\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{m+1}{x} zv$$

. Wir erhalten somit

$$\int_R \left\{\left(v\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{m+1}{x} zv\right) dt + \frac{n}{x} zv\,dx\right\} = 0.$$

a) Betrachten wir zunächst den Fall: $m > 0$ und bemerken, daß:

$$\int_R = \int_{B'O} + \int_{OC} + \int_{CD'} + \int_{D'B'} = 0.$$

1. Auf der Strecke $B'O$ ist $x = 0$, $dx = 0$. Weil aber bei $m > 0$ auch

$$[v]_{x=0}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{1}{x}\, v\right]_{x=0} = 0,$$

erhalten wir

$$\int_{B'O} = 0. \tag{11}$$

2. Auf der Strecke OC ist $t = 0$, $dt = 0$; wenn wir nun annehmen, daß

$$z_{t=0} = f(x)$$

ist, erhalten wir

$$\int_{OC} = \frac{n^{m+1}}{t_0^{m+1}} \int_0^{x_1} x^m e^{-n\frac{x_0+x}{t_0}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{n^{2s}}{s!\,\Gamma(m+1+s)} \frac{x^s x_0^s}{t_0^{2s}} \right) f(x)\,dx$$

oder

$$\int_{OC} = \frac{n}{i^m} \frac{1}{t_0} \int_0^{x_1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-n\frac{x_0+x}{t_0}} J^m\left(2in\frac{\sqrt{xx_0}}{t_0}\right) f(x)\,dx. \tag{12}$$

3. Auf der Strecke CD' ist $x = x_1$, $dx = 0$.

Weil sowohl v wie auch $\frac{1}{x}\, v$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ (vergl. 7) für $x = x_1 = \infty$ zu N konvergieren, ist

$$\int_{CD'} = \int_0 \left[v\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{m+1}{x} zv \right]_{x=x_1=\infty} = 0. \tag{13}$$

4. Endlich auf der Strecke $D'B'$ ist $t = t_1$, $dt = 0$, also

$$\int_{D'B'} = n \int_{x_1}^0 [zv]_{t=t_1} \frac{dx}{x} = n \int_{x_1}^0 \frac{1}{x}\, v(x, t_1)\, z(x, t_1)\,dx$$

$$\int_{D'B'} = \frac{n}{i^m} \frac{1}{t_0 - t_1} \int_{x_1}^0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-n\frac{x_0+x}{t_0-t}} J^m\left(2in\frac{\sqrt{xx_0}}{t_0-t_1}\right) z(x, t_1)\,dx.$$

Wenn wir nun annehmen, daß t_1 sich dem Werte t_0 ohne Grenze nähert, erhalten wir für sehr kleines positives $t_0 - t_1$ asymptotisch:

$$J^m\left(2in\frac{\sqrt{xx_0}}{t_0-t_1}\right) \sim \frac{i^m}{2\sqrt{n\pi}} \frac{\sqrt{t_0-t_1}}{\sqrt[4]{xx_0}}\, e^{2n\frac{\sqrt{xx_0}}{t_0-t_1}},$$

so daß:

$$\int_{D'B'} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2m+1}{4}} e^{-n\frac{(\sqrt{x_0}-\sqrt{x})^2}{t_0-t_1}} z(x, t_1) \frac{\sqrt{n}\,dx}{2\sqrt{x(t_0-t_1)}}.$$

oder wenn wir

$$\sqrt{n}\,\frac{\sqrt{x_0}-\sqrt{x}}{\sqrt{t_0-t_1}} = -u, \qquad \frac{\sqrt{n}\,dx}{2\sqrt{x(t_0-t_1)}} = du$$

setzen,

$$\int_{D'B'} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\sqrt{n}\sqrt{x_0}}{\sqrt{t_0-t_1}}}^{\sqrt{n}\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_0}}{\sqrt{t_0-t_1}}} \left(\frac{\sqrt{x_0}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{t_0-t_1}\,u}{\sqrt{x_0}}\right)^{\frac{2m+1}{2}}$$

$$\cdot\, e^{-u^2} z\left[\left(\sqrt{x_0}+\frac{u}{\sqrt{n}}\sqrt{t_0-t_1}\right)^2,\ t_0-(t_0-t_1)\right] du.$$

Weil nun $x_1 > x_0$ ist, so ist in der Grenze $t_1 = t_0$:

$$\int_{DB} = z(x_0, t_0)\,\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-u^2} du = -\,z(x_0, t_0). \tag{14}$$

Indem wir die Ausdrücke (11), (12), (13), (14) in die Gleichung (10) einsetzen, $x_1 = \infty$, $t_1 = t_0$ werden lassen, x, t anstatt x_0, t_0 und als Integrationsvariable λ schreiben, bekommen wir endlich:

$$z(x,t) = \frac{n}{t^m}\,\frac{1}{t}\int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-n\frac{x+\lambda}{t}} J^m\left(2in\frac{\sqrt{x\lambda}}{t}\right) f(\lambda)\,d\lambda \tag{15}$$

oder

$$z(x,t) = \frac{n^{m+1}}{t^{m+1}}\int_0^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{n^{2s}}{s!\,\Gamma(m+1+s)}\,\frac{x^s\lambda^s}{t^{2s}}\right) e^{-\frac{x+\lambda}{t}}\,\lambda^m f(\lambda)\,d\lambda. \tag{15*}$$

Wir haben also folgenden Satz: *Wenn $m > 0$ ist, stellt die Formel* (15) *oder* (15*) *ein Integral der Differentialgleichung* (1) *dar, welches für $t = 0$ die Werte $z = f(x)$ annimmt. Durch diese Werte ist $z(x, t)$ im ganzen Quadranten $x \geqq 0$, $t \geqq 0$ definiert.*

Daß für $t = 0$, $z = f(x)$ ist, kann man vermittels der Formel (15) leicht verifizieren. Für sehr kleines t, also sehr großes $\frac{\sqrt{x\lambda}}{t}$, hat man asymptotisch:

$$J^m\left(2in\frac{\sqrt{x\lambda}}{t}\right) \sim \frac{i^m\sqrt{t}\,e^{2n\frac{\sqrt{x\lambda}}{t}}}{2\sqrt{n\pi}\sqrt[4]{x\lambda}},$$

also

$$z(x,t) \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\frac{2m-1}{4}} e^{-n\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{\lambda})^2}{t}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{2\sqrt{xt}},$$

oder wenn man

$$\sqrt{n}\,\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{t}} = \mu$$

setzt,

$$z(x,t) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{n}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{t}}}^{-\infty} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{t}{n}}\,\mu}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{2m-1}{2}} e^{-\mu^2} f\left[\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{t}{n}}\,\mu\right)^2\right] d\mu,$$

so daß für $t = 0$

$$z(x,0) = f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} d\mu = f(x),$$

w. z. b. w.

Unter a) subsumiert sich noch der Fall $m = 0$. Denn hier ist

$$[v]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{v}{x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0} = \frac{1}{t_0 - t} e^{-n\frac{x_0}{t_0-t}},$$

also das Integral

$$\int_{BO} \text{ ist noch gleich Null,}$$

so daß

$$(16) \qquad z(x,t) = \frac{n}{t} \int_0^{\infty} e^{-n\frac{x+\lambda}{t}} J\left(2in\frac{\sqrt{x\lambda}}{t}\right) f(\lambda)\, d\lambda.$$

b)*) $m = -\mu < 0$.

Indem wir hier für v die Ausdrücke (6) und (6*) heranziehen und ähnlich wie früher verfahren, erhalten wir:

$$[v]_{x=0} = 0 \quad \left[\frac{v}{x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=0} = \frac{n^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \frac{x_0^{\mu}}{(t_0-t)^{\mu+1}} e^{-n\frac{x_0}{t_0-t}}, \text{ etc.,}$$

also:

$$1. \qquad \int_{BO} = \frac{n^{\mu}}{\Gamma(\mu)} x_0^{\mu} \int_0^{t_0} \frac{e^{-n\frac{x_0}{t_0-t}}}{(t_0-t)^{\mu+1}} \varphi(t)\, dt,$$

wo $z(x,t)_{x=0} = \varphi(t)$ gesetzt wird.

*) Der Fall $m = -1$ ist vom Verfasser in dem Anzeiger der Krakauer Akademie, Febr. 1905, behandelt worden.

2. $$\int_{OC} = n^{\mu+1}\frac{x_0^{\mu}}{t_0^{\mu+1}}\int_0^{x_1}\left[\sum_{s=0}^{\infty}\frac{n^{2s}}{s!\,\Gamma(\mu+1+s)}\left(\frac{x x_0}{t_0^2}\right)^s\right]e^{-n\frac{x_0+x}{t_0}} f(x)\,dx,$$

ler

$$\int_{OC} = \frac{1}{t^{\mu}}\frac{n}{t_0}\int_0^{x_1}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{\mu}{2}} e^{-n\frac{x_0+x}{t_0}} J^{\mu}\left(2in\frac{\sqrt{x x_0}}{t_0}\right) f(x)\,dx,$$

$f(x) = z_{t=0}$ ist.

3. Für $x_1 = \infty$ ist: $$\int_{CD} = 0,$$

4. $$\int_{DB} = -z(x_0, t_0).$$

Wenn wir also anstatt x_0, t_0 die Variabeln x, t, und als Integrations-iable λ einführen, bekommen wir endlich das Integral:

) $$z(x,t) = \frac{n^{\mu}}{\Gamma(\mu)}x^{\mu}\int_0^t e^{-n\frac{x}{t-\lambda}}\frac{\varphi(\lambda)}{(t-\lambda)^{\mu+1}}d\lambda$$

$$+\frac{n}{t^{\mu}}\frac{1}{t}\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{\mu}{2}} e^{-n\frac{x+\lambda}{t}} J^{\mu}\left(2in\frac{\sqrt{x\lambda}}{t}\right) f(\lambda)\,d\lambda$$

er

7*) $$z(x,t) = \frac{n^{\mu}}{\Gamma(\mu)}x^{\mu}\int_0^t e^{-n\frac{x}{t-\lambda}}\frac{\varphi(\lambda)}{(t-\lambda)^{\mu+1}}d\lambda$$

$$+ n^{\mu+1}\frac{x^{\mu}}{t^{\mu+1}}\int_0^{x}\left[\sum_{s=0}^{\infty}\frac{n^{2s}}{s!\,\Gamma(\mu+1+s)}\left(\frac{x\lambda}{t^2}\right)^s\right]e^{-n\frac{x+\lambda}{t}} f(\lambda)\,d\lambda,$$

elches für $x = 0$ in $z = \varphi(t)$,

für $t = 0$ in $z = f(x)$

etig übergeht.*)

Weil die Funktionen $\varphi(\lambda)$, $f(\lambda)$ voneinander unabhängig sind mit er Ausnahme, daß $\varphi(0) = f(0)$ sein soll, geht ohne weiteres hervor, daß *der der Ausdrücke rechter Hand* (17) *oder* (17*):

*) Die Formel (16) ($\mu = 0$) erhält man auch aus (17), indem man beachtet, daß ir $\mu = 0$ $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$ ist.

.8) $$z_1(x,t) = \frac{n^\mu}{\Gamma(\mu)} x^\mu \int_0^t e^{-n\frac{x}{t-\lambda}} \frac{\varphi(\lambda)}{(t-\lambda)^{\mu+1}} d\lambda,$$

(19) $$z_2(x,t) = \frac{n}{i^\mu} \frac{1}{t} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{\mu}{2}} e^{-n\frac{x+\lambda}{t}} J^\mu\left(2in\frac{\sqrt{x\lambda}}{t}\right) f(\lambda) d\lambda$$

oder

(19*) $$z_2(x,t) = n^{\mu+1} \frac{x^\mu}{t^{\mu+1}} \int_0^\infty \left[\sum_{s=0}^\infty \frac{n^{2s}}{s!\Gamma(\mu+1+s)} \left(\frac{x\lambda}{t^2}\right)^s\right] e^{-n\frac{x+\lambda}{t}} f(\lambda) d\lambda$$

für sich schon ein Integral der Differentialgleichung (1) *darstellt, und zwar*

$z_1(x,t)$ genügt den Randbedingungen: für $t=0$ ist $z_1 = 0$
„ $x=0$ „ $z_1 = \varphi(t)$,
$z_2(x,t)$ „ „ „ „ $t=0$ „ $z_2 = f(x)$
„ $x=0$ „ $z_1 = 0$.

Um dies zu verifizieren, verfahren wir folgendermaßen:
In der Formel (18) führen wir neue Integrationsvariable ein:

$$n\frac{x}{t-\lambda} = u, \quad \lambda = t - \frac{nx}{u}$$

und erhalten

$$z_1(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{\frac{nx}{t}}^\infty e^{-u} u^{\mu-1} \varphi\left(t - \frac{nx}{u}\right) du.$$

Es ist also:

für $t=0$, $z_1 = 0$,

für $x=0$ $z_1 = \frac{\varphi(t)}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\mu-1} du = \varphi(t)$.

In der Formel (19) wollen wir zunächst t sehr klein positiv nehmen. Dann ist asymptotisch

$$J^\mu\left(2in\frac{\sqrt{x\lambda}}{t}\right) \sim \frac{i^\mu \sqrt{t}}{2\sqrt{n\pi}\sqrt[4]{x\lambda}} e^{2n\frac{\sqrt{x\lambda}}{t}}.$$

Es ist also für sehr kleines $t > 0$:

$$z_2 \sim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{2\mu-1}{4}} e^{-n\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{\lambda})^2}{t}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

ler, wenn man

$$\sqrt{n}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{t}}=u$$

tzt,

$$z_2\sim-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\frac{nx}{t}}}^{-\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{t}{n}}u}\right)^{\frac{2\mu-1}{2}}e^{-u^2}f\left[\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{t}{n}}u\right)^2\right]du,$$

daß für $t=0$

$$z_2=f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=f(x).$$

enn man schließlich beachtet, daß $\sum_{s=0}^{\infty}\frac{n^{2s}}{s!\,\Gamma(\mu+1+s)}\left(\frac{x\lambda}{t^2}\right)^s<e^{n^2\frac{x\lambda}{t^2}}$ ist, be-mmt man:

$$|z_2|<n^{\mu+1}\frac{x^\mu}{t^{\mu+1}}e^{-n\frac{x}{t}}\int_0^{\infty}e^{n\left(\frac{nx}{t}-1\right)\frac{\lambda}{t}}|f(\lambda)|\,d\lambda.$$

enn also x klein genug ist, so daß $n\frac{x}{t}-1<0$ und wenn $f(\lambda)$ endlich eibt, ist das Integral rechter Seite endlich, also $(z_2)_{x=0}=0$.

Lemberg, Januar 1905.

Über mehrfache Ordnungstypen. I.

Von

Friedrich Riesz in Lőcse (Ungarn).

Man ist gewohnt, jene Eigenschaften der transfiniten Punktmannigfaltigkeiten, die auf dem Begriffe der Häufungsstelle beruhen, und die man als geometrische Eigenschaften von den arithmetischen zu unterscheiden pflegt, als untrennbar von der Lagerung jener Mengen im stetig ausgedehnten Raume zu betrachten. Herr G. Cantor hatte zuerst darauf aufmerksam gemacht, daß der Begriff der Fundamentalreihe und damit auch der Begriff der Häufungsstelle rein arithmetischer Natur sind und ausschließlich an dem Begriffe des Ordnungstypus haften. Damit ließen sich auch die weiteren, scheinbar geometrischen Begriffe auf die Ordnungstypen übertragen.

Für lineare Ordnungstypen sind die bezüglichen Untersuchungen von Herrn Cantor angestellt worden; dagegen sind die Ordnungstypen der transfiniten mehrfach geordneten Mengen noch nicht untersucht. Bei dem Aufschwunge, den in letzter Zeit die Theorie der ebenen und räumlichen Punktmannigfaltigkeiten erfahren hat, erscheint es wünschenswert, daß auch die Grundlagen einer Theorie der mehrfachen transfiniten Ordnungstypen durchgearbeitet werden. Aus dem genannten Gesichtspunkte sind es dann besonders die perfekten Ordnungstypen, die uns interessieren; die Untersuchung der perfekten zusammenhängenden Typen und ihrer Teilmengen führt zu einer Disziplin, welche die Analysis Situs der linearen Räume als Spezialfall enthält.

Dabei können von den Methoden der Mengenlehre nur jene angewandt werden, welche ausschließlich mit dem Begriffe des Ordnungstypus operieren. Der Begriff der Distanz oder des Jordanschen „écart“ wird zu entbehren sein, und es muß also der Begriff der Umgebung in jener allgemeineren Fassung übertragen werden, die auch schon sonstigen mengentheoretischen Untersuchungen geläufig ist. Damit fällt aber auch eines der wichtigsten Hilfsmittel der Lehre über Punktmengen fort, näm-

lich die gleichmäßige Stetigkeit der stetigen Funktion. Dieselbe wird jedoch ersetzt, indem es gelingt, den Heine-Borelschen Satz, der für sie die natürliche Grundlage bildet, sinngemäß zu übertragen.

I. Eine Menge heißt *n-fach geordnet*, wenn für das Rangverhältnis ihrer Elemente n verschiedene Rangordnungen maßgebend sind. Das Rangverhältnis in bezug auf die i^{te} Rangordnung wird durch die Zeichen

$$a \overset{i}{>} b; \quad a \overset{i}{<} b; \quad a \overset{i}{=} b$$

ausgedrückt, je nachdem a in bezug auf die i^{te} Rangordnung auf b folgt, ihm vorangeht oder mit ihm von gleichem Range ist; für zwei verschiedene Elemente kann nicht in bezug auf sämtliche Rangordnungen das Gleichheitszeichen gelten.

Können nun zwei n-fach geordnete Mengen umkehrbar eindeutig aufeinander so bezogen werden, daß die Rangverhältnisse erhalten bleiben, so sagt man, die beiden Mengen seien *ähnlich geordnet* oder ähnlich. Das Gemeinsame aller ähnlichen Mengen nennt man ihren *Ordnungstypus*. Er ist nach Cantor der Allgemeinbegriff, der entsteht, wenn man von der Beschaffenheit der Elemente abstrahiert, die Rangordnung aber beibehält.

Den Ordnungstypus der geordneten Menge M bezeichne ich durch $\overline{M}$.

II. Ist a irgend ein Element der geordneten Menge, und gibt es n Paare $b_1, c_1; \cdots; b_n, c_n$ von Elementen, welche den Ungleichungen

$$b_i \overset{i}{<} a \overset{i}{<} c_i \quad (i = 1, \cdots, n)$$

genügen, so nenne ich die Gesamtheit aller Elemente u, für welche ebenfalls die Ungleichungen

$$b_i \overset{i}{<} u \overset{i}{<} c_i$$

gelten, eine *Umgebung* des Elementes a. Ich sage, die Elemente u seien *innerhalb* dieser Umgebung gelegen. Ich sage von einem Elemente r, es wäre *auf dem Rande* der Umgebung gelegen, wenn es teilweise Ungleichungen obiger Form, teilweise oder ausschließlich aber Gleichungen von einer der Formen

$$r \overset{i}{=} \begin{matrix} b_i \\ c_i \end{matrix}$$

genügt.

Gibt es für ein Element a keine n Paare b_i, c_i von der obigen Art, so läßt sich noch immer eine *Umgebung in weiterem Sinne*, eine *einseitige Umgebung* desselben definieren, indem die fehlenden b_i, resp. c_i durch a selbst ersetzt werden.

III. Eine n-fach geordnete Menge, resp. ihr Ordnungstypus heiße *vollständig*, wenn es für jede beliebige Kombination von n verschiedenen, teilweise oder ganz identischen Elementen $a_1, \cdots, a_n$ der Menge immer ein Element x gibt, so daß

$$x \overset{i}{=} a_i \quad (i = 1, \cdots, n)$$

sei.

Jeder einfache Ordnungstypus ist vollständig.

Betrachtet man sämtliche Komplexe, die aus je n verschiedenen, teilweise oder sämtlich identischen Elementen einer n-fach geordneten Menge gebildet werden, so läßt sich die Menge derselben wieder als n-fach geordnete Menge auffassen, wenn man übereinkommt, daß zwei Komplexe $\mathsf{A} \equiv (a_1, \cdots, a_n)$ und $\mathsf{B} \equiv (b_1, \cdots, b_n)$ für identisch betrachtet werden, sobald für sämtliche i

$$a_i \overline{\underline{i}} b_i;$$

sonst aber für die Komplexe A und B die Beziehungen

$$\mathsf{A} \overset{i\rangle}{\underset{\langle i}{\overline{\underline{i}}}} \mathsf{B}$$

gelten, je nachdem

$$a_i \overset{i\rangle}{\underset{\langle i}{\overline{\underline{i}}}} b_i.$$

Die so definierte geordnete Menge ist von vollständigem Ordnungstypus. Ich nenne sie *den zur Menge gehörigen vollständigen Ordnungstypus*. Die primäre Menge ist dann jener Teilmenge der zugehörigen vollständigen Menge ähnlich, für deren Elemente $a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_n$, wenn für deren Elemente ihr Rangverhältnis in der vollständigen Menge erhalten bleibt. Jeder Ordnungstypus läßt sich somit als Teiltypus des zugehörigen vollständigen Ordnungstypus auffassen.

Man kann jeden vollständigen Ordnungstypus auch als die aus n einfachen Ordnungstypen gebildete Komplexmenge auffassen. Damit läßt sich die Theorie der n-fachen Ordnungstypen auf jene der einfachen zurückführen.

IV. Eine Umgebung im engeren Sinne eines Elementes nenne ich *vollständig*, wenn sie zugleich Umgebung desselben innerhalb der zugehörigen vollständigen Menge ist. Jedes Element, das eine vollständige Umgebung besitzt, heißt *inneres Element*, jedes sonstige heißt *Randelement* der Menge.

V. Außer der zur Menge gehörigen vollständigen Menge lassen sich noch andere Ordnungstypen definieren, die in enger Beziehung zu ihr stehen. Sind $i_1, i_2, \cdots, i_k$ k der ersten n Zahlen in ihrer natürlichen Anordnung, so läßt sich eine k-fach geordnete Menge definieren derart, daß jedem Elemente a der primären Menge ein Element a' dieser Menge entspricht und für irgend zwei Elemente die Beziehungen

$$a' \overset{i_j\rangle}{\underset{\langle i_j}{\overline{\underline{i_j}}}} b' \qquad (j = 1, \cdots, k)$$

ılten, je nachdem

$$a \begin{matrix} \overset{i_j}{>} \\ \overset{}{i_j} \\ \underset{}{<} \end{matrix} b.$$

gend zwei Elementen, welche in bezug auf alle k Rangordnungen von eichem Range sind, entspricht dasselbe Element a'.

Die so definierte Menge nenne ich eine *k-fache Projektion* der priären Menge. Es gibt $\binom{n}{k}$ k-fache Projektionen.

Die Projektionen einer vollständigen Menge sind ebenfalls vollständig.

VI. Die bisher entwickelten Begriffe lassen sich für sämtliche Ordngstypen definieren, unabhängig davon, ob dieselben endlich oder transit sind; der Begriff der Häufungsstelle ist hingegen für die Theorie der ansfiniten Ordnungstypen charakteristisch.

Das Element a heißt eine *Häufungsstelle* der Teilmenge T des Ordngstypus $\overline{M}$, wenn es in jeder Umgebung von a Elemente aus T gibt, e von a verschieden sind; anderenfalls heißt das Element a in bezug auf e Menge T *isoliert*. Es ist dann klar, daß nur transfinite Teilmengen äufungsstellen besitzen können. Es folgt auch unmittelbar aus der Deition, daß sämtliche Häufungsstellen von T auch Häufungsstellen für de Teilmenge von $\overline{M}$ sind, welche T enthält. Jedes Element also, das äufungsstelle für irgend eine Teilmenge ist, ist auch sicher Häufungsalle von $\overline{M}$ selbst.

Der Ordnungstypus $\overline{M}$ heißt *abgeschlossen*, wenn jede transfinite Teilenge eine Häufungsstelle besitzt.

Für die Abgeschlossenheit eines Ordnungstypus läßt sich leicht eine twendige und hinreichende Bedingung angeben, welche nur *eine* Klasse n Teilmengen in Betracht zieht. Man definiere als *Fundamentalreihe* le wohlgeordnete Reihe von Elementen aus $\overline{M}$ ohne letztes Element, für lche in bezug auf jede der Rangordnungen eine der folgenden 3 Mögchkeiten besteht:

1. Die Wohlordnung deckt sich mit der natürlichen Anordnung der Elemente in der Rangordnung;
2. sie deckt sich mit der inversen Anordnung derselben;
3. alle Elemente der Reihe sind in bezug auf die Rangordnung von demselben Range.

Je nach den verschiedenen Möglichkeiten in bezug auf die einzelnen ngordnungen kann man in einem n-fachen Ordnungstypus $3^n - 1$ verhiedene Arten von Fundamentalreihen unterscheiden.

Das Element a heiße *Grenzelement* der Fundamentalreihe, wenn für de Umgebung desselben die Elemente der Fundamentalreihe von einem

gewissen Elemente an alle in der Umgebung liegen. Daß es für jede Fundamentalreihe nur ein Grenzelement geben kann, leuchtet unmittelbar ein. Ich sage dann, *die Fundamentalreihe konvergiere gegen das Element*

Das Grenzelement einer Fundamentalreihe ist immer eine Häufungsstelle derselben.

Die Fundamentalreihe heiße eine *Cantorsche*, wenn ihr die Ordnungszahl ω der der Größe nach geordneten positiven ganzen Zahlen zukommt. *Eine Cantorsche Fundamentalreihe hat ihr Grenzelement zur einzigen Häufungsstelle. Damit also ein Ordnungstypus abgeschlossen sei, ist es sicher notwendig, daß jede Cantorsche Fundamentalreihe desselben ein Grenzelement besitze.* Daß aber *diese Bedingung für die Abgeschlossenheit des Typus a — hinreicht*, folgt daraus, daß jede transfinite Teilmenge, wie man leicht zeigt, Cantorsche Fundamentalreihen enthält; die etwaigen Grenzelemente derselben sind dann zugleich Häufungsstellen der Teilmenge.

Aus der gegebenen Bedingung folgt unmittelbar, daß *sowohl jede Projektion eines abgeschlossenen Ordnungstypus wie auch der zugehörige vollständige Ordnungstypus ebenfalls abgeschlossen sind.*

Eine Teilmenge irgend eines Ordnungstypus heiße *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Häufungsstellen enthält und wenn jede weitere Teilmenge derselben eine Häufungsstelle besitzt.

Man zeigt nach bekannter Art, daß *es für jede abzählbare Reihe von abgeschlossenen Mengen, von denen jede in allen vorhergehenden enthalten ist, wenigstens ein Element gibt, das sämtlichen Mengen gemeinsam ist.*

Jede Teilmenge eines abgeschlossenen Ordnungstypus, welche alle ihre Häufungsstellen enthält, ist notwendig abgeschlossen.

VII. Ein Element a des Ordnungstypus $\overline{M}$ heißt ein *Hauptelement* desselben, wenn es Häufungsstelle irgend einer Teilmenge ist, wenn also in jeder Umgebung desselben noch andere Elemente liegen. Diese definierende Eigenschaft des Hauptelementes läßt sich auch in folgender Form fassen: *Innerhalb jeder Umgebung des Hauptelementes gibt es weitere Umgebungen desselben.*

Ein Element, das nicht Hauptelement ist, heiße *isoliert.*

Das Hauptelement heiße ein *Cantorsches*, wenn es Grenzelement einer Cantorschen Fundamentalreihe ist.

Gibt es für ein Hauptelement a eine wohlgeordnete Reihe von Umgebungen, so daß jede Umgebung in allen vorhergehenden enthalten und a das einzige allen Umgebungen der Reihe gemeinsame Element ist, so sage ich, die Reihe *konvergiere* gegen das Element a und das Element a sei *zugänglich.* Die kleinste Mächtigkeit aller wohlgeordneten Reihen von Umgebungen, die gegen das Element a konvergieren, nenne ich die *Zugänglichkeit* von a. Das Element a heiße *einfach zugänglich*, wenn seine

Zugänglichkeit die erste Mächtigkeit ist, wenn es also eine abzählbare Folge von Umgebungen gibt, die gegen das Element konvergiert.

Alle Elemente des der Größe der Koordinaten nach geordneten Zahlenraumes sind einfach zugängliche Hauptelemente; im allgemeinen jedoch wird die Unzugänglichkeit der Hauptelemente die Regel, die Zugänglichkeit den Ausnahmefall bilden.

Ich zeige nun, daß *in jeder Teilmenge T, welche das zugängliche Element a zur Häufungsstelle hat, wenigstens eine Fundamentalreihe enthalten ist, die gegen a konvergiert.* Betrachtet man nämlich irgend eine wohlgeordnete Menge ineinander gelegener Umgebungen, die gegen das Element a konvergiert, so läßt sich zunächst mittels derselben eine wohlgeordnete Menge von Elementen aus T ausscheiden, derart, daß es für jedes Element der Menge eine Umgebung aus der Umgebungsmenge gibt, welche das Element enthält, alle Elemente des zugehörigen Abschnittes aber ausschließt, und daß es für jede Umgebung von a ein Element der Menge gibt, von welcher an alle Elemente in der Umgebung liegen. Man definiert diese Menge auf folgende Weise. Man denke sich zu jeder Umgebung der wohlgeordneten Menge ein von a in bezug auf jede Rangordnung verschiedenes Element aus T zugeordnet, das in jener Umgebung liegt. Es sei a_1 jenes Element, das der Umgebung u_1 zugeordnet ist. Man betrachte nun sämtliche wohlgeordneten Mengen von Elementen, welche a_1 zum ersten Elemente haben und folgende Eigenschaft besitzen: jedes Element ist einer Umgebung zugeordnet, welche die erste ist, deren sämtliche Projektionen die Projektionen aller Elemente des zugehörigen Abschnittes ausschließen. Daß es solche Mengen gibt, und daß sämtliche als Abschnitte einer einzigen A unter ihnen betrachtet werden können, welche das Element a zur Häufungsstelle hat, zeigt man nun mittels bekannter Schlußart. Man muß dabei voraussetzen, daß die Gesamtheit aller Elemente von T, die in bezug auf keine Rangordnung mit a von gleichem Range sind, a zur Häufungsstelle hat; anderenfalls wird die Untersuchung auf einen Ordnungstypus zurückgeführt, dessen Mannigfaltigkeit kleiner als n ist.

Die so definierte wohlgeordnete Menge läßt sich endlich in höchstens 2^n Teilmengen zerlegen, von denen jede in der für die ganze Menge bestimmten Wohlordnung in bezug auf jede Rangordnung eine der beiden Eigenschaften besitzt, daß sie entweder stets wächst, oder stets abnimmt. Je nachdem folgt auch a auf alle Elemente oder es geht allen voran. Es gibt dann wenigstens eine unter diesen Teilmengen, für welche a eine Häufungsstelle ist; dieselbe stellt dann in der Wohlordnung eine Fundamentalreihe dar, die gegen a konvergiert.

Die Zugänglichkeit des Elementes a bildet somit eine hinreichende Bedingung dafür, damit in der Teilmenge T, welche das Element a zur

Häufungsstelle hat, eine Fundamentalreihe enthalten sei, die gegen a konvergiert. Die Bedingung ist jedoch keineswegs notwendig. Um zu einer notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingung zu gelangen, spalte man den Ordnungstypus $\overline{M}$ in Teiltypen, so daß zwei Elemente dann und nur dann zu demselben Teiltypus gezählt werden, wenn sie in bezug auf a von derselben Rangbeziehung sind. Das Element a werde sämtlichen Teiltypen zugezählt. Betrachtet man nun diese Teiltypen und die durch sie aus der Menge T ausgeschiedenen Teilmengen gesondert, so gelangt man zu der *notwendigen und hinreichenden Bedingung: Es muß unter den Teiltypen wenigstens einen geben, so daß das Element a in bezug auf denselben zugänglich und dabei Häufungsstelle der in demselben enthaltenen Teilmenge von T sei.*

Für einfache Ordnungstypen kann man die Existenz einer Fundamentalreihe aus der Möglichkeit der Wohlordnung der Teilmenge folgern.

Die kleinste der Mächtigkeiten aller Fundamentalreihen aus T, die gegen a konvergieren, heiße die *Häufung der Teilmenge T in der Umgebung von a.* Dieselbe ist niemals größer als die Zugänglichkeit.

Ein drittes Aleph, das für die Umgebung der Häufungsstelle charakteristisch ist, ist die kleinste der Mächtigkeiten aller Teilmengen von T, die in den Umgebungen von a enthalten sind. Dieses letzte Aleph ist für Teilmengen des stetigen Raumes schon durch G. Cantor definiert worden und heiße nach ihm *die Mächtigkeit T in der Umgebung des Elementes a.*

Die definierten drei Mächtigkeiten sind für die Struktur der Ordnungstypen, resp. ihrer Teilmengen von Wichtigkeit; sie sind Invarianten der stetigen Abbildung.

VIII. Ein Ordnungstypus heiße *in sich dicht,* wenn jedes Element Hauptelement ist; ist jedes Element ein Cantorsches Hauptelement, so heiße er *in sich dicht im Sinne Cantors.*

Es leuchtet unmittelbar ein, daß *der zu einem in sich dichten Ordnungstypus gehörige vollständige Ordnungstypus ebenfalls in sich dicht ist;* er ist in sich dicht im Sinne Cantors, wenn dies für die primäre Menge der Fall ist. Dagegen ist eine Projektion eines in sich dichten Typus nicht notwendig in sich dicht.

Eine Teilmenge irgend eines Ordnungstypus heißt *in sich dicht,* wenn sie alle ihre Elemente zu Häufungsstellen hat.

Ein zugleich abgeschlossener und in sich dichter Ordnungstypus, wie auch eine zugleich abgeschlossene und in sich dichte Teilmenge heißen *perfekt.* Der perfekte Ordnungstypus ist ein *Cantorscher**), wenn alle Elemente Cantorsche Hauptelemente sind.

*) Indem ich den Begriff des Hauptelementes allgemeiner als Herr Cantor fasse, bezeichne ich jene Klassen der Hauptelemente, wie auch der vom Begriffe des

IX. Die *Ableitung* T' einer Teilmenge T, die *Komplementärmenge*, wie auch die Begriffe *überall dicht* und *nirgends dicht* für Teilmengen werden hier analog wie für Punktmannigfaltigkeiten definiert. *Damit die Ableitung einer Teilmenge T abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß T selbst in einer abgeschlossenen Teilmenge enthalten sei.* Die kleinste abgeschlossene Menge dieser Eigenschaft ist dann die Vereinigungsmenge $\{T, T'\}$ von T und T', d. h. die Gesamtheit aller Elemente, die entweder der Menge T oder ihrer Ableitung oder aber beiden angehören.

Die Teilmengen T_1, T_2 heißen *isoliert* in bezug aufeinander, wenn den Mengen $\{T_1, T_1'\}$ und $\{T_2, T_2'\}$ kein Element gemeinsam ist.

X. Ein Ordnungstypus heißt *zusammenhängend*, wenn er nicht in zwei isolierte Teilmengen zerlegt werden kann, die Komplementärmengen zueinander sind. Eine Teilmenge heißt *zusammenhängend*, wenn sie nicht zwei isolierte Teilmengen enthält, die sie ganz ausmachen.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß *nur in sich dichte Ordnungstypen* im Sinne unserer Definition *zusammenhängend sein können.*

Eine Teilmenge, die selbständig einen zusammenhängenden Ordnungstypus abgibt, ist nicht notwendig zusammenhängend; und es muß auch nicht jede zusammenhängende Teilmenge selbständig von zusammenhängendem Ordnungstypus sein.

Jede zusammenhängende Teilmenge bleibt zusammenhängend, wenn man ihr beliebige Häufungsstellen beifügt.

Ich sage von einer Teilmenge τ, sie *störe den Zusammenhang* der Menge M oder der Teilmenge T, wenn es zwei Teilmengen T_1, T_2 gibt, die nicht ganz τ angehören, insgesamt die Menge M, resp. die Teilmenge T samt τ ausmachen, so daß die gemeinsamen Elemente und Häufungsstellen der Mengen $\{T_1, T_1'\}$ und $\{T_2, T_2'\}$ der Menge τ angehören.

Läßt sich eine Menge in zwei isolierte Teilmengen spalten, so ist jede zusammenhängende Teilmenge der Menge ganz in einer derselben enthalten. Auf Grund dieser Bemerkung beweist man leicht folgende Sätze

Die Vereinigungsmenge jeder abzählbaren Folge von zusammenhängenden Teilmengen, von denen jede mit der nächstfolgenden wenigstens ein Element gemein hat, ist ebenfalls zusammenhängend.

Die Vereinigungsmenge einer Menge von zusammenhängenden Teilmengen, für welche es eine zusammenhängende Teilmenge gibt, die mit jeder der Mengen wenigstens ein Element gemein hat und ganz der Vereinigungsmenge angehört, ist zusammenhängend.

Gibt es für jedes Paar von Elementen einer Teilmenge zusammen-

---

Hauptelementes abhängenden Begriffe mit dem Namen Cantors, die für einfache Typen die Begriffe Cantors ergeben.

hängende Teilmengen, die beide Elemente enthalten, so ist auch die Teilmenge zusammenhängend.

XI. Läßt sich eine Projektion eines Ordnungstypus in zwei isolierte Teilmengen spalten, so ist dadurch auch eine Spaltung des Ordnungstypus in zwei isolierte Teilmengen definiert, jene nämlich, die die beiden Teilmengen der Projektion zu Projektionen haben. *Sämtliche Projektionen eines zusammenhängenden Ordnungstypus sind somit ebenfalls zusammenhängend.*

Für irgend zwei Teilmengen eines vollständigen Ordnungstypus, die Komplementärmengen zueinander sind, gibt es immer eine Zahl i und je ein Element a und b der beiden Teilmengen, so daß

$$a \overline{\underline{j}} b$$

sei für alle $j \neq i$. Sind nun die beiden Teilmengen isoliert, so bilden auch die ihnen angehörenden Elemente der einfach geordneten Menge aller x, für welche für alle $j \neq i$

$$x \overline{\underline{j}} a \overline{\underline{j}} b,$$

zwei isolierte Teilmengen. Diese einfach geordnete Menge ist aber der i^{ten} einfachen Projektion des vollständigen Ordnungstypus ähnlich.

Damit also ein n-facher vollständiger Ordnungstypus zusammenhängend sei, ist notwendig und hinreichend, daß er die Komplexmenge von n zusammenhängenden, einfachen Ordnungstypen bilde.

Aus den beiden Sätzen folgt der für unsere weiteren Untersuchungen äußerst wichtige Satz, daß *jeder zu einem zusammenhängenden Ordnungstypus gehörige vollständige Ordnungstypus ebenfalls zusammenhängend ist.*

XII. *Damit ein perfekter Ordnungstypus zusammenhängend sei, ist notwendig und hinreichend, daß er nicht in zwei perfekte Teilmengen zerlegt werden kann, die Komplementärmengen zueinander sind.* Die Notwendigkeit dieser Bedingung leuchtet unmittelbar ein. Daß sie auch hinreicht, folgt daraus, daß, wenn ein perfekter Ordnungstypus überhaupt zwei isolierte Teilmengen besitzt, die Komplementärmengen zueinander sind, dieselben notwendig perfekt sind.

Dieselbe Bedingung gilt auch für zusammenhängende perfekte Teilmengen.

XIII. Um die perfekten, zusammenhängenden Typen näher zu untersuchen, wende ich mich zunächst zu den einfachen.

Jede Teilung der Elemente eines einfachen Ordnungstypus in zwei Klassen, so daß jedes Element einer und nur einer der beiden Klassen angehört und jedes Element der ersten Klasse jedem Elemente der zweiten Klasse vorangeht, nenne ich einen *Schnitt.*

Wie man leicht zeigt, sind die einfachen, perfekt zusammenhängenden

Ordnungstypen dadurch charakterisiert, daß es für jeden Schnitt ein und nur ein Element gibt, so daß kein Element der ersten Klasse auf dieses Element folgt und kein Element der zweiten Klasse ihm vorangeht. Das Element ist entweder letztes Element der ersten oder erstes Element der zweiten Klasse. Ich sage, das Element werde durch den Schnitt definiert. Es kann zwei uneigentliche Schnitte geben, bei denen die erste, resp. die zweite Klasse kein Element enthält; sie definieren eventuell ein erstes, resp. ein letztes Element.

XIV. Sind a und b irgend zwei Elemente und ist $a < b$, so nenne ich die Gesamtheit aller Elemente, die dem Elemente a nicht vorangehen und zugleich nicht auf das Element b folgen, das *Intervall* ab. a und b heißen *Endelemente*, die übrigen *innere Elemente* des Intervalls. Für Intervalle in einfachen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypen besteht nun der Satz:

*Wird für das Intervall ab eine unendliche Menge von Intervallen definiert, so daß jedes Element des Intervalles ab inneres Element wenigstens eines dieser Intervalle ist, so gibt es auch stets eine endliche Teilmenge solcher Intervalle.**)

Um den Satz zu beweisen, definiere ich einen Schnitt auf folgende Art: Ich weise der zweiten Klasse jedes Element c zu, für welches $a < c$ ist, und es keine endliche Teilmenge der Intervallmenge gibt, so daß jedes Element des Intervalles ac inneres Element für wenigstens ein Intervall dieser Teilmenge wäre. Jedes andere Element weise ich der ersten Klasse zu. Daß hierdurch ein Schnitt definiert wird, d. h. daß jedes Element der ersten Klasse jedem Elemente der zweiten Klasse vorangeht, leuchtet unmittelbar ein. Jedenfalls gehört das Element a, wie auch eine Umgebung desselben der ersten Klasse an. Wäre nun der Satz nicht richtig, so müßte es Fälle geben, wo b der zweiten Klasse angehört; das durch den Schnitt definierte Element müßte dann dem Intervalle ab angehören, ohne mit a zusammenzufallen. Für dieses Element gäbe es nun jedenfalls ein umschließendes Intervall der Intervallmenge; dies führt aber zu Widerspruch, denn in diesem Intervalle müßten sowohl Elemente der ersten, wie der zweiten Klasse liegen.

XV. Der Begriff des Intervalles läßt sich zunächst für n-fache vollständige Ordnungstypen erweitern. Betrachtet man nämlich je ein Inter-

---

*) Der Satz bildet eine Erweiterung und Übertragung des Heine-Borelschen Satzes, der für eine abzählbare Menge von Intervallen des Kontinuums analog lautet. Der Borelsche Beweis, der mit den Distanz- und Abzählbarkeitsbegriffen operiert, läßt sich nicht übertragen. Der hier gegebene Beweis scheint auch einfacher als der Borelsche zu sein. Siehe auch meine Note „Sur un théorème de M. Borel", C. R. 23 janvier 1905).

vall der einfachen Ordnungstypen, deren Komplexmenge der vollständige Ordnungstypus ist, so definieren diese Intervalle ebenfalls eine Komplexmenge, welche Teilmenge des vollständigen Ordnungstypus ist und die ich ein *Elementargebiet* desselben nenne. Elemente des Elementargebietes, die Komplexe aus nur inneren Elementen der Intervalle sind, heißen *innere Elemente* des Elementargebietes; die Gesamtheit der übrigen Elemente bildet die *Grenze* desselben.

Der Begriff des Elementargebietes läßt sich dann auch für jeden Ordnungstypus definieren, indem eine Teilmenge desselben Elementargebiet genannt wird, wenn sie Elementargebiet für den zugehörigen vollständigen Ordnungstypus ist.

XVI. Für vollständige Ordnungstypen, die Komplexmengen von einfachen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypen sind, also für alle vollständigen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypen gilt der Satz in XIV, wenn man an Stelle des Wortes Intervall das Wort Elementargebiet setzt. Ich beweise ihn mittels der Schlußmethode von n auf $n+1$. Der Satz gilt nach XIV für $n=1$. Er gelte für alle positiven ganzen Zahlen bis n. Betrachte man dann einen $(n+1)$-fachen vollständigen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, ein Elementargebiet E desselben und eine unendliche Menge von Elementargebieten, welche die Eigenschaft besitzt, daß jedes Element von E inneres Element für wenigstens ein Elementargebiet der Gebietsmenge ist. Jede Gesamtheit aller Elemente des $(n+1)$-fachen Ordnungstypus, welchen dasselbe Element des $n+1^{\text{ten}}$ einfachen Ordnungstypus in der Projektion entspricht, bildet einen n-fachen vollständigen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, in welchem durch das Elementargebiet E und die transfinite Gebietsmenge ein Elementargebiet und eine Gebietsmenge von ähnlicher Eigenschaft ausgeschieden werden. Wendet man nun den für n als richtig vorausgesetzten Satz auf diesen n-fachen Ordnungstypus an, so folgt, daß es eine endliche Teilmenge von Elementargebieten der gegebenen Gebietsmenge gibt, so daß jedes Element, das zugleich dem Elementargebiete E und dem definierten n-fachen Ordnungstypus angehört, inneres Element für wenigstens ein Elementargebiet der Teilmenge sei. Zu dieser Teilmenge gibt es nun ein Intervall des $n+1^{\text{ten}}$ einfachen Ordnungstypus, so daß jedes Element von E, dessen $n+1^{\text{te}}$ einfache Projektion innerhalb dieses Intervalles liegt, inneres Element für wenigstens ein Elementargebiet der endlichen Teilmenge ist. Betrachtet man nun alle analogen n-fachen Ordnungstypen, die Elemente aus E enthalten, so bestimmen dieselben ein Intervall und eine Intervallmenge im $n+1^{\text{ten}}$ einfachen Ordnungstypus. Wendet man nun auf diese den Satz für $n=1$ an, so ist dadurch der Satz bewiesen.

Ist somit E ein Elementargebiet eines vollständigen, perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, so gibt es in jeder unendlichen Menge von Elementargebieten desselben von der Beschaffenheit, daß jedes Element von E inneres Element für wenigstens ein Elementargebiet der Gebietsmenge ist, auch eine endliche Teilmenge solcher Elementargebiete.

XVII. Der soeben bewiesene Satz läßt sich noch allgemeiner fassen. Eine Teilmenge irgend eines Ordnungstypus heiße *im Endlichen gelegen*, wenn sie ausschließlich aus inneren Elementen besteht und wenn jede Fundamentalreihe aus ihr ein Grenzelement besitzt, das inneres Element ist. *Jede im Endlichen gelegene Teilmenge ist dann in einem Elementarbereiche des zugehörigen vollständigen Ordnungstypus enthalten.*

Ist nun der Ordnungstypus perfekt zusammenhängend und die im Endlichen gelegene Teilmenge abgeschlossen, und wird eine Menge von Elementargebieten definiert, derart, daß jedes Element der abgeschlossenen Menge inneres Element für wenigstens ein Gebiet der Gebietsmenge sei, so gibt es für jedes Element jenes Elementargebietes des zugehörigen vollständigen Typus, das die abgeschlossene Menge enthält, wenn es nicht der abgeschlossenen Menge angehört, ein umschließendes Elementargebiet, innerhalb dessen kein Element der abgeschlossenen Menge liegt. Die Gesamtheit dieser Elementargebiete bildet mit der vorgegebenen Gebietsmenge eine Gebietsmenge, auf die sich der gegebene Satz anwenden läßt. Die ausgeschiedene endliche Teilmenge zerfällt dann in zwei Teile, der eine gehört der vorgegebenen, der andere der abgeschlossenen Gebietsmenge an. Der erste Teil der endlichen Teilmenge besitzt aber die Eigenschaft, daß es darin für jedes Element der abgeschlossenen Menge wenigstens ein Elementargebiet gibt, für welches es inneres Element ist. Es besteht somit der Satz:

Ist A eine im Endlichen gelegene, abgeschlossene Teilmenge eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, so gibt es in jeder unendlichen Menge von Elementargebieten von der Eigenschaft, daß jedes Element von A inneres Element für wenigstens eines derselben ist, eine endliche Teilmenge solcher Elementargebiete.

XVIII. Man definiere endlich als *Gebiet* jede zusammenhängende Teilmenge eines perfekten Ordnungstypus, deren Zusammenhang durch keine Teilmenge der Komplementärmenge gestört wird, die ausschließlich aus inneren Elementen besteht und keine Häufungsstelle der Komplementärmenge enthält. Die Gesamtheit jener Elemente der Komplementärmenge, die Häufungsstellen für das Gebiet sind, heißt die *Grenze* des Gebietes. *Die Grenze bildet eine abgeschlossene, nirgends dichte Menge.* Die Grenze gehört dem Gebiete nicht an; wird sie ihm angeschlossen, so entsteht eine perfekt zusammenhängende Menge, die man schlechthin

ebenfalls Gebiet nennen kann; von Elementen, die dem ursprünglichen Gebiete angehören, wird man dann sagen, sie seien *innerhalb* des Gebietes gelegen.

Da es für jedes Element innerhalb eines Gebietes ein umschließendes Elementargebiet gibt, das innerhalb des Gebietes liegt, so folgt, daß der zuletzt gegebene Satz auch in folgender Form ausgesprochen werden kann:

Ist A eine im Endlichen gelegene, abgeschlossene Teilmenge eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus, so gibt es in jeder unendlichen Menge von Gebieten von der Eigenschaft, daß jedes Element von A innerhalb wenigstens eines derselben liegt, eine endliche Teilmenge solcher Gebiete.

XIX. Man definiere als *Gebietekomplex* jede Teilmenge eines perfekten Ordnungstypus, die ausschließlich aus inneren Elementen besteht und keine Häufungsstelle der Komplementärmenge enthält. Elemente des Gebietekomplexes heißen *innerhalb* desselben; Elemente der Komplementärmenge, die Häufungsstellen für den Komplex sind, heißen auf der *Grenze* desselben gelegen. Die Grenze bildet eine abgeschlossene, nirgends dichte Menge; samt der Grenze bildet der Gebietekomplex eine perfekte Menge.

Jedes Gebiet ist zugleich Gebietekomplex.

Kann der Gebietekomplex durch eine endliche Anzahl von Elementargebieten ausgefüllt werden, die auch übereinander greifen dürfen, so heiße er ein *Elementarkomplex.*

XX. *Für irgend zwei im Endlichen gelegene, isolierte Teilmengen eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus gibt es einen Elementarkomplex, der die eine Menge im Inneren enthält, die andere ausschließt.* Denn jede der Mengen, z. B. die erste, bildet samt ihrer Ableitung eine abgeschlossene Menge, von der jedes Element in ein Elementargebiet eingeschlossen werden kann, welches kein Element der zweiten Menge enthält. Es wird auf diese Art eine Menge von Elementargebieten definiert; aus derselben läßt sich nach XVII eine endliche Teilmenge, also ein Elementarkomplex ausscheiden, der die abgeschlossene Menge enthält.

XXI. Es sei A eine abgeschlossene, im Endlichen gelegene Teilmenge eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus; alle Elemente der abgeschlossenen Menge seien zugänglich und zwar von derselben Zugänglichkeit. Man betrachte die Menge aller Elementarkomplexe, die die abgeschlossene Menge enthalten. Es kann aus derselben, wie man leicht zeigt, *eine wohlgeordnete Menge von Gebietekomplexen ohne letztes Glied ausgeschieden werden, so daß jeder Komplex in allen vorhergehenden enthalten ist, und daß die Gesamtheit jener Elemente, die in allen Komplexen enthalten sind, die abgeschlossene Menge ausmacht.* Man kann dann sagen, *die Komplexmenge konvergiere gegen die abgeschlossene Menge.*

Ist die abgeschlossene Menge zusammenhängend, so gibt es in jedem Gebietekomplexe, dem sie angehört, ein wohldefiniertes Gebiet, welches sie enthält und in welchem alle Gebiete ähnlicher Eigenschaft enthalten sind. Dasselbe wird gebildet durch die Gesamtheit aller zusammenhängenden Teilmengen des Gebietekomplexes, welche Elemente der abgeschlossenen Menge enthalten.

Es folgt hieraus, daß *es für jede perfekt zusammenhängende, im Endlichen gelegene Teilmenge eines perfekten Ordnungstypus, die aus Elementen gleicher Zugänglichkeit besteht, eine wohlgeordnete Menge von Gebieten ohne letztes Glied gibt, welche gegen sie konvergiert.*

Sind alle Elemente der abgeschlossenen Menge einfach zugängliche Hauptelemente, so kann das Verfahren so eingerichtet werden, daß die konvergente wohlgeordnete Menge eine abzählbare Folge abgibt.

XXII. Ist die Grenze eines Gebietes eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus im Endlichen gelegen und besteht sie aus Elementen gleicher Zugänglichkeit, so lassen sich auf dieselbe die geführten Betrachtungen anwenden. Es gibt dann eine wohlgeordnete Menge von Elementarkomplexen ohne letztes Glied, so daß jeder Komplex alle folgenden enthält und die Gesamtheit der Elemente, die allen Komplexen angehören, die Gebietsgrenze ausmacht. Für jeden dieser Elementarkomplexe bildet die Gesamtheit jener Elemente des Gebietes, die weder dem Elementarkomplexe, noch der Grenze desselben angehören, ebenfalls einen Elementarkomplex. *Es gibt somit eine wohlgeordnete Menge von Elementarkomplexen ohne letztes Glied, von denen jeder in allen folgenden enthalten ist, derart, daß die Gesamtheit aller Elemente, die in irgend einem dieser Komplexe enthalten sind, das ganze Gebiet ausmacht.*

Für irgend ein Element des Gebietes gibt es nun einen Elementarkomplex der Menge, in dem es enthalten ist; es gibt dann einen wohldefinierten Elementarkomplex, Teil jenes Elementarkomplexes, welcher zugleich ein Gebiet ist, das Element enthält und alle Elementarkomplexe ähnlicher Eigenschaft umfaßt. Die Grenze dieses Gebietes gehört der Grenze des Elementarkomplexes an. Durch jene wohlgeordnete Menge von Elementarkomplexen ist dann auch die wohlgeordnete Menge dieser Elementarkomplexe bestimmt, welche Gebiete sind und alle dasselbe Element enthalten. Jedes Gebiet der Menge ist in allen folgenden enthalten. Die Gesamtheit aller Elemente, die irgend einem (also auch allen folgenden) dieser Gebiete angehören, bilden ein Gebiet, das im ursprünglichen Gebiete und dessen Grenze in der Grenze desselben enthalten ist; dasselbe ist aber mit dem ursprünglichen Gebiete identisch, denn die Grenze des Gebietes stört nicht den Zusammenhang.

Es gibt somit für jedes Gebiet eines perfekt zusammenhängenden Ord-

nungstypus, dessen Grenze im Endlichen gelegen ist und nur aus Elementen gleicher Zugänglichkeit besteht, eine wohlgeordnete Menge von Gebieten ohne letztes Glied, die zugleich Elementarkomplexe sind, so daß jedes in allen folgenden enthalten ist und die Gesamtheit aller Elemente, die irgend einem dieser Gebiete angehören, das ursprüngliche Gebiet ausmacht.

XXIII. Eine im Endlichen gelegene zusammenhängende Gebietsgrenze, in der jedes Element Häufungsstelle jener Menge ist, die die Komplementärmenge des Gebietes samt der Grenze bildet, heiße eine *geschlossene Grenze.* Indem man dem in XXII angegebenen Verfahren eine gegen die Grenze konvergierende wohlgeordnete Menge von Elementarkomplexen zugrunde legt, die zugleich Gebiete sind, was doch nach XXI für die zusammenhängende Grenze möglich ist, wenn nur dieselbe aus gleich zugänglichen Elementen besteht, *so führt das Verfahren zu einer wohlgeordneten Menge ohne letztes Glied von Elementarkomplexen, die gleichzeitig Gebiete mit geschlossenen Grenzen sind; jedes Gebiet ist in allen folgenden enthalten und die Gesamtheit aller Elemente, die irgend einem dieser Gebiete angehören, macht das ursprüngliche Gebiet aus.*

Man zeigt leicht, daß *es für jedes Gebiet, dessen Grenze im Endlichen gelegen ist, eine wohldefinierte geschlossene Grenze gibt, derart, daß das Gebiet in jenem Gebiete, welches durch die geschlossene Grenze begrenzt wird, enthalten ist.*

Hieraus und aus XXI folgert man dann, daß *es für jedes Gebiet, das eine geschlossene, aus nur gleich zugänglichen Elementen bestehende Grenze hat, eine wohlgeordnete Menge ohne letztes Glied von Elementarkomplexen, die zugleich Gebiete sind, gibt, welche ebenfalls geschlossene Grenzen haben, derart, daß jedes Gebiet alle folgenden enthält und daß die Gesamtheit der Elemente, die allen Gebieten gemeinsam sind, das ursprüngliche Gebiet samt seiner Grenze ausmacht.*

XXIV. Sind a und b zwei Elemente eines Ordnungstypus, die in bezug auf die i^{te} Rangordnung von verschiedenem, in bezug auf die übrigen Rangordnungen von gleichem Range sind, und bildet die Gesamtheit aller Elemente, die in bezug auf die i^{te} Rangordnung zwischen a und b liegen, und in bezug auf die übrigen Rangordnungen mit a und b von gleichem Range sind, samt a und b eine perfekte zusammenhängende Teilmenge, so nenne ich dieselbe eine Strecke i^{ter} Art, und bezeichne sie als die *Strecke* ab. a und b heißen *Endelemente*, die übrigen *innere Elemente* der Strecke. *Zu jedem inneren Element eines perfekt zusammenhängenden Ordnungstypus gibt es Strecken, für welche es inneres, wie auch solche, für welche es Endelement ist.*

Aus einer endlichen Anzahl von Strecken lassen sich analog, wie in der Geometrie, *einfache Streckenzüge* zusammensetzen. *Für irgend zwei*

Elemente eines Gebietes gibt es immer Streckenzüge, die ganz dem Gebiete angehören und beide Elemente enthalten. Die Gesamtheit aller Streckenzüge nämlich, die das Element a enthalten, bildet eine Teilmenge A des Gebietes. Würde nun A nicht das ganze Gebiet ausfüllen, so müßte es, da der Zusammenhang des Gebietes durch die Komplementärmenge nicht gestört wird, ein Element h des Gebietes geben, welches Häufungsstelle sowohl der Menge A wie auch ihrer Komplementärmenge wäre. In einer vollständigen Umgebung von a, die dem Gebiete angehört, würden Elemente beider Komplementärmengen liegen, die sich miteinander, also auch mit a, durch Streckenzüge verbinden ließen; die Menge A muß somit das ganze Gebiet ausfüllen.

Die entwickelten Sätze bilden die Quelle für eine Reihe weiterer Sätze, besonders über Gebietsteilung, die analog lauten, wie die bekannten Sätze für Punktmannigfaltigkeiten.*)

XXV. Von dem Gesichtspunkte der entwickelten Theorie ist die Lehre von den transfiniten Punktmannigfaltigkeiten als die Theorie der Teilmengen eines gewissen zusammenhängenden Ordnungstypus aufzufassen, dessen sämtliche Elemente innerhalb Elementargebieten liegen, die perfekte Mengen ausmachen. Unter allen Ordnungstypen dieser Art ist die stetig ausgedehnte Zahlenmannigfaltigkeit durch gewisse Mächtigkeitseigenschaften ausgezeichnet. Man gelangt nun zur Frage nach der Verallgemeinerung dieser Theorie, indem man jene Mächtigkeitseigenschaften fallen läßt.

Ein n-facher Ordnungstypus der beschriebenen Art heiße ein *n-dimensionaler Bereich*, in Zeichen B^n. Werden zu den Projektionen desselben eventuell erste und letzte Elemente hinzugefügt, so daß dieselben zu perfekt zusammenhängenden Typen ergänzt werden, und die Komplexmenge gebildet, so läßt sich der Bereich als ein Gebiet derselben auffassen und jede im Endlichen gelegene Teilmenge der Komplexmenge, welche samt ihren Häufungsstellen dem Bereiche angehört, ist auch eine im Endlichen gelegene Teilmenge des Bereiches. Die erhaltenen Resultate lassen sich somit auf die Bereiche übertragen.

Lócse (Ungarn), im Januar 1905.

*) Bezüglich der Sätze für Punktmannigfaltigkeiten s. Schoenflies, Beiträge zur Theorie der Punktmengen II., Math. Ann., Bd. 59, S. 129.

Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik.

Von

Leopold Fejér in Kolozsvár.*)

Einleitung.

Herr Ostwald hat in seinem Werke**) „Lehrbuch der allgemeinen Chemie" ein allgemeines energetisches Prinzip aufgestellt, welches folgendermaßen lautet:

„Von allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige eintreten, welche in gegebener Zeit den größtmöglichen Umsatz ergibt."

Wir beschränken uns auf das Gebiet der reinen Mechanik. Wie immer wir dann auch das Prinzip in bezug auf seine mathematische Behandlung auffassen mögen,***) so sind jedenfalls folgende zwei Fragen zu beantworten:

a) Gibt es überhaupt eine Bewegung, welche den gegebenen Anfangsbedingungen genügt, und welche unter sämtlichen, zum Vergleiche zugelassenen Bewegungen in der Ostwaldschen Weise ausgezeichnet ist?

b) Wenn eine solche Bewegung existiert, stimmt sie mit der Bewegung überein, welche bei denselben Anfangsbedingungen durch die Newton-Lagrangeschen Differentialgleichungen der Mechanik geliefert wird?

Die Antwort, welche wir auf diese Fragen bekommen, hängt natürlich wesentlich davon ab, wie wir das Ostwaldsche Prinzip auffassen. Eine

*) Diese Arbeit ist, von § 4 abgesehen, im wesentlichen im „Mathematikai és Természettudományi Értesitö" (Budapest, 1905) der ungarischen Akademie erschienen.

**) S. die erste Auflage, sowie die zweite, 1902, Bd. I, S. 36, 37.

***) In bezug auf Literatur seien, außer den im Encyklopädie-Artikel des Herrn Voss (Band IV_1, Heft 1, S. 110) zitierten Arbeiten, folgende erwähnt:

1892. C. Neumann, Sächsische Berichte, Bd. 44.
1901. A. Voss, Bayerische Berichte, Bd. 53.
1903. G. Zemplén, Annalen der Physik, Bd. 12.
1903. E. Förster, Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 49.
1904. M. Réthy, Mathematische Annalen, Bd. 59.

bestimmte Auffassung des Prinzips wird durch eine bestimmte mathematische Behandlung gegeben. Eine solche Auffassung repräsentiert die des Herrn C. Neumann, die einzige, die wir in diesen einleitenden Zeilen besprechen, da sie unter sämtlichen in der Literatur auftretenden Auffassungen diejenige ist, welche der Auffassung des Herrn Ostwald, wie sie sich auf Seite 36, 37 seiner Chemie findet, am nächsten steht.

Die Neumannsche Behandlung kann — wenn wir uns auf die Bewegung eines freien Massenpunktes in der Ebene beschränken — im wesentlichen in folgender Weise dargestellt werden.*)

Es sei $t = 0$ die Anfangszeit und es seien x_0, y_0 die gegebenen rechtwinkligen Koordinaten der Anfangslage. Es seien ferner u_0, v_0 die ebenfalls gegebenen Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit. Zur Zeit ($\tau > 0$) sollen x, y die Koordinaten des Punktes, u, v die Komponenten seiner Geschwindigkeit bezeichnen. Bedeutet $U(x, y)$ die gegebene Potentialfunktion, so haben die Werte x, y, u, v die postulierte Gleichung der lebendigen Kraft

$$x'^2 + y'^2 = 2(U(x, y) + h)$$

zu befriedigen, d. h. es muß

$$(\alpha) \qquad u^2 + v^2 = 2(U(x, y) + h)$$

sein, wo h die Konstante der lebendigen Kraft ist, die aus der Gleichung

$$(\beta) \qquad u_0^2 + v_0^2 = 2(U(x_0, y_0) + h)$$

zu entnehmen ist.

Durch Elimination von h aus (α), (β) erhalten wir

$$u^2 + v^2 - (u_0^2 + v_0^2) = 2(U(x, y) - U(x_0, y_0)),$$

und wenn wir $U(x, y)$ in der Nachbarschaft von x_0, y_0 linear ansetzen,

$$u^2 + v^2 - (u_0^2 + v_0^2) = 2\{U_x^0(x - x_0) + U_y^0(y - y_0)\}.$$

Hier bedeuten U_x^0, U_y^0 die Werte der Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ an der Stelle x_0, y_0. Wenn wir noch approximativ

$$x - x_0 = \frac{u + u_0}{2}\tau, \quad y - y_0 = \frac{v + v_0}{2}\tau$$

setzen, so bekommen wir für die zu bestimmenden Komponenten u, v der Endgeschwindigkeit folgende quadratische Gleichung:

$$(\gamma) \qquad u^2 + v^2 - \tau U_x^0 u - \tau U_y^0 v = u_0^2 + v_0^2 + \tau U_x^0 u_0 + \tau U_y^0 v_0.$$

Unsere Aufgabe besteht nun vorläufig darin, ein Wertepaar (u, v) zu be-

*) Vergl. a. a. O.

stimmen, welches der quadratischen Gleichung mit konstanten Koeffizienten (γ) genügt, und für welches der Wert des Energieumsatzes

$$\frac{u^2+v^2}{2} - \frac{u_0^2+v_0^2}{2}$$

ein Maximum wird.

Wir vermeiden jede Rechnung, wenn wir die Verhältnisse in einer (u, v) Ebene geometrisch interpretieren. Der Relation (γ) entspricht hier ein Kreis, dessen Mittelpunkt C_τ die Koordinaten

$$(\delta) \qquad \frac{\tau}{2} U_x^0, \qquad \frac{\tau}{2} U_y^0$$

besitzt, und dessen Radius wir mit R_τ bezeichnen. Unsere Maximumsaufgabe verlangt nun die Bestimmung jenes Kreispunktes M_τ, der vom Anfangspunkte O des Koordinatensystems (u, v) den größtmöglichen Abstand besitzt. Dieser Punkt M_τ ist aber offenbar der Schnittpunkt des Halbstrahles OC_τ mit dem Kreise. Also liefern die Koordinaten u_τ, v_τ des Schnittpunktes das gesuchte Wertepaar u, v.

Zur Lösung der eigentlichen Aufgabe haben wir dann nach Herrn C. Neumann die Grenzwerte

$$(\varepsilon) \qquad \lim_{\tau=+0} \frac{u_\tau - u_0}{\tau}, \qquad \lim_{\tau=+0} \frac{v_\tau - v_0}{\tau}$$

zu bilden, welche, wenn sie existieren, die Anfangsbeschleunigung als Funktion der Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit liefern.

Wir können aber leicht zeigen, daß die Grenzwerte (ε), *wenn nur eine der Komponenten* u_0, v_0 *von Null verschieden ist, gar nicht existieren.* Zu diesem Zwecke genügt es offenbar zu zeigen, daß das Wertepaar (u_τ, v_τ) bei dem Grenzübergange $\lim \tau = 0$ *nicht* zum Wertepaar u_0, v_0 konvergiert, oder geometrisch: daß M_τ für $\lim \tau = 0$ *nicht* zu S_0 konvergiert, wo S_0 den Punkt mit den Koordinaten u_0, v_0 bezeichnet.

Zu welchem Punkte konvergiert also M_τ für $\lim \tau = 0$?

Der Mittelpunkt C_τ (mit den Koordinaten (δ)) strebt bei dem erwähntem Grenzübergange dem Anfangspunkte O zu, und zwar längs eines Halbstrahles l, der von τ ganz unabhängig ist, und den man etwa so konstruieren kann, daß man den Punkt mit den Koordinaten U_x^0, U_y^0 mit O verbindet. Der Radius R_τ konvergiert gegen $\sqrt{u_0^2+v_0^2}$. Daraus folgt, daß M_τ nach jenem Punkte M_0 konvergiert, in welchem der Halbstrahl l den Kreis mit dem Mittelpunkte O und mit dem Radius $\sqrt{u_0^2+v_0^2}$ schneidet. Da nun M_0 und S_0 im allgemeinen voneinander verschieden sind, *so können wir sagen, daß diese Methode im allgemeinen zu gar keiner Differentialgleichung führt.*

Eben deshalb beschränkt sich Herr C. Neumann in seinem zitierten tikel auf den Fall $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, in welchem man in der Tat ein stimmtes Resultat erhält. In diesem Falle fällt S_0 in den Anfangspunkt , und M_τ konvergiert für $\lim \tau = 0$ zu demselben Punkte S_0;*) wir ben jetzt, wie man leicht einsieht,

$$u_\tau = \tau U_x^0, \qquad v_\tau = \tau U_y^0,$$

$$\lim_{\tau=0} u_\tau = u_0 = 0, \qquad \lim_{\tau=0} v_\tau = v_0 = 0,$$

$$\lim_{\tau=0} \frac{u_\tau}{\tau} = x''(0), \qquad \lim_{\tau=0} \frac{v_\tau}{\tau} = y''(0)$$

d also durch Grenzübergang in (η)

$$x_0'' = U_x(x_0, y_0), \qquad y_0'' = U_y(x_0, y_0).$$

s Prinzip führt uns also im Falle $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ zu den Newton-grangeschen Gleichungen, die wir aber natürlich nicht als für eine liebige Zeit t gültige „Differentialgleichungen" sondern bloß als Glei-ungen erhielten, die durch die *Anfangs*position die *Anfangs*beschleunigung fern — wenn die *Anfangs*geschwindigkeit gleich Null ist.

Die vorangehende Besprechung wird eine strenge Analyse des Prinzips hl als wünschenswert erscheinen lassen. Diese liefert zwar zumeist gative Resultate, führt aber zu einer Aufgabe — die wir Ostwaldsche fgabe nennen —, die vielleicht mathematisch ein gewisses Interesse rbietet. Sie steht mit gewissen klassischen Untersuchungen von Jo-ann Bernoulli im Zusammenhang. Wir heben besonders hervor, daß e Aufgabe im allgemeinen keine Lösung zuläßt, weil eine in Betracht mmende Funktion wohl eine obere Grenze, aber kein Maximum besitzt.

§ 1.

Die Ostwaldsche Aufgabe.

Es bezeichne A_0 die Anfangslage des in der Ebene des rechtwinkligen ordinatensystems XOY beweglichen Punktes. Es seien x_0, y_0 die gebenen Koordinaten von A_0, und x_0', y_0' die ebenfalls gegebenen Kompo-nten der Anfangsgeschwindigkeit. Wir bezeichnen ferner durch $\overrightarrow{A_0 V}$ n Vektor, der vom Punkte A_0 ausgeht und die Anfangsgeschwindigkeit r Größe und Richtung nach darstellt.

*) Außer dem Neumannschen Falle ist der Fall $\frac{u_0}{v_0} = \frac{U_x^0}{U_y^0}$ der einzige, in welchem zu S_0 konvergiert. Wir untersuchen diesen nicht weiter.

Nehmen wir nun eine beliebige Kurve A_0g, die von A_0 ausgeht und im Punkte A_0 den durch den Vektor $\overrightarrow{A_0V}$ definierten Halbstrahl berührt. Man kann dann den Massenpunkt, der sich zur Zeit $t=0$ im Punkte A_0 befindet, auf der Kurve A_0g so führen, daß einerseits zu jeder Zeit die Gleichung der lebendigen Kraft

$$\frac{x'^2+y'^2}{2} = U(x,y)+h \tag{1}$$

erfüllt ist, und andererseits die Anfangsbedingungen

$$x(0)=x_0, \qquad y(0)=y_0,$$
$$x'(0)=x_0', \qquad y'(0)=y_0'$$

befriedigt werden. Dabei bedeutet $U(x,y)$ die gegebene Potentialfunktion und h die Konstante der lebendigen Kraft, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist.

Es sei ferner t ein gegebener Zeitpunkt, und A_t die (ganz bestimmte) neue Lage, die der Punkt zur Zeit t auf der Kurve A_0g einnimmt. Die Bewegung soll dabei, wie schon bemerkt, nach einer „Fahrordnung" geschehen, die auf der Kurve A_0g durch die Gleichung (1) bestimmt ist. Bezeichnen wir dann durch s die auf der Kurve A_0g zurückgelegte Bogenlänge, so wird diese durch die Gleichung

$$t=\int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{2(U(x,y)+h)}} \tag{7}$$

(implicite) bestimmt. Hierbei ist die Integration längs der Kurve A_0g zu erstrecken, und $d\sigma$ bedeutet das Bogenelement längs der Kurve A_0g.

Betrachten wir nun die Gesamtheit aller Kurven, die von A_0 ausgehen und dort den Halbstrahl A_0V berühren. Zu jeder Kurve dieser Gesamtheit gehört in der oben auseinandergesetzten Weise ein Punkt A_t. Die *Ostwaldsche Aufgabe* besteht nun — nach unserer Auffassung — im folgenden:

Es soll diejenige Kurve A_0g bestimmt werden, die durch den Punkt A_0 geht, dort den Halbstrahl A_0V berührt, und für welche in dem ihr entsprechenden Punkte A_t die größtmögliche Potentialdifferenz (der größtmögliche Energieumsatz) $U(x,y)-U(x_0,y_0)$ auftritt.

Die so formulierte Ostwaldsche Aufgabe ist eigentlich kein Problem der Variationsrechnung im engeren Sinne (es ist nämlich kein bestimmtes Integral durch eine passend gewählte Kurve extrem zu machen), sondern ein gewöhnliches Maximumsproblem mit einer Integralnebenbedingung. Die Funktion zweier Variabeln $U(x,y)$ ist es, deren Maximum zu bestimmen

und zwar in einem zweidimensionalen Gebiete, das durch die Gesamtt der Punkte A_t gebildet wird. Die nähere Untersuchung führt sofort f eine wesentliche Unterscheidung. Die Aufgabe zeigt nämlich einen dern Charakter, je nachdem die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null, er von Null verschieden ist.*) Im ersten Falle *schrumpft* nämlich *der ktor der Anfangsgeschwindigkeit auf einen Punkt zusammen*, bestimmt o gar keine vektorielle Richtung. Infolgedessen sind die Kurven $A_0 g$ ı der wesentlichen Beschränkung, nach welcher sie in A_0 eine bestimmte htung $A_0 V$ berühren müssen, befreit.

Im zweiten Falle aber *bestimmt* der Vektor der Anfangsgeschwindigt *einen ganz bestimmten Halbstrahl* $A_0 V$, den dann sämtliche Kurven y in A_0 notwendig berühren müssen.

Die jetzt erwähnte Fallsonderung, je nachdem die Anfangsgeschwindigt verschwindet oder nicht, soll aber keine definitive sein. Von chtigkeit ist nämlich nur die Frage, ob die Anfangsgeschwindigkeit e vektorielle Richtung, der sich dann die Kurven $A_0 g$ in A_0 anmiegen müssen, bestimmt oder nicht? Eben deshalb werden in der handlung der Ostwaldschen Aufgabe die beiden folgenden Fälle unterıieden:

1. Fall, *in welchem der Vektor der Anfangsgeschwindigkeit* $\overrightarrow{A_0 V}$ *nur Größe nach gegeben ist, aber der Richtung nach frei bleibt.* (Dem ·ziellen Falle $\overrightarrow{A_0 V} = 0$ entspricht die Bewegung aus dem Ruhezustande.)

2. Fall, *in welchem der Vektor* $\overrightarrow{A_0 V}$ *sowohl der Größe* (die von Null schieden ist) *als der Richtung nach gegeben ist.*

Sehen wir nun zu, weshalb diese Unterscheidung überhaupt wichtig Um das Wesentliche recht anschaulich hervortreten zu lassen, zeigen : dies an einer Aufgabe, die der Ostwaldschen eng verwandt ist, bei der ɔr die auftretenden Größen eine einfache *geometrische* Bedeutung haben, hrend bei der Ostwaldschen Aufgabe die entsprechenden Größen nur *mechanischem* Sinne eine einfache Interpretation gestatten. Diese Aufɔe ist die folgende.

§ 2.

Eine plangeometrische Aufgabe.

Es sei eine gerade Linie *ee*, und auf dieser ein Punkt A_0 gegeben. ɜ Gerade *ee* teilt die Ebene in zwei Hälften, von welchen wir die eine ra die „rechte Hälfte" nennen wollen. Es sei ferner *d* eine gegebene

*) Wir haben gesehen, daß schon die Analyse des Herrn C. Neumann diesen terschied hervortreten ließ.

Länge. Wir führen nun von A_0 ausgehend eine beliebige Kurve A_0g, die ganz in der rechten Hälfte der Ebene verläuft, und tragen von A_0, entlang dieser Kurve, die Länge d ab. Es sei A_d der Endpunkt, den wir so erhalten. Die Aufgabe bestehe nun darin, diejenige Kurve A_0g zu bestimmen, für welche der Endpunkt A_d den größtmöglichen senkrechten Abstand von der Geraden ee hat. Und zwar wollen wir diese Aufgabe lösen:

I. für den Fall, wo die Kurven A_0g in A_0 gar keiner Beschränkung in bezug auf Berührung unterworfen sind;

II. für den Fall, wo wir verlangen, daß nur diejenigen Kurven A_0g in Betracht kommen sollen, die in A_0 einen gegebenen Halbstrahl A_0V (der in der rechten Hälfte der Ebene verläuft) berühren.

Es ist ersichtlich, daß der Fall I. der 1. Ostwaldschen Aufgabe, der Fall II. der 2. Ostwaldschen Aufgabe entspricht.

Um I. zu erledigen, errichten wir in A_0 die Senkrechte auf ee, tragen auf dieser (nach rechts) die Strecke d ab und erhalten einen Endpunkt A. Es ist nun klar, daß die Senkrechte A_0A die Lösung der Aufgabe I. gibt, und daß A eben dieser in größtmöglicher Entfernung von ee liegende Punkt ist.

Die Aufgabe II. hat dagegen (im allgemeinen) keine Lösung. Es ist nämlich zunächst klar, daß die Abstände der Endpunkte A_d von der Geraden ee eine obere Grenze haben, die keinesfalls *größer* ist, als der Abstand d des Lösungspunktes A der Aufgabe I. Wir behaupten nun, daß diese obere Grenze *genau* d ist. Betrachten wir zu diesem Zwecke die Kurve A_0g, deren Gleichung

$$y = axe^{-\alpha^2x^2} \tag{3}$$

ist, und zwar in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen y-Achse die Gerade ee, und dessen x-Achse die Senkrechte A_0A ist. Hier bedeutet a die trigonometrische Tangente jenes Winkels, der durch die x-Achse und durch den Halbstrahl A_0V gebildet wird, und α eine positive Konstante. Die durch die Gleichung (3) definierte Kurve gehört nun in der Tat zur Mannigfaltigkeit der jetzt in Betracht kommenden Kurven. Sie geht nämlich durch den Punkt A_0, verläuft in der rechten Hälfte der Ebene und berührt in A_0 den Halbstrahl A_0V $\left(\text{weil } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = a \text{ ist}\right)$. Wenn wir nun in Gleichung (3) die Konstante α^2 genügend groß wählen, so können wir dadurch erreichen, daß der Endpunkt A_d dem Punkte A beliebig nahe kommt. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Kurve (3) für $\lim \alpha^2 = \infty$ sich der x-Achse in einfacher Weise asymptotisch nähert. Die obere Grenze der Abstände ist also genau d.

Diese obere Grenze d^* wird aber durch keine der Kurven A_0g er-
ıt. Denn überhaupt die *einzige* Kurve A_0g, die von A_0 ausgeht und
ı Endpunkt A_d liefert, der den Abstand d von ee hat, ist die gerade
ɜ A_0A. Diese gehört aber nicht mehr zu den im Falle II. in Be-
ıt kommenden Kurven, weil sie in A_0 den Halbstrahl A_0V nicht be-
t. Die Aufgabe II. hat also keine Lösung.

Sie hat aber doch eine Lösung in dem speziellen Falle, wo der
ɔstrahl A_0V mit A_0A zusammenfällt. Da hebt sich die Schwierigkeit
ɜn der Berührung in A_0 weg, und es ist die Strecke A_0A die Lösung
Aufgabe II. (also dieselbe, die auch I. entsprach).

Nach dieser Digression wenden wir uns zur Behandlung der Ost-
dschen Aufgabe. Wir untersuchen zunächst den Fall 1.

§ 3.

Behandlung des 1. Falles.

Es sei A_0 die Anfangslage des Punktes, ferner seien pp und PP
Linien gleichen Potentials, die einen Streifen bilden, innerhalb dessen
der Punkt A_0 befindet.*) Diese zwei äquipotentiellen Linien seien so
ɜ aneinander gelegen, daß das Potential U fortwährend *wächst*, wenn
die durch A_0 gehende Kraftlinie von pp bis PP durchlaufen.

Wir bewegen uns von nun an nur innerhalb des eben konstruierten
ifens, den wir kurz durch S bezeichnen. Mit anderen Worten: wir
ıen den Endzeitwert t so klein an, daß der auf A_0g liegende und
h Gleichung

$$t = \int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{2\,(U+h)}}$$

mmte Endpunkt A_t bei beliebiger Wahl der Kurve A_0g in das Innere
Streifens S fällt.**) Daß der Punkt A_t, wenn nur t genügend klein
ıotwendig in das Innere des Streifens S fällt, läßt sich mit Hilfe von
ehr leicht zeigen.

Es sei nun A_0bA jene Kurve A_0g, auf welcher der nach Glei-
g (1) sich bewegende Massenpunkt nach Ablauf der Zeit t zu einem
ınkte A gelangt, in welchem der größtmögliche Potentialwert U

*) Wir setzen hier voraus, daß A_0 keine Gleichgewichtslage sei. Dieser Fall
ich übrigens mit wenigen Modifikationen auch durch die obige Methode be-
ln.

**) Wenn wir das Zeitintervall $(0, t)$ von vornherein der Größe nach ein-
ıken, so tun wir etwas, was bei der Behandlung der mechanischen Prinzipien
ıein üblich ist. Die Extremumeigenschaft zeigt sich bekanntlich im allgemeinen
ıuch nur in einem gehörig abgegrenzten Zeitintervalle.

auftritt.*) Wir behaupten, daß die Bahn $A_0 b A$ dann notwendig folgende Eigenschaft besitzt:

Unter sämtlichen die Punkte A_0 und A verbindenden Kurven wird die Kurve $A_0 b A$ in kürzester Zeit durchlaufen, vorausgesetzt, daß sämtliche Bewegungen nach Gleichung (1) *stattfinden.*

Angenommen nämlich, es existiere eine Kurve $A_0 b' A$, für welche die Durchlaufungszeit

$$\tau = \int_{A_0}^{A} \frac{d\sigma}{\sqrt{2(U+h)}}$$

(das Integral erstreckt sich längs $A_0 b' A$) kleiner wäre als die zur Beschreibung der Kurve $A_0 b A$ nötige Zeit t, so würde der Massenpunkt, indem er die Kurve $A_0 b' A$ passiert, schon zur Zeit τ in A anlangen und könnte den noch zur Verfügung stehenden Zeitrest $(t - \tau)$ darauf verwenden, um zu einem Punkte *höheren* Potentials A' zu steigen. Infolgedessen wäre eine Bahn vorhanden, auf der der Massenpunkt zur Zeit t zu einem Punkte A' gelangen würde, in welchem der Potentialwert größer ist als in A — im Widerspruche zur Voraussetzung.

Also ist die Kurve, entlang deren der Punkt A des größtmöglichen Potentialwertes erreicht wird, notwendig eine durch Gleichung (1) und durch die Punkte A_0, A bestimmte *Brachistochrone.*

Wir können also jetzt die Mannigfaltigkeit der Kurven $A_0 g$ beiseite lassen und haben bloß die einparametrige Schar der durch den Punkt A_0 gehenden Brachistochronen zu betrachten.**) Jeder Kurve der Schar entspricht ein Punkt A_t, und der geometrische Ort dieser Punkte A_t ist eine Kurve T_t, eine Transversale des Feldes. Zur vollständigen Lösung der Aufgabe haben wir bloß denjenigen Punkt A der Transversale T_t zu bestimmen, in welchem das Potential $U(x, y)$ den größten Wert annimmt.***) Wir erhalten also eine im allgemeinen ganz bestimmte Brachistochrone $A_0 A$ als Lösung.

Es läßt sich sehr leicht einsehen, daß die so konstruierte Lösung in der Tat die verlangte Maximumseigenschaft besitzt.

*) Wir bemerken, daß die Konstante h in Gleichung (1) bestimmt ist, da die *Größe* der Anfangsgeschwindigkeit $\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}$ vorgeschrieben ist. Von nun an bedeute h in Gl. (1) den so bestimmten Wert.

**) Von nun an verkleinern wir das Zeitintervall $(0, t)$ — wenn es nötig ist — noch mehr; nämlich so, daß dann A_t nicht nur in das Innere des Streifens S fällt, sondern in eine Umgebung von A_0, innerhalb deren die Schar der Brachistochronkurven ein „Feld" bildet. S. in bezug auf diese Terminologie: E. Zermelo und H. Hahn, Math. Enc. II A 8a (Bd. II_1. Heft 5, S. 626 ff.).

***) Es kann vorkommen, daß $U(x, y)$ längs der ganzen Transversale konstant ist. In diesem Falle, den wir später besprechen, ist die Lösung unbestimmt.

Hiermit wäre die 1. Ostwaldsche Aufgabe erledigt.

Wir heben noch folgendes hervor: *Die als Lösung der 1. Ostwald-en Aufgabe erscheinende Brachistochrone steht in ihrem Endpunkte A hogonal zur Niveaulinie, die durch A hindurchgeht.* Denn einerseits be-irt die Niveaulinie in A die Transversale T_t (weil A jener Punkt von ist, wo $U(x, y)$ ein Maximum wird). Andererseits schneidet T_t sämt-ie durch A_0 gehende Brachistochronen orthogonal.*) Folglich schneidet Brachistochrone A_0A die durch A gehende Niveaulinie orthogonal.

Nach Erledigung des 1. Falles fragen wir nun folgendes: *Angenommen, Anfangsgeschwindigkeit $A_0\vec{V}$ sei gleich Null; gibt es eine durch A_0 ende Kurve, längs deren die Ostwaldsche Maximumseigenschaft zu jeder t erfüllt ist, immer vorausgesetzt, daß die Bewegung nach* (1) *geschieht?* r können natürlich sofort sagen, daß im allgemeinen eine solche Be-gung nicht existiert. Die Auflösung der 1. Ostwaldschen Aufgabe gte nämlich, daß die Bewegung schon vollkommen bestimmt ist, wenn das Erfülltsein der Ostwaldschen Maximumseigenschaft für ein be-nmtes t fordern.

Wir wissen schon, daß die verlangte Bahn eine Brachistochrone sein ß. Da nun die Ostwaldsche Maximumseigenschaft für jede Zeit t h. in einem wenn auch noch so kleinen, aber endlichen Zeitintervalle t)) erfüllt sein soll, so muß diese Brachistochrone, nach unserer früheren merkung, die Schar der Niveaulinien orthogonal schneiden. Die Bra-stochrone schneidet aber die Niveaulinien nur ganz ausnahmsweise hogonal, so daß also, wie schon bemerkt, *eine Bewegung mit der ver-gten Eigenschaft im allgemeinen nicht existiert.*

Um die speziellen Fälle zu bestimmen, in welchen eine Bewegung t der verlangten Eigenschaft dennoch vorhanden ist, haben wir die-igen speziellen Potentiale zu suchen, bei welchen eine Brachistochrone Niveaulinien senkrecht durchkreuzen kann. Wir brauchen hierzu die

*) Vergl. L. Roger, Thèse sur les brachistochrones (Journal de Liouville, série, t. XIII, p. 41, 1848), und hauptsächlich: Darboux, Théorie générale des faces, t. II, p. 456. — Ist z. B. die in A_0 vorgeschriebene Anfangsgeschwindigkeit ich Null, und die wirkende Kraft die Schwere, so besteht die Schar der durch A_0 enden Brachistochronen aus der einfach unendlichen Schar der Zykloiden, die in ihre Spitze haben und dort die durch A_0 gehende Vertikale (die ebenfalls zur ar gehört) berühren. Die orthogonale Trajektorie T_t ist in diesem Falle die schon Johann Bernoulli betrachtete „*Synchrone*". Der Punkt A ist in diesem Falle tiefste Punkt der Synchrone. Vergl. Johannis Bernoulli Opera omnia, Lau-nae et Genevae, 1742, T. 1, p. 192 etc., und Ostwalds Klassiker, Nr. 46, S. 12, 13 t den zugehörigen Noten des Herrn Stäckel.

Differentialgleichung der Brachistochronen. Diese läßt sich aus der Differentialgleichung der mechanischen Trajektorien sehr einfach durch folgendes *Lemma* herleiten:

Ist

$$y'' = F(x, y, y')$$

die Eulersche Differentialgleichung des Variationsproblems

$$\int f(x, y)\, \varphi(y')\, dx, \tag{4}$$

so ist die Eulersche Gleichung des Problems

$$\int \frac{\varphi(y')}{f(x, y)}\, dx \tag{5}$$

die Differentialgleichung

$$y'' = -F(x, y, y').$$

Führen wir nämlich die Bezeichnungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y, \quad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \quad \frac{d\varphi}{dy'} = \varphi', \quad \frac{d^2\varphi}{dy'^2} = \varphi''$$

ein, so sind die den Integralen (4) resp. (5) entsprechenden Eulerschen Gleichungen:

$$-f_y\varphi + f_x\varphi' + f_y\varphi' y' + f\varphi'' y'' = 0,$$

resp.

$$\frac{1}{f^2} f_y\varphi - \frac{1}{f^2} f_x\varphi' - \frac{1}{f^2} f_y\varphi' y' + \frac{1}{f}\, \varphi'' y'' = 0,$$

woraus die Behauptung leicht folgt.

Wir wenden dies auf die Integrale

$$\int \sqrt{U + h}\ \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

$$\int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{U + h}}\, dx$$

an. Diesen entsprechen als Extremalen die zum Potential U und zur Konstanten h der lebendigen Kraft gehörigen mechanischen Trajektorien resp. Brachistochronen. Da nun die Gleichung der mechanischen Trajektorien bekanntlich

$$y'' = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial y} - y' \frac{\partial U}{\partial x}\right)(1 + y'^2)}{2(U + h)} \tag{6}$$

ist, so ergibt sich für die Brachistochronen

$$y'' = -\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial y} - y' \frac{\partial U}{\partial x}\right)(1 + y'^2)}{2(U + h)} \tag{7}$$

als Differentialgleichung.*)

*) Der einfache Zusammenhang zwischen (6) und (7) läßt sich auch geometrisch interpretieren.

Soll nun die Brachistochrone $y = y(x)$ die Niveaulinien senkrecht durchkreuzen, so muß längs der Brachistochrone

$$\frac{\partial U}{\partial y} - y' \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

und folglich, vermöge der Gleichung (7), $y'' = 0$ sein. *Sie muß also eine gerade Linie sein.* Ist dies der Fall, so ist die Maximumseigenschaft in der Tat in jedem Zeitpunkte eines genügend kleinen Intervalles $(0, t)$ erfüllt. Wenn wir noch hinzufügen, daß in diesem Falle die Bewegung auch den Newton-Lagrangeschen Gleichungen der Mechanik Genüge leistet, so können wir zusammenfassend sagen: *Ist die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null und ist die durch die Anfangslage gehende Kraftlinie eine gerade Linie — dann und nur dann existiert eine der Ostwaldschen Maximumseigenschaft zu jeder Zeit eines Zeitintervalles* $(0, t)$ *genügende Bewegung. Die Bewegung erfolgt eben dieser Kraftlinie entlang und befriedigt die Gleichungen der Mechanik. Sind die Niveaulinien parallele Kurven, so kann die Anfangslage* A_0 *beliebig sein.*

Hiermit sind für den Fall $A_0\overrightarrow{V} = 0$ die Fragen a), b) der Einleitung beantwortet.

§ 4.

Zusammenhang mit dem Resultate des Herrn C. Neumann.

Wir behaupten, es gilt ganz strenge folgender Satz:

Beginnt eine Bewegung aus A_0 *mit der Geschwindigkeit Null, und genügt sie in einem einzigen Zeitpunkte der Ostwaldschen Maximumseigenschaft, so besitzt sie in* A_0 *dieselbe Anfangsbeschleunigung wie die in* A_0 *mit der Geschwindigkeit Null beginnende mechanische Bewegung.*

Es seien nämlich x_0, y_0 die Koordinaten von A_0 und es sei h so gewählt, daß

$$U(x_0, y_0) + h = 0.$$

Dann ist die Differentialgleichung der Bewegungen, die entlang den Brachistochronen (denn nur diese kommen infolge der Voraussetzung in Betracht) und zeitlich nach Gl. (1) stattfinden,

$$(8) \qquad \begin{aligned} x'' &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y'}{U + h} x' \\ y'' &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y'}{U + h} y'. \end{aligned}$$

Für diese Gleichungen ist das System der Anfangswerte

$$(9) \qquad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

singulär. Dies steht in Übereinstimmung damit, daß für diese Anfangswerte eine einfach *unendliche Schar* von Integralkurven existiert*), während die Differentialgleichungen der Mechanik

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ y'' &= \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \tag{10}$$

für dieselben Anfangswerte regulär sind und also *eine einzige* Bewegung liefern.

Für die Anfangswerte (9) ergibt also (8) eine Schar von A_0 ausgehender Bewegungen. *Wir behaupten nun, daß diese Bewegungen alle nicht nur mit gleicher Geschwindigkeit (diese ist eben Null), sondern auch mit gleicher Beschleunigung beginnen, und zwar mit derselben Beschleunigung, die das System* (10) *liefert.*

Denn es ist z. B.

$$x' \frac{\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y'}{U + h} = x' \frac{(U+h)'}{U+h},$$

folglich durch zweimalige Anwendung der de l'Hôpitalschen Regel

$$\lim_{t=+0} x' \frac{\frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y'}{U+h} = \lim_{t=+0} \frac{x'''(U+h)' + 2x''(U+h)'' + x'(U+h)'''}{(U+h)''}$$
$$= 2x''(0).$$

Also gibt der Grenzübergang zu $t = +0$ in (8) für jede Bewegung der betrachteten Schar

$$\begin{aligned} x''(0) &= -U_x(x_0, y_0) + 2x''(0) \\ y''(0) &= -U_y(x_0, y_0) + 2y''(0) \end{aligned}$$

und daher für $x''(0)$, $y''(0)$ denselben Wert wie das System (10). Damit ist unsere Behauptung erwiesen und der Zusammenhang mit dem Resultate des Herrn C. Neumann klargestellt.

§ 5.

Behandlung des 2. Falles.

Dieser läßt sich mit einigen Worten erledigen. Die Aufgabe 2. h[illegible] im allgemeinen ebensowenig eine Lösung wie die Aufgabe II. W[illegible] brauchen das nicht näher auszuführen. Ebenso wie die Aufgabe II. au[illegible] nahmsweise doch eine Lösung besaß, hat auch die Aufgabe 2. ausnahm[illegible]

* Vergl. z. B. das Bernoullische Beispiel der Schar der durch A_0 gehend[illegible] Zykloiden. S. 431 Note *).

weise eine Lösung; und zwar in dem Falle, wo der gegebene Vektor der Anfangsgeschwindigkeit $\overrightarrow{A_0V}$ die Brachistochrone A_0A im Punkte A_0 berührt. Hier bedeutet A denjenigen Punkt, der durch die Aufgabe 1. geliefert wird, wenn wir als Größe der Anfangsgeschwindigkeit die Länge des Vektors $\overrightarrow{A_0V}$ nehmen.

Fragen wir nun auch hier nach einer Bewegung, die in *jedem Zeitpunkte* die Ostwaldsche Maximumseigenschaft aufweist, so existiert eine solche a fortiori nicht. Der einzige Fall, wo eine solche doch existiert, ist offenbar derjenige, wo die Kraftlinie, welche durch A_0 geht, eine gerade Linie ist und die Richtung von $\overrightarrow{A_0V}$ in diese gerade Linie fällt.*)

Indem wir die allgemeine Erörterung der Frage abschließen, betrachten wir nun noch den nicht uninteressanten speziellen Fall, den wir bei der Behandlung der Aufgabe 1. vorläufig beiseite gelassen haben, den Fall nämlich, in welchem die zu A_0 gehörige Schar der Transversalen T_t mit der Schar der Niveaulinien zusammenfällt. In diesem Falle kann man im Punkte A_0 (aber nur dort) die Anfangsgeschwindigkeit (in gewissen Grenzen) beliebig vorschreiben und man bekommt eine Bewegung, die zu jeder Zeit (eines genügend kleinen Zeitintervalles) dem Ostwaldschen Prinzipe genügt. Nun fällt die Schar der T_t mit der Schar der Niveaulinien dann und nur dann zusammen, wenn die durch A_0 gehenden Brachistochronen die Niveaulinien orthogonal durchkreuzen. Daraus folgt, daß durch A_0 eine einfach unendliche Schar von geradlinigen Kraftlinien geht. Also sind die Niveaulinien konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkte A_0. Das Potential hat also die Form $U(r)$, wo

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

und die Bewegung ist daher eine Zentralbewegung mit dem Punkte A_0 als Zentrum. Man kann leicht verifizieren, daß in diesem Falle in der Tat eine jede in A_0 mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit beginnende Bewegung — wenn $U(r)$ für $r = 0$ regulär ist — nach dem Ostwaldschen Prinzip erfolgt.

---

*) Streng genommen hat hier im allgemeinen nur $|U(x, y) - U(x_0, y_0)|$ ein Maximum.

§ 6.

Die Darbouxsche Abbildung.

Schließlich wollen wir noch bemerken, daß die Ostwaldsche Aufgabe in besonders einfacher Form erscheint, wenn wir die Ebene nach Herrn Darboux*) auf eine Fläche

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \zeta = \zeta(x, y)$$

abbilden, deren Bogenelement ds'^2 durch

$$ds'^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{U(x, y) + h}$$

gegeben ist. Diese Abbildung ist konform und *den Brachistochronen der Ebene entsprechen die geodätischen Linien der Fläche.* Auf dieser Fläche entspricht der Ostwaldschen Aufgabe (z. B. der ersten) folgende Aufgabe:

Es sei auf der Fläche ein Punkt A_0' und außerdem eine Länge t gegeben. Man bestimme eine durch A_0' gehende und auf der Fläche verlaufende Linie, auf welcher die Länge t, vom Punkte A_0' abgetragen, zu einem Endpunkte A' führt, in welchem die Funktion $U(x, y)$ den größtmöglichen Wert erreicht.

Bei dieser Formulierung der Ostwaldschen Aufgabe tritt ihre Verwandtschaft mit Aufgabe I. noch schärfer hervor.

*) Vergl. S. 431 Note *).

Kriterien für die physikalische Bedeutung der unstetigen Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen.

Von

G. Zemplén in Budapest.*)

Riemann**) hat gezeigt, wie bei der eindimensionalen Bewegung von Gasen endliche Sprünge der Dichte und Geschwindigkeit entstehen können, und untersuchte die Bewegung, welche vor sich geht, wenn der so entstandene Sprung sich im Gase fortpflanzt. Christoffel***) hat einige Resultate Riemanns auf dreidimensionale Bewegungen übertragen.

Hugoniot†) hat solche Fälle untersucht, in welchen nicht die Geschwindigkeit sondern die Beschleunigung unstetig wird, und Hadamard††) hat gezeigt, wie solche Unstetigkeiten der Beschleunigung oder einer höheren Ableitung der Geschwindigkeit ganz allgemein auftreten, wenn man die Anfangsverteilung der Geschwindigkeit und der Dichte, sowie die Bewegung der Gefäßwände willkürlich vorschreibt.†††)

In allen Punkten, wo die Geschwindigkeit oder eine ihrer Ableitungen nach der Zeit unstetig wird, sind entweder die hydrodynamischen Gleichungen selbst oder gewisse, aus denselben durch Differentiation nach der Zeit gewonnene Gleichungen nicht erfüllt. Es fragt sich daher, weshalb können diese — an gewissen Stellen mit Unstetigkeiten behaf-

*) Nach einem Vortrage des Verfassers, gehalten im mathematischen Seminar der Herren Proff. Hilbert und Minkowski im Wintersemester 1904—05 zu Göttingen.

**) B. Riemann, Über Luftwellen endlicher Amplitude, Gött. Nachr. 1860; Werke p. 151.

***) E. B. Christoffel, Ann. di Mat. (2), 8 p. 81 und 191.

†) A. Hugoniot, J. de l'Éc. Polyt. 1885, J. de Math. 1887, und C. R. 1885.

††) J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes, Paris 1903, p. 142.

†††) Die ausführliche Literatur der Entstehung und Fortpflanzung der Unstetigkeiten in Flüssigkeiten befindet sich in einem nächstens erscheinenden Referat des Verfassers in der Encykl. der math. Wiss. IV, 19. Hier sei nur auf die zitierte Monographie Hadamards besonders hingewiesen, welche auch viele neue Resultate enthält.

teten — Geschwindigkeits- oder Beschleunigungskomponenten als Lösung des behandelten physikalischen Problems betrachtet werden, denn es können ja unendlich viele Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen so bestimmt werden, daß die hydrodynamischen Gleichungen *nicht überall* erfüllt sein sollen.

Die Bewegungsgleichungen allein reichen daher zur Beschreibung der physikalischen Erscheinung nicht aus und wir müssen entweder besondere Hypothesen für die Unstetigkeitsstellen postulieren, oder aber — was allerdings viel wünschenswerter erscheint — solche allgemeine Hypothesen aufstellen, aus welchen für die stetigen Stellen die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen und für die unstetigen Stellen andere Bedingungen folgen.

Riemann und Christoffel haben den ersten Weg eingeschlagen und für *Stoßwellen* (sich fortpflanzende Unstetigkeitsflächen, auf welchen die Geschwindigkeit und die Dichte endliche Sprünge erleiden) die Gleichungen des mechanischen Impulses postuliert.

Prof. Hilbert forderte mich auf den zweiten Weg einzuschlagen, nämlich zu einem Prinzipe der Mechanik zurückzugreifen: es ist zu erwarten, daß für den Fall einer sich fortpflanzenden Unstetigkeitsfläche aus einem geeignet formulierten mechanischen Prinzip für die stetigen Stellen die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen und für die Unstetigkeitsstellen als sogenannte *dynamische Kompatibilitätsbedingungen* sich die Impulsgleichungen ergeben werden.

P. Duhem hat bereits wiederholt versucht, die Unstetigkeiten auf Grund des D'Alembertschen Prinzips zu behandeln. In seiner ersten Behandlung des Problems*) ist jedoch sein Verfahren, nach welchem er die Kontinuitätsgleichung variiert, nicht zu rechtfertigen und darum kann uns diese Behandlung des Problems nicht befriedigen; diese Rechnungen führen ihn übrigens auch nicht zu den Impulsgleichungen. In der neueren Behandlung**) geht er von einer besonderen Form des D'Alembertschen Prinzips aus, in welcher für den Fall, daß Unstetigkeiten in der Geschwindigkeit auftreten, an Stelle der Beschleunigungskomponenten die — allerdings unendlichen — Größen:

$$\frac{u_2 - u_1}{dt}, \quad \frac{v_2 - v_1}{dt}, \quad \frac{w_2 - w_1}{dt}$$

einzusetzen sind, wo die Zähler die während des Zeitelementes dt eingetretenen plötzlichen Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten u, v, w bedeuten. Es ergeben sich nunmehr aus dieser Hypothese allerdings

*) Cours de math. physique, Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique, Paris 1891, p. 60—98.

**) Recherches sur l'Hydrodynamique, I. série, Paris, 1903, p. 75.

die Impulsgleichungen, es war jedoch wegen der Anwesenheit der Unstetigkeiten eine besondere Formulierung des D'Alembertschen Prinzips notwendig, so daß diese Behandlung wesentlich der — jedenfalls einfacheren — direkten Postulierung der Impulsgleichungen äquivalent erscheint.

Im folgenden werde ich zeigen, wie aus dem Hamiltonschen Prinzipe der stationären Wirkung, ohne andere Annahmen als die des Auftretens einer Welle, die Bewegungsgleichungen mit den dynamischen Kompatibilitätsbedingungen folgen.

Ich behandle der Durchsichtigkeit halber nur den Fall der eindimensionalen Bewegung ausführlich, und begnüge mich für den allgemeinen Fall mit Skizzierung des Verfahrens und Mitteilung der Resultate.

* * *

Das Gas*) bewege sich in einer zylindrischen Röhre parallel zur Röhrenachse, so daß in einer und derselben, zur Röhrenachse senkrechten Ebene der Bewegungszustand aller Massenelemente derselbe ist. Wir wählen die Röhrenachse als Abszissenachse und bezeichnen mit x die Abszisse eines durch irgend einen Parameter a charakterisierten**) Massenpunktes im Gase zur Zeit t. Die Röhre ist mit zwei beweglichen Kolben versehen, welche mit den Querschnitten $a = 0$ und $a = 1$ in Berührung sind.

Gegeben ist die Anfangsverteilung der Dichte und Geschwindigkeit und die Bewegung der Zylinderkolben; es sind daher die Funktionen

$$x_0(a), \quad u_0(a), \quad \varrho_0(a), \quad f_0(t), \quad f_1(t)$$

gegeben, welche folgende Bedeutung haben:

$$(x)_{t=0} = x_0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{t=0} = (u)_{t=0} = u_0, \quad (\varrho)_{t=0} = \frac{\varrho_0}{\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_{t=0}} = \frac{\varrho_0}{\frac{dx_0}{da}} \text{***}),$$

$$(x)_{a=0} = f_0(t), \quad (x)_{a=1} = f_1(t).$$

Die Bewegung wird bekannt sein, wenn x als Funktion von a und t dargestellt wird.

---

*) Unter „Gas" ist in dem folgenden (der Kürze halber) „kompressible Flüssigkeit" zu verstehen.

**) a kann z. B. den Wert von x zur Zeit $t = 0$ bedeuten: es empfiehlt sich jedoch die Bedeutung von a unbestimmt zu lassen, denn im Falle, daß Unstetigkeiten auftreten, kann a nur auf einer Seite der Unstetigkeitsfläche den Anfangswert von x bedeuten.

***) Es ist zu bemerken, daß $\varrho_0(a)$ nur im Falle, daß a den Anfangswert von x bedeutet, dem Anfangswerte der Dichte ϱ gleich ist, aus der Definition der Dichte

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\frac{\partial x}{\partial a}}$$

folgt nämlich nur für $x_0 = a$ die Gleichung $\varrho = \varrho_0$.

Wir *nehmen an*, es entstehe aus diesem Anfangszustand und aus diesen Randbedingungen eine Bewegung, in welcher sich eine Unstetigkeit fortpflanzt: x sei nämlich eine, im allgemeinen mit allen ihren Ableitungen nach a und t stetige Funktion dieser Argumente, es existiere jedoch in jedem Augenblicke t ein gewisser Wert von a, bei welchem $\frac{\partial x}{\partial t} = u$ und $\frac{\partial x}{\partial a} = \omega$ je einen endlichen Sprung erleiden; dieser Unstetigkeitsquerschnitt pflanze sich mit stetiger Geschwindigkeit von Teilchen zu Teilchen fort, so daß, wenn die mit der Unstetigkeit behafteten Querschnitte durch die Gleichung

$$\psi(a, t) = 0 \tag{1}$$

bestimmt sind, die *„Fortpflanzungsgeschwindigkeit"*

$$\Theta = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial \psi}{\partial a}} = \frac{da}{dt} \tag{2}$$

eine stetige Funktion von t ist.

Eine Unstetigkeit in $\frac{\partial x}{\partial t}$ und $\frac{\partial x}{\partial a}$ bedeutet, wegen

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\frac{\partial x}{\partial a}}, \tag{3}$$

eine Unstetigkeit in der Geschwindigkeit und in der Dichte.

Wir benützen eine geometrische Darstellung im rechtwinkeligen Koordinatensystem atx (s. die Figur pg. 443): (1) ist die Gleichung einer Kurve Γ in der at-Ebene, welche dieselbe in zwei Gebiete 1 und 2 teilt. Den Grenzwert einer Funktion $\Phi(a, t)$ auf der Unstetigkeitslinie Γ auf der Seite des Gebietes 1 bezeichnen wir mit Φ_1, auf der Seite des Gebietes 2 in demselben Punkte mit Φ_2 und benützen die Bezeichnung

$$[\Phi] = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Ist daher Φ auf der Kurve Γ mit Unstetigkeit behaftet, so ist in jedem Punkte derselben $[\Phi]$ von 0 verschieden.

Wir fragen nach den Gleichungen, welche diese unstetige Bewegung beherrschen, wenn wir annehmen, daß dieselbe sich entsprechend dem Hamiltonschen Prinzipe der stationären Wirkung abspielt.

Es sei $\int \varrho U(x)\, dx$, wo die Integration über das ganze Gas zu erstrecken ist, die gesamte potentielle Energie der auf das Gas wirkenden äußeren Kräfte zur Zeit t, $\int \varrho W\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) dx$ die gesamte potentielle Energie der inneren Kräfte. U ist eine gegebene Funktion der Größe x allein;

W, die der Masseneinheit zukommende innere Energiemenge, ist im allgemeinen vom Deformationszustand und vom zeitlichen Verlaufe der Deformation abhängig. Wir setzen voraus, das Gas sei vollkommen elastisch, dann wird W eine durch die physikalischen Eigenschaften des Gases bestimmte Funktion der Dilatation ω allein sein.

Das Hamiltonsche Integral ist das Zeitintegral über die Differenz der kinetischen und potentiellen Energie des Systems:

$$J = \int_0^1 dt \int \varrho \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - U - W \right\} dx,$$

was auf Grund von (3) als ein Doppelintegral nach a und t dargestellt werden kann:

$$J = \int_0^1 dt \int_0^1 \varrho_0 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - U(x) - W\left(\frac{\partial x}{\partial a} \right) \right\} da. \tag{4}$$

Das Hamiltonsche Prinzip der stationären Wirkung kann so formuliert werden: bei der tatsächlichen Bewegung ist die bei festen Grenzen gebildete erste Variation von J gleich Null; x ist also derart zu bestimmen, daß, wenn man in J $x + \mu\xi(a, t)$ an Stelle von x setzt, die Gleichung

$$\left(\frac{dJ}{d\mu} \right)_{\mu = 0} = 0 \tag{5}$$

für alle Werte von ξ erfüllt sei; hierbei bedeutet $\xi(a, t)$ eine überall mit allen ihren Ableitungen stetige Funktion ihrer Argumente, welche die Bedingungen

$$\xi(a, 0) = \xi(a, 1) = \xi(0, t) = \xi(1, t) = 0 \tag{6}$$

befriedigen muß, übrigens ganz willkürlich ist, während mit μ eine beliebig kleine, von a, t unabhängige Größe bezeichnet wird.

Wir zerlegen J in zwei additive Teile J_1 und J_2, genommen über die entsprechenden Gebiete 1 und 2, innerhalb welcher x mit allen Ableitungen stetig ist:

$$\left(\frac{dJ}{d\mu} \right)_{\mu = 0} = \left(\frac{dJ_1}{d\mu} \right)_{\mu = 0} + \left(\frac{dJ_2}{d\mu} \right)_{\mu = 0}, \tag{7}$$

$$\left(\frac{dJ_1}{d\mu} \right)_{\mu = 0} = \int_{(1)} \int \varrho_0 \left\{ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x} \xi - \frac{dW}{d\omega} \frac{\partial \xi}{\partial a} \right\} da\, dt. \tag{8}$$

Mit Rücksicht auf die Stetigkeit von x, ξ und ihrer Ableitungen innerhalb des Gebietes 1 kann dieses Flächenintegral mit Hilfe der gewöhnlichen Verfahren (des Stokesschen Satzes) in die Summe eines Randintegrals und eines Flächenintegrals zerlegt werden; man erhält mit Rücksicht auf (5):

$$(9)\qquad \left(\frac{dJ_1}{d\mu}\right)_{\mu=0} = \int_0^1 \left\{\varrho_0\left(\frac{\partial x}{\partial t}\Theta + \frac{dW}{d\omega}\right)\xi\right\}_1 dt$$
$$-\int\int_{(1)} \left\{\varrho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \varrho_0 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\varrho_0 \frac{dW}{d\omega}\right)\right\}\xi\, da\, dt$$

und ebenso wird:

$$(10)\qquad \left(\frac{dJ_2}{d\mu}\right)_{\mu=0} = -\int_0^1 \left\{\varrho_0\left(\frac{\partial x}{\partial t}\Theta + \frac{dW}{d\omega}\right)\xi\right\}_2 dt$$
$$-\int\int_{(2)} \left\{\varrho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \varrho_0 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\varrho_0 \frac{dW}{d\omega}\right)\right\}\xi\, da\, dt.$$

Soll daher (5) bei beliebigen Funktionen ξ erfüllt sein, so muß im Gebiete 1 und im Gebiete 2 die Gleichung:

$$(11)\qquad \varrho_0\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\varrho_0 \frac{dW}{d\omega}\right) = 0$$

bestehen und auf der Unstetigkeitslinie die Gleichung:

$$(12)\qquad \left[\varrho_0 \frac{\partial x}{\partial t}\right]\Theta + \left[\varrho_0 \frac{dW}{d\omega}\right] = 0.$$

Setzt man $-\varrho_0 \frac{dW}{d\omega}$ gleich dem Drucke p, dann geht (11) in die gewöhnliche hydrodynamische Bewegungsgleichung

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial a} = 0$$

über und aus (12) erhält man, wenn man beiderseits mit dt multipliziert, wegen

$$\Theta \varrho_0 dt = \varrho_0 da = \varrho dx$$

die Gleichung des Impulses für die während der Zeit dt durch die Flächeneinheit des Unstetigkeitsquerschnittes tretende Masse:

$$(14)\qquad p_2 dt - p_1 dt = (\varrho\, dx\, u)_2 - (\varrho\, dx\, u)_1 = \varrho dx (u_2 - u_1).$$

(13) ist die Bewegungsgleichung für die stetigen Stellen und (14) die gesuchte dynamische Kompatibilitätsbedingung für die Stoßwellenfläche.

Haben wir es nicht mit einer Stoßwelle, sondern einer solchen sich fortpflanzenden Unstetigkeitsfläche zu tun, auf welcher die Beschleunigung oder eine Ableitung derselben unstetig wird (Welle höherer als erster Ordnung), dann ist (14) identisch erfüllt und die Bedingung (5) geht einfach in die folgende über:

$$\int\int_{(1)} \left\{\varrho_0\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\varrho_0 \frac{dW}{d\omega}\right)\right\}\xi\, da\, dt$$
$$+\int\int_{(2)} \left\{\varrho_0\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\varrho_0 \frac{dW}{d\omega}\right)\right\}\xi\, da\, dt = 0,$$

raus einfach die hydrodynamische Gleichung rechts und links der stetigkeitslinie Γ folgt, und *keine* dynamische Bedingung für die Unstigkeitslinie selbst.

* * *

Die Kompatibilitätsbedingung (12) läßt sich auch ableiten nach der thode des Unabhängigkeitssatzes, mit der Herr Hilbert die Variationsbleme behandelt.*)

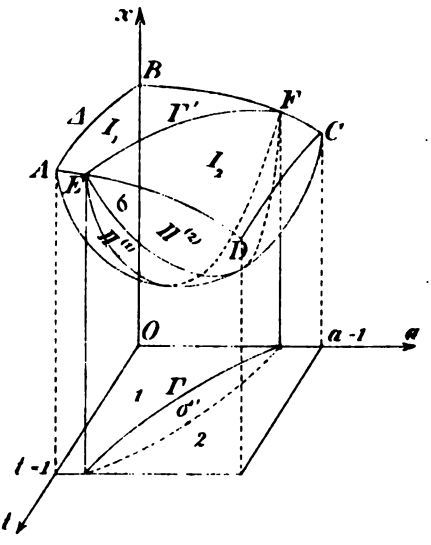
Anstatt eine Fläche x im atx-Raume zu suchen, auf welcher das egral

$$I = \int_0^1 \int_0^1 F\left(x, \frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial t}\right) da\, dt$$

e verschwindende erste Variation besitzt, werden wir die Forderung stellen, ein $[p(a,t,x), q(a,t,x)]$-Feld**) so zu bestimmen, daß das egral:

5) $$J = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ F(x,p,q) + \frac{\partial F(x,p,q)}{\partial p}\left(p - \frac{\partial x}{\partial a}\right) + \frac{\partial F(x,p,q)}{\partial q}\left(q - \frac{\partial x}{\partial t}\right)\right\} da\, dt$$

n der Fläche $x(a,t)$ unabhängig sei, die durch die feste Randkurve Δ $ABCD$, welche x für die Ränder des Integrationsgebietes vorschreibt) legt werden kann; $\frac{\partial x}{\partial a} = p$, $\frac{\partial x}{\partial t} = q$ rden dann die gesuchte „stationäre" iche bestimmen.



Wir nehmen an, p und q seien ser Forderung entsprechend bemmt, so folgt, daß p und q endhe Sprünge erleiden, wenn a und t f der durch die Gleichung (1) rgestellten Kurve Γ liegen (sollen mlich auf der Kurve Γ $\frac{\partial x}{\partial a}$ und $\frac{\partial x}{\partial t}$ stetig werden, so muß dasselbe : das pq-Feld gelten).

I sei die stationäre Fläche: r legen durch die Kurve Γ einen linder, dessen Erzeugende vertikal id und welcher die Fläche I in

*) Hilbert, Mathematische Probleme, Archiv für Math. und Phys. (3) 1, pports du Congrès International des Mathématiciens, Paris 1900; Encykl. der math. iss. II1, 8a.

**) Die hier vorübergehend benützte Größe p ist nicht mit dem Drucke p zu wechseln.

der Kurve Γ' schneidet; Γ' zerteilt I in zwei Stücke I_1 und I_2; II sei eine beliebige von I verschiedene Vergleichsfläche, die ebenfalls durch die Randkurve Δ geht. Durch Γ' legen wir eine beliebige Fläche σ, welche II in die Teile $II^{(1)}$ und $II^{(2)}$ teilt. Wegen der Unabhängigkeit des Integrals J von der Integrationsfläche erhält man:

$$J_{I_1} + J_{I_2} = J_{II^{(1)}} + J_{II^{(2)}}. \tag{16}$$

J ist ebenso von der durch die Randkurven $AEFB$ und $EDCF$ gelegten Integrationsfläche unabhängig; also ist mit einer leicht zu interpretierenden Bezeichnung:

$$\begin{cases} J_{I_1} = J_{II^{(1)}} + \{J_\sigma\}^{(1)} \\ J_{I_2} = J_{II^{(2)}} + \{J_\sigma\}^{(2)}, \end{cases} \tag{17}$$

also:

$$\{J_\sigma\}^{(1)} + \{J_\sigma\}^{(2)} = 0$$

oder

$$\int\int_{\sigma'} \Big(\Big\{ F + \frac{\partial F}{\partial p}\Big(p - \frac{\partial x}{\partial a}\Big) + \frac{\partial F}{\partial q}\Big(q - \frac{\partial x}{\partial t}\Big) \Big\}_{(1)} - \Big\{ F + \frac{\partial F}{\partial p}\Big(p - \frac{\partial x}{\partial a}\Big) + \frac{\partial F}{\partial q}\Big(q - \frac{\partial x}{\partial t}\Big) \Big\}_{(2)} \Big) da\,dt = 0. \tag{18}$$

σ' bedeutet das Integrationsgebiet, welches sich durch Projektion des Flächenstückes σ auf die at-Ebene ergibt.

II ist eine beliebige Fläche, ebenso die Fläche σ; es muß daher der Integrand in (18) für alle *endlichen* Werte von $\frac{\partial x}{\partial a}$ und $\frac{\partial x}{\partial t}$ verschwinden; es ist also in beliebiger Nähe der Kurve Γ' mit Ausnahme des Zylinders $\Gamma\Gamma'$:

$$\Big\{ F + \frac{\partial F}{\partial p}\Big(p - \frac{\partial x}{\partial a}\Big) + \frac{\partial F}{\partial q}\Big(q - \frac{\partial x}{\partial t}\Big) \Big\}_{(1)} = \Big\{ F + \frac{\partial F}{\partial p}\Big(p - \frac{\partial x}{\partial a}\Big) + \frac{\partial F}{\partial q}\Big(q - \frac{\partial x}{\partial t}\Big) \Big\}_{(2)} \tag{19}$$

also:

$$\begin{cases} \Big\{ F + p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} \Big\}^{(1)} = \Big\{ F + p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} \Big\}^{(2)} \\ \Big(\frac{\partial F}{\partial p}\Big)^{(1)} = \Big(\frac{\partial F}{\partial p}\Big)^{(2)} \\ \Big(\frac{\partial F}{\partial q}\Big)^{(1)} = \Big(\frac{\partial F}{\partial q}\Big)^{(2)}. \end{cases} \tag{20}$$

Das bedeutet, daß die Größen $F + p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}$, $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{\partial q}$ rechts und links vom Zylinder $\Gamma\Gamma'$ stetig sind.

Um die Kompatibilitätsbedingungen zu erhalten, müssen wir den Zylinder $\Gamma\Gamma'$ selbst untersuchen; zu diesem Zwecke dividieren wir (19) durch $\frac{\partial x}{\partial a}$ und gehen zur Grenze über, so daß $\frac{\partial x}{\partial a} = \infty$, $\frac{\partial x}{\partial t} = \infty$ wird; berücksichtigen wir, daß auf der Kurve Γ'

$$-\frac{\frac{\partial x}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial a}} = \frac{da}{dt} = \Theta,$$

und daß andererseits daselbst die Größen p, q, F, $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{\partial q}$ endlich bleiben, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_1 - \Theta\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_2 - \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_1\right\} = 0.$$

In unserem Falle ist:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -\varrho_0 \frac{dW}{d\omega}, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = \varrho_0 \frac{\partial x}{\partial t}$$

wegen

$$p = \frac{\partial x}{\partial a}, \quad q = \frac{\partial x}{\partial t},$$

und man erhält also auf diesem Wege ebenfalls die Gleichung (12).

* * *

Diese Resultate lassen sich auf den allgemeinen Fall der dreidimensionalen Bewegung eines elastischen Körpers übertragen.

Es seien x, y, z die Koordinaten eines durch die Parameter a, b, c charakterisierten Massenpunktes zur Zeit t. Der Anfangszustand (x, y, z, $\frac{\partial x}{\partial t} = u$, $\frac{\partial y}{\partial t} = v$, $\frac{\partial z}{\partial t} = w$ und die Dichte ϱ zur Zeit $t = 0$ als Funktionen von a, b, c) ist gegeben; dann ist die Bewegung vollständig beschrieben, wenn man x, y, z als Funktionen von a, b, c, t darstellt: die Dichte ϱ ist nämlich durch die Gleichung

$$\text{(21)} \qquad \frac{\varrho_0}{\varrho}^{*}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \omega$$

definiert.

Es sei außer dem Anfangszustande auch die Fläche vorgeschrieben, welche zu jeder Zeit t die Oberfläche des Körpers bilden muß; wir nehmen an, daß die Teilchen, welche zur Zeit $t = 0$ auf der Oberfläche sich befanden, auch im weiteren Verlaufe der Bewegung auf der Oberfläche bleiben: ist die Bewegung der Oberfläche vorgeschrieben, dann muß für

$$\Phi(a, b, c) = 0$$

$$\text{(22)} \qquad F(x, y, z, t) = 0$$

bestehen.

---

*) ϱ_0 bedeutet wieder *nicht* immer den Wert von ϱ zur Zeit $t = 0$.

Wir nehmen wieder an, es entstehe aus den gegebenen Anfangs- und Oberflächenbedingungen eine Bewegung, in welcher die Ableitungen von x, y, z auf einer sich mit der Zeit stetig verändernden Fläche endliche Sprünge erleiden, während sonst überall x, y, z mit allen Ableitungen stetig sind. Die Gleichung der Unstetigkeitsfläche sei

$$\psi(a, b, c, t) = 0 \tag{23}$$

und die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ Θ der Unstetigkeit:

$$\Theta = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial c}\right)^2}} \tag{24}$$

sei eine stetige Funktion von t und z. B. a und b.

Das Hamiltonsche Integral hat die Form:

$$I = \int_0^1 dt \iiint \varrho \left\{ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right) - U - W \right\} dx\,dy\,dz \tag{25}$$

U, eine gegebene Funktion von x, y, z, ist die der Volumeneinheit zukommende potentielle Energie der äußeren Kräfte zur Zeit t, W ist die „innere Energiedichte“; sehen wir von der Zähigkeit des Mediums ab, so wird W wieder nur vom augenblicklichen Deformationszustande abhängig sein; bezeichnen wir zur Abkürzung partielle Differentialquotienten durch untere Indizes, so wird W in erster Annäherung eine Funktion der neun Größen:

$$x_a,\ x_b,\ x_c,\quad y_a,\ y_b,\ y_c,\quad z_a,\ z_b,\ z_c$$

sein. Im Falle einer kompressiblen Flüssigkeit wird W eine Funktion von ω allein sein. Die Integration in (25) ist auf das ganze Gas zu erstrecken. Auf Grund von (21) kann I als ein vierfaches Integral nach a, b, c, t dargestellt werden:

$$I = \int_0^1 dt \iiint_{\Phi(a,b,c) \leqq 0} \varrho_0 \left\{ \frac{1}{2}(x_t^2 + y_t^2 + z_t^2) - U - W \right\} da\,db\,dc. \tag{26}$$

Nach dem Hamiltonschen Prinzip muß bei der tatsächlichen Bewegung die erste Variation dieses Integrals verschwinden, wenn man x, y, z so variiert, daß ihre Werte für $t = 0$ und $t = 1$ unverändert bleiben und für $\Phi(a, b, c) = 0$ die Gleichung (22) erfüllt bleibe.

Wir nehmen an, x, y, z, welche die tatsächliche Bewegung darstellen, seien die den Anfangs- und Randbedingungen entsprechenden, auf der Fläche (23) in ihren Ableitungen unstetigen Funktionen.

Wir bilden das Integral:

$$I^* = I - \int\int_{\Phi(a,\,b,\,c)\,=\,0} \lambda(a, b, c, t)\, F(x, y, z, t)\, df, \tag{27}$$

wo λ eine willkürliche Funktion seiner Argumente, df ein Flächenelement der Fläche $\Phi = 0$ bedeutet.

Setzt man in I^* an Stelle von x, y, z die Funktionen

$$x + \mu\xi(a, b, c, t), \quad y + \mu\eta(a, b, c, t), \quad z + \mu\zeta(a, b, c, t),$$

wo ξ, η, ζ mit allen Ableitungen stetige Funktionen ihrer Argumente bedeuten, welche die Bedingungen:

$$\xi(a, b, c, 0) = \xi(a, b, c, 1) = \eta(a, b, c, 0) = \eta(a, b, c, 1) = \zeta(a, b, c, 0) = \zeta(a, b, c, 1)$$

und für $\Phi = 0$:

$$F(x + \mu\xi,\ y + \mu\eta,\ z + \mu\zeta,\ t) = 0$$

befriedigen, so muß $\left(\frac{dI^*}{d\mu}\right)_{\mu=0}$ bei allen diesen Werten von ξ, η, ζ verschwinden, wenn μ einen von a, b, c, t unabhängigen Parameter bedeutet.

$\frac{dI^*}{d\mu}$ kann entsprechend den Gebieten 1 und 2, in welche die vierdimensionale Fläche (23) das ganze Integrationsgebiet teilt, in zwei additive Teile zerlegt werden, welche mit Rücksicht auf die Stetigkeit von x, y, z und ihrer Ableitungen innerhalb der Gebiete 1 und 2 nach dem Greenschen Satze behandelt werden können. Man erhält so für das Innere der Gebiete 1 und 2 die Gleichungen:

$$\begin{cases} \varrho_0\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + U_x\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\varrho_0 W_{x_a}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\varrho_0 W_{x_b}\right) - \frac{\partial}{\partial c}\left(\varrho_0 W_{x_c}\right) = 0 \\ \varrho_0\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + U_y\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\varrho_0 W_{y_a}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\varrho_0 W_{y_b}\right) - \frac{\partial}{\partial c}\left(\varrho_0 W_{y_c}\right) = 0 \\ \varrho_0\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + U_z\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\varrho_0 W_{z_a}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\varrho_0 W_{z_b}\right) - \frac{\partial}{\partial c}\left(\varrho_0 W_{z_c}\right) = 0; \end{cases} \tag{28}$$

für die Oberfläche $\Phi(a, b, c) = 0$ des Körpers, wenn α', β', γ' die Richtungskosinus der Normalen der Oberfläche im Punkte x, y, z bedeuten:

$$\begin{cases} \left(\varrho_0 W_{x_a}\right)\alpha' + \left(\varrho_0 W_{x_b}\right)\beta' + \left(\varrho_0 W_{x_c}\right)\gamma' = \lambda\alpha', \\ \left(\varrho_0 W_{y_a}\right)\alpha' + \left(\varrho_0 W_{y_b}\right)\beta' + \left(\varrho_0 W_{y_c}\right)\gamma' = \lambda\beta', \\ \left(\varrho_0 W_{z_a}\right)\alpha' + \left(\varrho_0 W_{z_b}\right)\beta' + \left(\varrho_0 W_{z_c}\right)\gamma' = \lambda\gamma'; \end{cases} \tag{29}$$

endlich für die Unstetigkeitsfläche $\psi = 0$, wenn α, β, γ die Richtungskosinus ihrer Normalen im Punkte a, b, c bedeuten:

$$(30)\quad \begin{cases} \Theta\varrho_0\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right] + \alpha\left[\varrho_0 W_{x_a}\right] + \beta\left[\varrho_0 W_{x_b}\right] + \gamma\left[\varrho_0 W_{x_c}\right] = 0 \\ \Theta\varrho_0\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right] + \alpha\left[\varrho_0 W_{y_a}\right] + \beta\left[\varrho_0 W_{y_b}\right] + \gamma\left[\varrho_0 W_{y_c}\right] = 0 \\ \Theta\varrho_0\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right] + \alpha\left[\varrho_0 W_{z_a}\right] + \beta\left[\varrho_0 W_{z_b}\right] + \gamma\left[\varrho_0 W_{z_c}\right] = 0. \end{cases}$$

Führt man die Spannungskomponenten

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\quad Y_z = Z_y,\quad Z_x = X_z,\quad X_y = Y_x$$

auf Grund der Beziehungen:

$$(31)\quad \begin{cases} X_x = -\varrho_0 W_{x_a},\ X_y = -\varrho_0 W_{x_b} = -\varrho_0 W_{y_a},\ X_z = -\varrho_0 W_{x_c} = -\varrho_0 W_{z_a} \\ Y_y = -\varrho_0 W_{y_b},\quad Y_z = -\varrho_0 W_{y_c} = -\varrho_0 W_{z_b} \\ Z_z = -\varrho_0 W_{z_c}\ ^*) \end{cases}$$

ein, dann gehen die Gleichungen (28) in die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen der elastischen Medien über; (29) spricht aus, daß bei vorgeschriebener Form der Oberfläche der resultierende Druck immer senkrecht zu derselben ist (λ ist der Betrag desselben), endlich gehen die Gleichungen (30) in die Impulsgleichungen für die drei Achsen x, y, z über, wenn man wieder beiderseits mit dt multipliziert.

Im Falle der Hydrodynamik ist W eine Funktion der Dilatation ω allein; wählt man den *augenblicklichen* Zustand des Gebietes 1 als Anfangszustand (setzt x, y, z zur Zeit t gleich resp. mit a, b, c), und setzt

$$-\varrho_0 \frac{dW}{d\omega} = p,$$

dann gehen die Gleichungen (28) in die Bewegungsgleichungen in Eulerscher Form für das Gebiet 1 über, (29) ist identisch erfüllt und aus (30) erhält man die Impulsgleichungen durch folgende Überlegung: Erleiden die ersten Ableitungen der Funktion $x(a, b, c, t)$ auf einer stetig-differenzierbaren Fläche endliche Sprünge, dann sind die Sprünge dieser Ableitungen mit den Richtungskosinus α, β, γ dieser Fläche und mit $-\Theta$ proportional:**)

$$(31)\quad \begin{aligned} &[x_a] = \Lambda\alpha,\quad [x_b] = \Lambda\beta,\quad [x_c] = \Lambda\gamma,\quad [x_t] = -\Lambda\Theta, \\ &[y_a] = \mathsf{M}\alpha,\quad [y_b] = \mathsf{M}\beta,\quad [y_c] = \mathsf{M}\gamma,\quad [y_t] = -\mathsf{M}\Theta, \\ &[z_a] = \mathsf{N}\alpha,\quad [z_b] = \mathsf{N}\beta,\quad [z_c] = \mathsf{N}\gamma,\quad [z_t] = -\mathsf{N}\Theta. \end{aligned}$$

---

*) W ist eine Funktion von $x_a, y_b, z_c, x_b + y_a, x_c + z_a, y_c + z_b$.

**) Hadamard, Leçons p. 81 und ff., 97 und ff. (Conditions identiques et conditions de compatibilité cinématique.)

Mit Rücksicht darauf, daß der augenblickliche Zustand des Gebietes 1 als Anfangszustand gewählt wurde, kann leicht bewiesen werden, daß:

$$\left[\frac{dW}{d\omega}\right]\alpha = \left[W_{x_a}\right]\alpha + \left[W_{x_b}\right]\beta + \left[W_{x_c}\right]\gamma$$

etc.

so daß die Bedingungen (30) in folgende übergehen:

$$\begin{aligned} \Theta_1\varrho_1[u] &= [p]\alpha,^{*}) \\ \Theta_1\varrho_1[v] &= [p]\beta, \\ \Theta_1\varrho_1[w] &= [p]\gamma, \end{aligned} \tag{32}$$

also in die *Impulsgleichungen* für die dreidimensionale Bewegung.

Vertauscht man die Rolle der Gebiete 1 und 2, so erhält man aus (28) die Eulerschen Gleichungen für das Gebiet 2 und in (32) wird $\Theta_1\varrho_1$ durch $\Theta_2\varrho_2$ ersetzt; aus der Kontinuitätsgleichung folgt aber mit Rücksicht auf die Gleichungen (31)

$$\varrho_1\Theta_1 = \varrho_2\Theta_2$$

so daß man wieder dasselbe System (32) erhält.

Ist nicht nur die Form der Oberfläche, sondern — wie es bei der Behandlung der Schwingungen elastischer fester Körper gewöhnlich geschieht — die Bewegung jedes oberflächlichen Massenpunktes vorgeschrieben, dann ist das Problem noch einfacher: I wird ein Integral, welches mit überall festen Grenzen zu variieren ist (ξ, η, ζ sind bei beliebigen Werten von t für $\Phi(a, b, c) = 0$ auch Null), und die Bedingungen (29) fallen einfach weg. Die Resultate für das Innere des Körpers und für die Unstetigkeitsfläche bleiben unverändert.

Ist die Unstetigkeit höherer als erster Ordnung in x, y, z (sind die ersten Ableitungen von x, y, z stetig), so ist die Impulsgleichung immer identisch erfüllt und das Hamiltonsche Prinzip fordert die Erfüllung der Bewegungsgleichungen nur rechts und links von der Unstetigkeitsfläche, auf der Fläche selbst jedoch nicht.

Paris, April 1905.

*) Θ_1 bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei der vorliegenden speziellen Wahl des Anfangszustandes.

Wird die erste Variation des Integrals

$$\int\int F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right) dx\, dy$$

nach der Du Bois-Reymondschen Manier umgeformt, und werden die Variationen ζ in Betracht gezogen, die nur innerhalb eines Rechtecks R mit den Seiten

$$x = a, \quad x = \alpha, \quad y = b, \quad y = \beta$$

von Null verschieden sind, so stellt sich eine Gleichung heraus, von der Form:

$$\int_b^\beta \int_a^\alpha P(x, y) \frac{\partial^{2m} \zeta}{\partial x^m \partial y^m} dx\, dy = 0. \tag{1}$$

Diese Bedingungsgleichung für die Funktion P soll für alle erlaubten Variationen Geltung haben, d. h. für alle Funktionen ζ, welche folgende Eigenschaften besitzen:

Im Rechtecke R einschließlich der Seiten existieren

$$\zeta, \frac{\partial^{i+k} \zeta}{\partial x^i \partial y^k}, \qquad (i, k = 0, 1, \cdots, m)$$

und sind daselbst stetige Funktionen.

Für $x = a$ sowie für $x = \alpha$ verschwinden

$$\zeta, \frac{\partial^k \zeta}{\partial x^k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, m-1)$$

identisch für alle Werte von y; für $y = b$ und für $y = \beta$ verschwinden

$$\zeta, \frac{\partial^k \zeta}{\partial y^k} \qquad (k = 1, 2, \cdots, m-1)$$

identisch für alle Werte von x.

Es gilt dann folgender Satz:

Ist $P(x, y)$ eine im Rechtecke R einschließlich der Seiten stetige Funktion, und besteht die Gleichung (1) *für alle erlaubten Variationen ζ, so hat $P(x, y)$ die Gestalt*

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} (x^k Y_k(y) + y^k X_k(x)), \tag{2}$$

wo X_k, Y_k stetige Funktionen sind.

Für den Fall $m = 3$ hat Herr Hilbert in seiner Abhandlung*) über das Dirichletsche Prinzip einen Beweis dieses Satzes gegeben. Der folgende Beweis knüpft enger an diejenige Methode an, nach welcher Du Bois-Reymond den entsprechenden Satz für eine Dimension bewiesen hat**).

Durch teilweise Integration, unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen für ζ, folgt direkt, daß die Gleichung (2) hinreichend ist, damit (1) besteht. Es gilt also, zugleich mit (1), die Gleichung

$$\int_b^\beta \int_a^\alpha \left\{ P(x, y) - \sum_{k=0}^{m-1} (x^k Y_k(y) + y^k X_k(x)) \right\} \frac{\partial^{2m} \zeta(x, y)}{\partial x^m \partial y^m} \, dx \, dy = 0 \tag{3}$$

für jede erlaubte Variation ζ und für alle stetigen Funktionen $X_k(x)$, $Y_k(y)$.

Bilden wir nun der Reihe nach folgende Funktionen, indem wir bei jedem Schritte eine Funktion aufstellen, welche derjenigen der Grenzbedingungen für ζ genügt, die von den vorhergehenden Funktionen der Reihe befriedigt werden, und außerdem einer weiteren Bedingung. Die erste Funktion befriedigt alle Bedingungen, die sich auf die Linien $x = a$, $y = b$ beziehen:

$$f_{00}(x, y) = \int_{b}^{y} \int_{a}^{x} P(x, y) \, dx^m \, dy^m,$$
$$(m) \quad (m)$$

$$f_{10}(x, y) = f_{00}(x, y) - \frac{(x-a)^m}{(\alpha-a)^m} f_{00}(\alpha, y),$$

$$f_{11}(x, y) = f_{10}(x, y) - \frac{(y-b)^m}{(\beta-b)^m} f_{10}(x, \beta),$$

*) Festschrift „Über das Dirichletsche Prinzip", Abhandlungen der K. Göttinger Gelehrtengesellschaft, Berlin 1901. Abgedruckt in Mathematische Annalen, Bd. 59 (1904), p. 161.

**) Mathematische Annalen, Bd. 15 (1879), p. 300. Siehe besonders auch Zermelo, Mathematische Annalen, Bd. 58, p. 558, wo, im Falle der einfachen Integrale, die Du Bois-Reymondsche Methode in ähnlicher Weise wie hier vollständig durchgeführt ist.

$$f_{21}(x,y) = f_{11}(x,y) - \frac{(x-a)^m (x-\alpha)}{(\alpha-a)^m}\left[\frac{\partial f_{11}(x,y)}{\partial x}\right]_{x=a},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$f_{m,m-1}(x,y) = f_{m-1,m-1}(x,y) - \frac{(x-a)^m (x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!\,(\alpha-a)^m}\left[\frac{\partial^{m-1} f_{m-1,m-1}(x,y)}{\partial x^{m-1}}\right]_{x=a},$$

$$f_{m,m}(x,y) = f_{m,m-1}(x,y) - \frac{(y-b)^m (y-\beta)^{m-1}}{(m-1)!\,(\beta-b)^m}\left[\frac{\partial^{m-1} f_{m,m-1}(x,y)}{\partial y^{m-1}}\right]_{y=\gamma}.$$

Man sieht sofort, daß die Funktion

$$\zeta(x,y) = f_{m,m}(x,y) \tag{4}$$

eine erlaubte Variation ist; und ferner, daß

$$\frac{\partial^{2m}\zeta(x,y)}{\partial x^m\,\partial y^m} = P(x,y) - \sum_{k=0}^{m-1}(x^k Y_k(y) + y^k X_k(x)), \tag{5}$$

wo $X_k(x)$, $Y_k(y)$ gewisse stetige Funktionen sind.

Nun gilt die Gleichung (3) für jede erlaubte Variation ζ, also für **alle** stetigen Funktionen X_k, Y_k von x bezw. y allein. Setzen wir dann in (3) die durch die Gleichungen (4), (5) definierten Funktionen ζ, X_k, Y_k ein, so folgt

$$\int_b^\beta \int_a^\alpha \left\{P(x,y) - \sum_{k=0}^{m-1}(x^k Y_k(y) + y^k X_k(x))\right\}^2 dx\,dy = 0,$$

also gilt in der Tat die Gleichung (2) und der Satz ist bewiesen.

Der obige Beweis läßt sich ohne weiteres auf mehrere Dimensionen ausdehnen.

New Haven, Connecticut, den 12. Mai 1905.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Repertorium der höheren Mathematik

(Definitionen, Formeln, Theoreme, Literaturnachweise)

von

Ernst Pascal,

ord. Prof. an der Universität zu Pavia.

Autorisierte deutsche Ausgabe von weil. A. Schepp in Wiesbaden.

In 2 Teilen.

I. Teil: **Die Analysis.** [XII u. 638 S.] 8. 1900. Biegsam in Lnwd. geb. ℳ 10.—

II. Teil: **Die Geometrie.** [IX u. 712 S.] 8. 1902. Biegsam in Lnwd. geb. ℳ 12.—

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der modernen Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser imstande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann.

Für den studierenden der Mathematik soll es ein „Vademecum" sein, in welchem er, kurz zusammengefaßt, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will.

Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht.

H. WIENERs Sammlung
Mathematischer Modelle
im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig.

Ebene Gebilde. Drahtmodelle zum Projizieren. ℳ 3.50 bis ℳ 10.—

Ebenflächige Gebilde. Draht- u. Fadenmodelle der regelmäßigen Vielflache Platons, Keplers und Poinsots. ℳ 5.— bis ℳ 20.—

Flächen 2. Ordnung. Drahtmodelle der Hauptschnitte. ℳ 6.— bis ℳ 18.—. Bewegliche Faden-, Stab- und Kreisschnittdrahtmodelle. ℳ 25.— bis ℳ 48.—

Dreh- und Schraubenflächen. Drehbare Drahtmodelle m. ebenen Schnitten oder mit Haupttangentenkurven: Kreisring, Urne, Wendelfl., schiefe Regelschraubenfl., Schrauben-Röhrenfl. ℳ 50.— bis ℳ 175.—

Raumkurven und abwickelbare Flächen.

16 Fadenmodelle der Singularitäten für die endliche Lage eines Kurvenpunktes oder die unendlich ferne Lage der Schmiegungsebene oder der Tangente oder des Punktes. ℳ 40.— bis ℳ 45.—

Sämtliche Modelle können einzeln oder in Reihen bezogen werden. Das ausführliche Verzeichnis mit Abbildungen und genauen Preisangaben wird auf Verlangen von B. G. Teubner in Leipzig, Poststr. 3, frei geliefert.

Mathematische Annalen Band 51 und Folge in der ganzen Serie oder einzeln zu kaufen gesucht. Gefällige Anerbieten unter N. 100 an die Verlagsbuchhandlung **B. G. Teubner** in **Leipzig** erbeten.

INHALT.

Seite

Über die zusammengehörigen Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher. Von Georg Faber in Karlsruhe 290
Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln. Von A. Hurwitz in Zürich 292
Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen. Von F. Klein in Göttingen 309
Zur Theorie der n^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. II. Über n^{te} Normenreste. Von W. Lietzmann in Schoeneberg bei Berlin 372
Das Hauptachsenproblem der Flächen 2. Ordnung. Von Otto Staude in Rostock 392
Über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$. Von S. Kapteyn in Lemberg. (Mit 1 Figur im Text) 397
Über mehrfache Ordnungstypen. I. Von Friedrich Riesz in Losoncz (Ungarn) 402
Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik. Von Leopold Fejér in Kolozsvár 422
Kriterien für die physikalische Bedeutung der analytischen Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. Von G. Zemplén in Budapest. (Mit 1 Figur im Text) 447
Beweis eines Lemmas der Variationsrechnung. Von Max Mason in New Haven 460

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, event. möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung den Manuskripten beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 30 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 8, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 28.

Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion oder an Professor **Otto Blumenthal**, Aachen, Viktoriastraße 7.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1869 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen.

Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

61. Band. 4. Heft.

Mit 8 Figuren im Text.

Ausgegeben am 20. Januar 1906.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

☞ Generalregister zu den Mathematischen Annalen. Band 1—50. Zusammengestellt von *A. Sommerfeld*. Mit einem Bildnis von A. Clebsch in Heliogravüre. (XI u. 202 S.) gr. 8. geh. a. Mk. 7.—

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG.

Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene.

Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie von

Dr. Otto Staude,

Professor an der Universität Rostock.

Mit 387 Figuren im Text. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Das Buch soll in erster Linie ein Lehrbuch sein, das nicht nur als eine Einleitung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, sondern auch als ein Handbuch zum Gebrauche neben den akademischen Vorlesungen über dieses Gebiet dient. Daher legt es Gewicht auf die ausführliche Fassung der Definitionen und Lehrsätze, die vollständige Aufstellung häufig gebrauchter Formelgruppen, die Vergleichung analoger Entwicklungen auseinanderliegender Kapitel. — Der Inhalt des Buches ist in systematischer Stufenfolge angeordnet, dabei aber der Charakter der Monographie bis in die kleinsten Abschnitte durchgeführt, die unter besonderer Überschrift jedesmal einen bestimmten Gegenstand behandeln. Diese Anordnung soll es dem Leser ermöglichen, die einzelnen Artikel auch aus dem Zusammenhange heraus zu benutzen. Dem gleichen Zwecke dienen die zahlreichen einfachen Figuren, die, meist nur für einen Artikel bestimmt, die schnelle Orientierung über dessen Inhalt und über die benutzten Bezeichnungen unterstützen sollen. Neben dem Text enthält das Buch in der Form von Anmerkungen eine Einführung in die Quellenschriften, wobei zugleich auf die neueren historischen Werke und die Encyklopädie vielfach verwiesen werden konnte. Auch auf die bereits erschienenen Bände der Teubnerschen Sammlung ist, wo angängig, Bezug genommen. Besondere Vorkenntnisse setzt das Buch nicht voraus. Die benutzten Sätze über Determinanten und lineare Gleichungen sind in gedrängter Übersicht und dem Gebrauche angepaßt in zwei besonderen Anmerkungen beigegeben.

Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.

Von **G. Vivanti,**

ord. Professor an der K. Universität zu Messina.

Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers deutsch herausgegeben

von **A. Gutzmer,**

Professor an der Universität Halle a. S.

[VI u. 642 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

Der Verfasser hat, einer Anregung des Herausgebers folgend, für die deutsche Ausgabe nicht nur den dritten Teil fast ganz neu gefaßt, sondern er hat auch die beiden ersten Teile mehr oder weniger großen Änderungen und Ergänzungen unterworfen. So ist z. B. die neuere Theorie der ganzen Funktionen zu einer wahren Monographie des Gebietes geworden, in der die Ergebnisse der neuesten Untersuchungen systematisch und einheitlich entwickelt werden. Die Literatur ist ergänzt und die Bibliographie der Mengenlehre eingefügt worden. — Das große Interesse, das sich an die neueren funktionentheoretischen Untersuchungen, insbesondere über die ganzen *Funktionen*, knüpft, läßt hoffen, daß die vorliegende deutsche Umarbeitung den *Kreisen der Mathematiker* nicht unwillkommen sein werde.

Die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems.*)

(Ein Beitrag zur Auflösung der Gleichungen 6^{ten} Grades.)

Von

Paul Gordan in Erlangen.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die Gruppe von 360 ternären Kollineationen, welche von Hrn. Valentiner entdeckt wurde**) und deren invariante Formen sodann von Hrn. Wiman aufgestellt wurden***). Es sind dies drei Formen beziehungsweise vom 6^{ten}, 12^{ten} und 30^{ten} Grade, die ich in der Folge f, φ, ψ nenne, und ihre Funktionaldeterminante R; alle anderen invarianten Formen der x_1, x_2, x_3 sind ganze Funktionen dieser vier Fundamentalformen, insbesondere ist R^2 eine ganze Funktion von f, φ, ψ allein. Indem ich mit c_1 die numerische Irrationalität bezeichne:

$$c_1 = \frac{\sqrt{-5}}{12}(3\sqrt{3} - \sqrt{-5}),$$

setze ich

$$(1) \qquad v = c_1 \frac{\varphi}{f^2}, \qquad w = 6c_1^3 \frac{\psi}{f^5}.$$

Die Berechnung der $x_1 : x_2 : x_3$ aus gegebenen Werten der v, w bezeichne ich als *Valentinerproblem*. Hr. Lachtin hat sich bereits mit den partiellen Differentialgleichungen beschäftigt, denen die Größen

$$(2) \qquad y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[6]{f}}, \qquad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt[6]{f}}, \qquad y_3 = \frac{x_3}{\sqrt[6]{f}}$$

als Funktionen der v, w genügen, ohne indes die Zahlenkoeffizienten der in diesen Differentialgleichungen vorkommenden Potenzen von v, w zu

*) Vergl. meinen Vortrag „Über die Gleichungen 6. Grades" in den „Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg" pg. 140—143).

**) *De endelige Transformations-Gruppers Theori* (1889) in den Abhandlungen der Dänischen Akademie, Serie 5, Bd. 6.

***) *Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Kollineationen* (1895), diese Annalen, Bd. 47.

berechnen*). *Die explizite Herstellung dieser Differentialgleichungen mit den Mitteln der Invariantentheorie ist das Ziel der nachfolgenden Arbeit.* Durch das somit erreichte Resultat ist die Möglichkeit gegeben, die Größen y_i nach Potenzen der v, w in Reihen zu entwickeln und also das Valentinerproblem tatsächlich zu lösen.

Ich habe mich mit den langen Rechnungen, welche für den angegebenen Zweck nötig sind, im Hinblick auf die grundlegenden Ideen über *Auflösung der Gleichungen sechsten Grades* beschäftigt, die Hr. Klein 1879 in den Rendiconti dei Lincei angegeben hat**) und neuerdings in einem an Hrn. Hensel gerichteten Briefe, der in diesen Annalen, Bd. 61, Seite 50—71, abgedruckt ist, ausführlicher erläutert***). Es war von vornherein klar, daß man versuchen müsse, die Auflösung der Gleichungen 6^ten^ Grades genau so auf das Valentinerproblem zurückzuführen, wie die Auflösung der Gleichungen 5^ten^ Grades auf das Ikosaederproblem. Die Frage war nur, ob für diesen Zweck *niedere accessorische Irrationalitäten* ausreichen möchten. Dies ist nach Hrn. Klein in der Tat der Fall; man benutzt keine anderen Irrationalitäten als Quadratwurzeln und Kubikwurzeln. Die Zurückführung der Gleichungen sechsten Grades auf das Valentinerproblem ist also durchaus praktikabel und Untersuchungen über die Auflösung des Valentinerproblems sind ohne weiteres Beiträge zur Auflösung der Gleichungen sechsten Grades.

Hr. Wiman hat bereits bemerkt (l. c.), daß beim Studium der Valentinergruppe zwei Systeme von sechs Kegelschnitten, die bei den 360 Kollineationen der Gruppe je 360 Vertauschungen erleiden, eine wesentliche Rolle spielen. Ich werde zwei Kegelschnitte, oder vielmehr die ihnen korrespondierenden quadratischen ternären Formen A und B *konjugiert* nennen, wenn die Determinante von $\lambda A + \mu B$ gleich ist $\lambda^3 + \mu^3$. Man erhält das einzelne bei der Valentinergruppe in Betracht kommende System von sechs Kegelschnitten in allgemeinster Weise, wenn man solche sechs Kegelschnitte sucht, die in dem angegebenen Sinne paarweise konjugiert sind. Mit dieser Aufgabe hat sich Hr. Gerbaldi, ohne damals ihre Beziehung zu einer endlichen Gruppe ternärer Kollineationen auch nur zu vermuten, bereits 1882 beschäftigt†) und hat dann in der Folge von

*) *Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung sechsten Grades allgemeiner Art* (1902), diese Annalen, Bd. 56, cf. insbesondere pag. 459; vorher russisch im 22^ten^ Bande der Moskauer Mathematischen Sammlung, 1901.

**) *Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado* (estratto di una lettera al sig. Castelnuovo) (Sitzung vom 9. April 1899), Rendiconti, vol. VIII, 1° semestre.

***) *Über die Auflösung der Gleichungen sechsten Grades* (März 1905), Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 129.

†) *Sui gruppi di sei coniche in involuzione*, Atti di Torino, vol. 17, p. 358—371.

diesem Ausgangspunkte aus eingehende Untersuchungen über die Resolventen des Valentinerproblems angestellt*).

Auch ich gehe im folgenden von der Betrachtung solcher sechs Kegelschnitte

$$K_1, K_2, \cdots, K_6$$

aus. Indem ich die zugehörigen ternären quadratischen Formen der Kürze halber ebenfalls mit den Buchstaben K bezeichne, finde ich, in genauer Übereinstimmung mit Gerbaldi, daß man schreiben darf:

$$(3)\quad \begin{cases} K_1 = x_1^2 + j x_2^2 + j^2 x_3^2, \\ K_2 = x_1^2 + j^2 x_2^2 + j x_3^2, \\ K_3 = r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sqrt{3}\cdot r(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2), \\ K_4 = r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sqrt{3}\cdot r(x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2), \\ K_5 = r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sqrt{3}\cdot r(-x_2x_3 + x_3x_1 - x_1x_2), \\ K_6 = r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sqrt{3}\cdot r(-x_2x_3 - x_3x_1 + x_1x_2), \end{cases}$$

unter j und r die folgenden numerischen Irrationalitäten verstanden:

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad 4r = -\sqrt{3} + \sqrt{-5}.$$

Die K sind (gemäß unserer Definition des Konjugiertseins) vorstehend so normiert, daß ihre Determinanten gleich 1 sind. Sie sind also nur bis auf eine beliebig als Faktor vorzusetzende dritte Einheitswurzel bestimmt. In der Tat ist bekannt (Wiman), daß die Valentinergruppe, in *homogenen* Substitutionen der x_1, x_2, x_3 geschrieben, mindestens aus $3 \cdot 360$ Substitutionen besteht und der identischen Kollineation entsprechend dann die drei Substitutionen enthält:

$$(4)\qquad x_1' = j^\nu \cdot x_1, \quad x_2' = j^\nu \cdot x_2, \quad x_3' = j^\nu \cdot x_3 \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

So werden also nicht die Formen K selbst, sondern nur ihre dritten Potenzen bei den Valentinersubstitutionen glatt vertauscht. Im übrigen bleiben die Formen K selbstverständlich bei der Substitution

$$(5)\qquad x_1' = -x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = -x_3$$

ungeändert. Indem ich also in der Folge die (homogene) Valentinergruppe durch die 360 geraden Vertauschungen der Formen K^3 definiere, enthält dieselbe nicht $3 \cdot 360$ sondern

$$6 \cdot 360 = 2160$$

Substitutionen. Dieselben besitzen zur Hälfte die Determinante $+1$, zur Hälfte die Determinante -1.

*) *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, bis jetzt 4 Teile: Teil 1, Bd. XII (1898); Teil 2, Bd. XIII (1899); Teil 3, Bd. XIV (1900); Teil 4, Bd. XVI (1902).

In Übereinstimmung mit den genannten Untersuchungen von Wiman erweisen sich alle Formen der x_1, x_2, x_3, welche sich bei der präzisierten homogenen Substitutionsgruppe nicht ändern (und die ich allgemein mit dem Buchstaben Φ benenne), als ganze Funktionen dreier Formen von Grade 6, 12 und 30:

$$f,\ \varphi,\ \psi.$$

Ich definiere, von Wiman in den Zahlenfaktoren abweichend:

$$(6)\qquad \begin{cases} f = a_x^6 = a_{1,x}^6 \cdots = \Sigma K^3, \\ \varphi = \varphi_x^{12} = \cdots = (a a_1 a_2)^2\, a_x^4 a_{1,x}^4 a_{2,x}^4, \\ \psi = \psi_x^{30} = \cdots = (\overline{a\varphi}\ \overline{a_1\varphi_1}\ x)^3\, a_x^4 a_{1,x}^4 \varphi_x^{10} \varphi_{1,x}^{10}. \end{cases}$$

Die bei Wiman gleichfalls auftretende Funktionaldeterminante

$$R = (f\ \varphi\ \psi)$$

ist selbst keine Φ, weil sie bei der Operation (5) ihr Vorzeichen ändert, wohl aber ihr Quadrat, das bereits Wiman als eine ganze Funktion der f, φ, ψ dargestellt hat.

Meine fernere Methode besteht nun darin, *daß ich das Formensystem der Form f im allgemeinen Sinne der Invariantentheorie untersuche*, d. h. unter Heranziehung nicht nur der Kovarianten (auf deren Betrachtung sich Hr. Wiman durchweg beschränkt), sondern auch der Zwischenformen. Eine Bezugnahme auf die Theorie der allgemeinen ternären Formen sechsten Grades, deren Formensystem unübersehbar ist, bleibt dabei ausgeschlossen; vielmehr benutze ich von vornherein besondere Eigenschaften der Form sechsten Grades f und beschränke mich auch bei ihr auf die Aufstellung von Teilsystemen. Diese sind zweierlei Art:

1) der Teil des Systems, welcher von den ternären kubischen Formen übernommen ist,

2) die Formen, welche durch Faltung aus dem symbolischen Produkte

$$\varphi = (a a_2 a_3)^2\, a_x^4 a_{1,x}^4 a_{2,x}^4$$

entstehen, und ihre Überschiebungen.

Übrigens benutze ich bei der Untersuchung vielfach auch diejenige Untergruppe der Valentinergruppe, welche ein einzelnes K^3, z. B. K_1^3, unverändert läßt. Es ist dies eine ternäre Ikosaedergruppe, welche in Anbetracht der in ihr auftretenden Substitutionen (4) und (5) $6 \cdot 60 = 360$ Substitutionen enthält. Diejenigen Formen der x_1, x_2, x_3, welche bei ihr ungeändert bleiben, nenne ich P; dieselben lassen sich als ganze Funktionen von K_1^3 und den Φ darstellen.

Mein Resultat ist in den folgenden Formeln enthalten. Man setze:

$$(7)\qquad 4r = -\sqrt{3} + \sqrt{-5}, \quad 4s = -\sqrt{3} - \sqrt{-5},$$

$$c = \frac{6r^3}{\sqrt{-5}} = \frac{3}{8\sqrt{-5}}(3\sqrt{3} + \sqrt{-5}), \quad c_1 = \frac{4\sqrt{-5}\,s^3}{3} = \frac{\sqrt{-5}}{12}(3\sqrt{3} - \sqrt{-5});$$

$$v = c_1 f^{-2}\varphi, \quad w = 6c_1^3 f^{-5}\psi, \quad \xi_\nu = 30sf^{-1}K_\nu^3$$

l führe ferner der Abkürzung halber ein:

$$\begin{cases} a_{21} = 3 - v + 2v^2; \quad a_{22} = 3 - v - 2v^2; \quad a_{31} = 3 - 6v + v^2 + 2v^3; \\ a_{32} = 9 - 12v + 25v^2 - 6v^3; \quad a_{33} = 9 - 11v + 2v^3; \\ a_{34} = -9 + 30v - 43v^2 + 6v^3; \quad a_{35} = 27 - 72v + 39v^2 - 10v^3; \\ a_4 = 9 + 6v - 11v^2 + 12v^4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{11} = w - a_{31}; \quad b_{21} = 6vw - a_{32}; \\ b_{31} = -6w^2 + 36(1-v)w + a_{32}a_{34} - 54(1-v)^2; \\ b_{12} = 3a_{22}w - a_{35}; \\ b_{22} = 3w^2 - 9(1-v)w + a_{35}v; \quad b_{32} = a_{35}b_{11}; \\ b_{13} = -6vw^2 + 3a_{33}w - a_{21}a_{35}; \\ b_{23} = 3(3-v)w^2 - (a_{35} + 3a_{33}v)w + a_{21}a_{35}v; \quad b_{33} = a_{35}b_{12}; \\ b = -18w^3 + 108(1-v)w^2 + 3(a_{22}a_{34} - 54(1-v)^2 - 4a_{35}v)w + a_4 a_{35}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{11} = b_{11}; \quad c_{12} = b_{12} + 18qb_{11}; \quad c_{13} = b_{13} + 12qb_{12} + 108q^2 b_{11}; \\ c_{21} = b_{21} - \frac{12}{11} b_{11}; \quad c_{22} = b_{22} + 3qb_{21} - \frac{2}{11} b_{12} - \frac{36}{11} qb_{11}; \\ c_{23} = b_{23} + 12qb_{22} + 18q^2 b_{21} - \frac{2}{11} b_{13} - \frac{24}{11} qb_{12} - \frac{216}{11} q^2 b_{11}; \\ c_{31} = b_{31} + 6q_1 b_{21} + 36q_2 b_{11}; \\ c_{32} = b_{32} + 3qb_{31} + 6q_1 b_{22} + 18qq_1 b_{21} + 6q_2 b_{12} + 108qq_2 b_{11}; \\ c_{33} = b_{33} + 36qb_{32} + 54q^2 b_{31} + 18q_1 b_{23} + 216qq_1 b_{22} + 324q^2 q_1 b_{21} \\ \qquad + 18q_2 b_{13} + 216qq_2 b_{12} + 1944q^2 q_2 b_{11} - \frac{2}{29} b; \\ 45q = -21 + 5v; \quad \frac{29 \cdot 45}{2} q_1 = -273 + 95v; \\ \frac{29 \cdot 45}{2} q_2 = -159 + 370v - 65v^2. \end{cases}$$

r erhalten dann erstlich für die Resolvente der ξ_ν (die schon Hr. Gerbaldi echnet hat):

$$:-\xi_\nu) = \begin{cases} x^6 - 30sx^5 + 15(22s^2 + \sqrt{3}sv)x^4 \\ +5\left(-(80s + 77\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}(8\sqrt{3}s + 7)v\right)x^3 \\ +\frac{15}{4}\left(-(68\sqrt{3}r + 203) - 6\sqrt{3}(16r - 3\sqrt{3})v + 3(4\sqrt{3}r - 1)v^2\right)x^2 \\ +\frac{3}{4}\left(72\sqrt{3}w - 170r - 207\sqrt{3} + 2\sqrt{3}(10\sqrt{3}r + 127)v - 120s^3v^2\right)x \\ +5\sqrt{-5}\,r^3(2\sqrt{3}sv + 1)^3 \end{cases}$$

und ferner für die in Formel (2) definierten Größen y:

$$y_1 = f^{-\frac{1}{6}} x_1, \quad y_2 = f^{-\frac{1}{6}} x_2, \quad y_3 = f^{-\frac{1}{6}} x_3$$

die folgenden partiellen Differentialgleichungen:

$$b\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} = \left(\frac{5}{2} v c_{13} - \frac{11}{2} c_{23}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{25}{4} w c_{13} - \frac{145}{12} c_{33}\right)\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{5}{24} c_{13} y,$$

$$b\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w} = \left(-v c_{12} + \frac{11}{5} c_{22}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \left(-\frac{5}{2} w c_{12} + \frac{29}{2} c_{32}\right)\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{1}{12} c_{12} y,$$

$$b\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} = \left(\frac{6}{5} v c_{11} - \frac{11}{25} c_{21}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \left(3 w c_{11} - \frac{29}{10} c_{31}\right)\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{1}{10} c_{11} y,$$

In den ersten drei Kapiteln werden die Eigenschaften der Invarianten erörtert, deren wir im folgenden bedürfen. Dies sind (1$^{\text{tes}}$ Kapitel) der Ω-Prozeß, die Polaren und Überschiebungen von Potenzen von Formen, dann (2$^{\text{tes}}$ Kapitel) die wichtigsten Formeln im System der kubischen ternären Formen und ihre Übernahme (3$^{\text{tes}}$ Kapitel) in die ternären Formen 6$^{\text{ten}}$ Grades. Die aus dem System von $f = a_x^3$ übernommenen Formen bilden einen Teil des Systems von $f = a_x^6$.

Die nächsten drei Kapitel beschäftigen sich mit den konjugierten Kegelschnitten $K_1, \cdots, K_6$.

Es werden (4$^{\text{tes}}$ Kapitel) ihre Normalformen bestimmt, sodann (5$^{\text{tes}}$ Kapitel) die Operationen des 1$^{\text{ten}}$ Kapitels darauf angewendet und schließlich (6$^{\text{tes}}$ Kapitel) die Werte der K und von $f = \Sigma K^3$ für spezielle Punkte berechnet.

Hierauf wenden wir uns zu den Kollineationen. Die Valentinergruppe der Σ läßt die Formen Φ unverändert und ihre Untergruppe der T die Formen P (7$^{\text{tes}}$ Kapitel). Die Φ sind spezielle P.

Im 8$^{\text{ten}}$ Kapitel werden die beiden Sätze bewiesen:

1. Die Φ sind ganze Funktionen von f, φ, ψ.
2. Die P sind ganze Funktionen von f, φ, ψ, K_1^3.

Die konjugierten Kegelschnitte K sind linear voneinander unabhängig; jeder Kegelschnitt der Ebene ist als ein Aggregat:

$$G = c_1 K_1 + c_2 K_2 + \cdots + c_6 K_6$$

ausdrückbar. Die Determinante von G ist eine kubische Funktion der Koeffizienten c_ν.

Diese Funktion wird im 9$^{\text{ten}}$ Kapitel aufgestellt, und aus ihr werden im 10$^{\text{ten}}$ Kapitel die Werte der Überschiebungen

$$(f, f)^2, \quad (f, f)^4, \quad (f, f)^6$$

als Funktionen der K berechnet.

Die Form

$$f = \Sigma K^3$$

ist keine allgemeine Form 6ten Grades, zwischen ihren Kovarianten bestehen (11tes Kapitel) Beziehungen.

Als Anwendung des Wimanschen Satzes werden im 12ten Kapitel eine Anzahl Φ als ganze Funktionen von f, φ, ψ ausgedrückt.

Die drei ersten Polaren von φ (13tes Kapitel)

$$\varphi_y,\ \varphi_{y^2},\ \varphi_{y^3}$$

und die beiden ersten Polaren von ψ (14tes Kapitel)

$$\psi_y,\ \psi_{y^2}$$

sind auf übernommene Formen reduzibel.

Infolge des Wimanschen Satzes sind die absoluten Kovarianten von f, von der Gestalt $\frac{\Phi}{f^n}$, ganze Funktionen der Valentinerparameter; im 15ten Kapitel werden mehrere solche Quotienten so ausgedrückt.

In den letzten Kapiteln werden die Endformeln entwickelt, nämlich im 17ten Kapitel die Gleichung mit den Wurzeln K^3 und im 18ten die partiellen Differentialgleichungen mit den Partikularlösungen $\frac{x_r}{\sqrt[6]{f}}$.

I. Kapitel.

Allgemeine Hilfsformeln aus der ternären Invariantentheorie.

I, § 1.

Der Ω-Prozeß ist durch die Formel

$$\Omega\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial u_3}$$

gegeben. Wenden wir ihn auf

$$u_x^n \quad \text{und} \quad \varphi u_x^p = a_x^m u_\alpha^n u_x^p$$

an, so erhalten wir die Formeln

$$\begin{aligned}
\Omega u_x^n &= n(n+2)u_x^{n-1};\quad \Omega u_x = 3;\quad \Omega u_x^2 = 8u_x,\\
\Omega\varphi u_x^p &= u_x^p \Omega\varphi + p(m+n+p+2)\varphi u_x^{p-1},\\
\Omega a_x^m u_x^p &= p(m+p+2)a_x^m u_x^{p-1}.
\end{aligned}$$

I, § 2.

Aus den Formeln

$$\Omega\varphi = 0;\quad a_x^m(\alpha xy)^{n-\varrho}(\alpha zy)^\varrho = 0$$

folgt

$$a_x^m(\alpha xy)^{n-\varrho-1}(\alpha zy)^{\varrho+1} = 0.$$

Beweis.

$$a_x^{m-1}a_y\,(axy)^{n-\varrho}(azy)^{\varrho}=0,$$
$$ma_x^{m-1}a_z(axy)^{n-\varrho}(azy)^{\varrho}+(n-\varrho)a_x^m(axy)^{n-\varrho-1}(azy)^{\varrho+1}=0,$$
$$a_x^{m-1}a_z(axy)^{n-\varrho}(azy)^{\varrho}+(n-\varrho)a_x^{m-1}a_y(axy)^{n-\varrho-1}(axz)\,(azy)^{\varrho}=0,$$
$$a_x^{m-1}a_z(axy)^{n-\varrho}(azy)^{\varrho}+(n-\varrho)a_x^{m-1}(axy)^{n-\varrho-1}(azy)^{\varrho}(a_z(axy)-a_x(azy))=0,$$
$$(n-\varrho+1)a_x^{m-1}a_z(axy)^{n-\varrho}(azy)^{\varrho}-(n-\varrho)a_x^m(axy)^{n-\varrho-1}(azy)^{\varrho+1}=0.$$

Aus der zweiten und dritten Zeile folgt:

$$(m+n-\varrho+1)\,(n-\varrho)a_x^m(axy)^{n-\varrho-1}(azy)^{\varrho+1}=0.$$

I, § 3.

Aus den Formeln

$$\Omega\varphi=0;\quad a_x^m(axy)^n=0$$

folgen diese

$$a_x^m(axy)^{n-1}(azy)=0,$$
$$a_x^m(axy)^{n-2}(azy)^2=0,$$
$$a_x^m(axy)^{n-3}(azy)^3=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_x^m(azy)^n=0,$$

also:

$$\varphi=0.$$

I, § 4.

Die Funktion

$$\Theta\varphi=\sum_k\frac{(-1)^k}{k!\,(m+n+1)(m+n)\cdots(m+n-k+2)}\,\Omega^k\varphi\,u_x^k$$

genügt den Relationen

$$\Omega\Theta\varphi=0;\quad \Theta(a_x^m(axy)^n)=a_x^m(axy)^n.$$

Ist

$$a_x^m(axy)^n=0,$$

so ist

$$\Theta\varphi=0.$$

I, § 5.

Die Polaren der Potenzen einer quadratischen Form

$$f=a_x^2$$

haben die Werte

$$(f^n)_{y^2}=f^{n-1}f_{y^2}-\frac{n-1}{2n-1}f^{n-2}(aa_1xy)^2,$$

$$(f^3)_{y^2z^2}=ff_{y^2}f_{z^2}-\frac{1}{5}\sum_3a_x^2(a_1a_2yz)^2+\frac{2}{45}(aa_1a_2)^2(xyz)^2.$$

I, § 6.

Die Polaren der Potenzen der Form

$$\alpha = u_\alpha^2 = (aa, u)^2$$

ben die Werte:

$$(\alpha^2)_{v^2} = \alpha v_\alpha^2 - \frac{4}{9} a_\alpha^2 (auv)^2,$$

$$(\alpha^2)_v = \alpha^2 v_\alpha u_\alpha,$$

$$(\alpha^3)_{v^2} = \alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{8}{15} a_\alpha^2 \alpha (auv)^2,$$

$$(\alpha^3)_{v^2 w^2} = \alpha v_\alpha^2 w_\alpha^2 - \frac{4}{15} a_\alpha^2 \sum_3 \alpha (avw)^2 + \frac{8}{135} (a_\alpha^2)^2 (uvw)^2.$$

I, § 7.

Die Überschiebungen der quadratischen Formen

$$f = a_x^2, \qquad \varphi = b_x^2$$

zeichnen wir mit

$$(aa_1u)^2 = u_\alpha^2; \quad (abu)^2 = u_\gamma^2; \quad (bb_1u)^2 = u_\beta^2.$$

ir wollen die Überschiebungen

$$(f^2, \varphi^2, u_x^4)^4; \quad (f^3, \varphi^3, u_x^6); \quad (f^2, f^2, u_x^2)^2$$

s ihnen zusammensetzen.

I, § 8.

Setzt man

$$f^2 = A_x^4; \quad \varphi^2 = B_x^4,$$

wird

$$(f^2)_{y^2} = A_x^2 A_y^2 = a_x^2 a_y^2 - \frac{1}{3} (\alpha xy)^2,$$

$$(f^2, \varphi^2, u_x^4)^4 = (ABu)^4 = (Abu)^2 (Ab_1u)^2$$

$$= (abu)^2 (a_1 b_1 u)^2 - \frac{1}{3} (\alpha \bar{b} u \bar{b}_1 u)^2$$

$$= \gamma^2 - \frac{1}{3} \alpha\beta.$$

I, § 9.

Setzt man

$$f^3 = A_x^6; \quad \varphi^3 = B_x^6,$$

wird

$$(f^3)_{y^2 z^2} = a_x^2 a_y^2 a_z^2 - \frac{1}{5} \sum_3 a_x^2 (\alpha yz)^2 + \frac{2}{45} a_\alpha^2 (xyz)^2,$$

$$(f^3, \varphi^3, u_x^6)^6 = (ABu)^6 = (Abu)^2 (Ab_1u)^2 (Ab_2u)^2$$

$$= \gamma^3 - \frac{3}{5} \gamma (\alpha \bar{b} u \bar{b}_1 u)^2 + \frac{2}{45} (\bar{b} u \bar{b}_1 u \bar{b}_2 u)^2 a_\alpha^2$$

$$= \gamma^3 - \frac{3}{5} \alpha\beta\gamma.$$

I, § 10.

$$(f^2.\ f^2,\ u_x^2)^2 = \left(a_x^2 a_y^2 - \frac{1}{3}(\alpha x y)^2,\quad a_x^2 a_y^2 - \frac{1}{3}(\alpha x y)^2,\quad u_x^2\right)^2$$

$$= f^2\alpha - \frac{2}{3} f(a\overline{\alpha x}u)^2 + \frac{1}{9}(\alpha x \overline{\alpha_1 x} u)^2$$

$$= f^2\alpha - \frac{2}{3} f\left(f\alpha + \frac{1}{3} a_\alpha^2 u_x^2\right) + \frac{1}{9} u_x^2(\alpha\alpha_1 x)^2$$

$$= \frac{1}{3} f^2\alpha - \frac{2}{9} a_\alpha^2 f u_x^2 + \frac{4}{27} a_\alpha^2 f u_x^2$$

$$= \frac{1}{3} f^2\alpha - \frac{2}{27} a_\alpha^2 f u_x^2.$$

II. Kapitel.

Anleihe bei der Theorie der ternären kubischen Formen.

II, § 1.

Wir werden im folgenden von einer Anzahl Formeln Gebrauch machen, welche sich auf kubische ternäre Formen beziehen. Die meisten derselben sind bereits bekannt, die übrigen wollen wir nunmehr entwickeln.

II, § 2.

Von den Invarianten, Kovarianten etc. der kubischen ternären For verwenden wir diese:

$$\alpha = a_x a_{1,x}(aa_1u)^2; \qquad \Delta = (aa_1a_2)^2 a_x a_{1,x} a_{2,x},$$

$$u_s^3 = (aa_1a_2)(aa_1u)(aa_2u)(a_1a_2u); \qquad u_t^3 = (aa_1\Delta)(aa_1a)(a\Delta u)(a_1\Delta$$

$$\gamma = a_x\Delta_x(a\Delta u)^2; \qquad \beta = \Delta_x\Delta_{1,x}(\Delta\Delta_1 u)^2,$$

$$S = a_s^3; \quad T = \Delta_s^3,$$

$$\psi = (\gamma\gamma_1 x)^2; \quad \Theta = (\gamma\gamma_1 y)^2 = \Theta_{y^2}; \quad R = (f\Delta\psi),$$

$$A_1 = 2\Delta^3 + 6f^2\Delta_{y^2},$$

$$A_2 = 12f\Delta_{y^2} + 6S\Delta^2,$$

$$A_3 = 6(\alpha\gamma x)^2,$$

$$A_4 = 12f_\gamma^2,$$

$$A_5 = 36\Theta_{\alpha^2},$$

$$A_6 = 72\Delta_\gamma^2,$$

$$A_7 = 36f^2(\beta\gamma x)^2 + 36\Delta^2(\alpha\gamma x)^2,$$

$$A_8 = 72\Theta_{\gamma^2},$$

$$B_{11} = 12a_x(a\bar{f}\bar{\Delta})^2,$$

$$B_{12} = 216a_x(a\bar{f}\bar{\Delta})(a\bar{f}\bar{\Theta}),$$

$$B_{13} = 6^4 a_x (a\bar{f}\bar{\Theta})^2,$$
$$B_{21} = 72\Delta_x (\Delta\bar{f}\bar{\Delta})^2,$$
$$B_{22} = 216\Delta_x (\Delta\bar{f}\bar{\Delta})(\Delta\bar{f}\bar{\Theta}),$$
$$B_{23} = 6^4 \Delta_x (\Delta\bar{f}\bar{\Theta})^2,$$
$$B_{31} = 2\cdot 6^3 (\Theta\bar{f}\bar{\Delta})^2,$$
$$B_{32} = 6^4 (\Theta\bar{f}\bar{\Delta})(\Theta\bar{f}\bar{\Theta})^2,$$
$$B_{33} = 3\cdot 6^5 (\Theta\bar{f}\bar{\Theta})^2,$$
$$B = 6^5 R^2.$$

II, § 3.

Die Kovarianten von f sind ganze Funktionen von

$$S,\ T,\ f,\ \Delta,\ R.$$

e geraden unter ihnen sind Funktionen von

$$S,\ T,\ f,\ \Delta.$$

e ungeraden haben den Faktor R. R^2 ist eine Funktion von

$$S,\ T,\ f,\ \Delta.$$

Im folgenden werden wir die A und B in dieser Weise darstellen d für sie diese Werte berechnen:

$$\mathfrak{l}_1 = 2Tf^3 - Sf^2\Delta + 2\Delta^3,$$
$$\mathfrak{l}_2 = S^2f^2 - 4Tf\Delta + 6S\Delta^2,$$
$$\mathfrak{l}_3 = 2\Delta^2 + Sf^3,$$
$$\mathfrak{l}_4 = -2\Delta^2 + Sf^3,$$
$$\mathfrak{l}_5 = S^2f^2 + 4Tf\Delta - 2S\Delta^2,$$
$$\mathfrak{l}_6 = -S^2f^2 + 16Tf\Delta - 6S\Delta^2,$$
$$\mathfrak{l}_7 = S^2f^4 + 8Tf^3\Delta + 12\Delta^4,$$
$$\mathfrak{l}_8 = 6STf^2 - 4S^2f\Delta + 4T\Delta^2,$$
$$\mathfrak{Z}_{11} = 6f\psi - A_1,$$
$$\mathfrak{Z}_{12} = 18A_4\psi - A_8f^2,$$
$$\mathfrak{Z}_{13} = -216\Delta\psi^2 + 18A_5f\psi - A_3A_8f,$$
$$\mathfrak{Z}_{21} = 36\Delta\psi - A_2f,$$
$$\mathfrak{Z}_{22} = 108\psi^2 - 36Tf^2\psi + A_8f\Delta,$$
$$\mathfrak{Z}_{23} = 108Sf\psi^2 - 6(A_8f + 3A_5\Delta)\psi + A_3A_8\Delta,$$
$$\mathfrak{Z}_{31} = -216\psi^2 + 144Tf^2\psi + A_4A_6 - 24T^2f^4,$$
$$\mathfrak{Z}_{32} = 6A_8f\psi - A_1A_8 = A_8B_{11},$$
$$\mathfrak{B}_{33} = 18A_4A_8\psi - A_8^2f^2 = A_8B_{12}.$$
$$\mathfrak{Z} = -3\cdot 6^4\psi^3 + 2\cdot 6^4Tf^2\psi^2 + 18(A_4A_6 - 4A_8f\Delta - 24T^2f^4)\psi + A_7A_8.$$

II, § 4.

Die einfachsten Relationen für die Kovarianten etc. von f sind diese:

$$(a\Delta u)^3 = 0,$$

$$a_x\Delta_x(a\Delta u)^2 = \gamma = a_x^2 a_s u_s^2 - \frac{S}{6} u_x^2,$$

$$t = a_s a_{1,s} u_s (a a_1 u)^2,$$

$$f_t u_t^1 = \frac{S}{12}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6} T u_x^2, \qquad f_a = \frac{1}{3}\Delta u_x,$$

$$6(aa_1\Delta)^2 a_x a_{1,x}\Delta_x = 6f_{\gamma^2} = 6\Delta_{\alpha^3} = Sf,$$

$$6(a\Delta\Delta_1)^2 a_x\Delta_x\Delta_{1,x} = 6\Delta_{\gamma^2} = 6f_{\beta^2} = 2Tf - S\Delta,$$

$$12(\Delta\Delta_1\Delta_2)^2\Delta_x\Delta_{1,x}\Delta_{2,x} = 12\Delta_{\beta^2} = S^2 f - 4T\Delta.$$

Aus ihnen folgen u. a. für A_1 und A_2 die Werte

$$A_1 = 2\Delta^3 + 6f^2\Delta_{\gamma^2} = 2Tf^3 - Sf^2\Delta + 2\Delta^3,$$

$$A_2 = 12f\Delta_{\gamma^2} + 6S\Delta^2 = S^2 f^2 - 4Tf\Delta + 6S\Delta^2.$$

II, § 5.

$$(\alpha x y)^2 = 2ff_{\gamma^2} - 2f_y^2,$$

$$(\beta x y)^2 = 2\Delta\Delta_{\gamma^2} - 2\Delta_y^2,$$

$$(\Theta\Theta, \overline{xy})^2 = \frac{4}{3}\Theta_{\gamma^2}(\gamma x y)^2 = 2\Theta\Theta_{\gamma^2} - 2\Theta_y^2,$$

$$a_x(\overline{\alpha x} a u)^2 = f\alpha + \frac{1}{3}\Delta u_x^2 = 3f\alpha - 2a_x(a\bar{f}u)^2,$$

$$\Delta_x(\overline{\beta x}\Delta u)^2 = \Delta\beta + \frac{1}{3}\Delta_{\gamma^2} u_x^2 = 2\Delta\beta - 2\Delta_x(\Delta\bar{\Delta}u)^2,$$

$$\frac{4}{3}\Theta_{\gamma^2}(\bar{\gamma}x\Theta u)^2 = \frac{4}{3}\Theta_{\gamma^2}\left(\Theta\gamma + \frac{1}{3}\Theta_{\gamma^2} u_x^2\right) = \frac{8}{3}\Theta_{\gamma^2}\Theta\gamma - 2(\Theta\bar{\Theta}u)^2,$$

also:

$$a_x(a\bar{f}u)^2 = \frac{1}{2} f\alpha - \frac{1}{6}\Delta u_x^2,$$

$$\Delta_x(\Delta\Delta u)^2 = \frac{1}{2}\Delta\beta - \frac{1}{6}\Delta_{\gamma^2} u_x^2,$$

$$3\cdot 6^5(\Theta\bar{\Theta}u)^2 = 216 A_3\psi\gamma - A_3^2 u_x^2,$$

$$\Theta_a^2 = \Theta\Theta_{a^2} - \frac{2}{3}\Theta_{\gamma^2}(\alpha\gamma x)^2,$$

$$3\cdot 6^3\Theta_\alpha^2 = 18A_5\psi - A_3 A_8,$$

$$12a_x(a\bar{f}\,\overline{\gamma x})^2 = 6f(\alpha\gamma x)^2 = A_3 f,$$

$$\Theta_\beta^2 = \Theta_{\gamma^2}\psi - \frac{1}{108} A_8(\beta\gamma x)^2.$$

II, § 6.

Aus der Formel

$$a_y\Delta_y(a\Delta u)^2 = a_s u_s^2 a_y^2 - \frac{S}{6}u_y^2$$

folgen diese:

(1) $$a_\gamma a_{1,\gamma}(aa_1u)^2 = a_s a_{1,s} f_s(aa_1u)^2 - \frac{S}{6}\alpha = f_t u_t^2 - \frac{S}{6}\alpha$$

$$= -\frac{S}{12}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}Tu_x^2,$$

$$a_\gamma a_{1,\gamma}(aa_1xy)^2 = -\frac{S}{6}ff_{y^2} + \Delta\Delta_{y^2} + \frac{S}{6}f_y^2 - \Delta_y^2,$$

(2) $$a_\gamma\Delta_\gamma(a\Delta u)^2 = a_\gamma^2 a_s u_s^2 - \frac{S}{6}\gamma = \frac{S}{6}(f_s - \gamma) = \frac{S^2}{36}u_x^2,$$

$$a_\gamma\Delta_\gamma(a\Delta xy)^2 = 0.$$

II, § 7.

Aus der Formel

$$(a\Delta u)^3 = 0$$

folgen diese:

$$0 = (a\Delta\overline{\gamma y})^2(a\Delta xy) = a_\gamma^2\Delta_y^2(a\Delta xy) - 2a_\gamma\Delta_\gamma a_y\Delta_y(a\Delta xy) + a_y^2\Delta_\gamma^2(a\Delta xy),$$

$$a_\gamma\Delta_\gamma a_y\Delta_y(a\Delta xy) = \frac{S}{12}a_x^2\Delta_y^2(a\Delta xy) + \frac{T}{6}a_y^2 a_{1,x}^2(aa_1\bar{x}\bar{y}) - \frac{S}{12}a_y^2\Delta_x^2(a\Delta xy)$$

$$= \frac{S}{6}a_x\Delta_y(a\Delta xy)^2 - \frac{T}{6}a_y a_{1,x}(aa_1x\bar{y})^2,$$

$$a_\gamma\Delta_\gamma a_y\Delta_x(a\Delta xy) = a_\gamma\Delta_\gamma a_x\Delta_y(a\Delta xy) = \frac{S}{12}(\gamma xy)^2 - \frac{T}{12}(\alpha xy)^2,$$

$$a_\gamma\Delta_x(a\Delta\gamma y)(a\Delta xy) = a_\gamma^2\Delta_x\Delta_y(a\Delta xy) - a_\gamma\Delta_\gamma a_y\Delta_x(a\Delta x\bar{y})$$

$$= \frac{S}{6}a_x^2\Delta_x\Delta_y(a\Delta xy) - \frac{S}{12}(\gamma xy)^2 + \frac{T}{12}(\alpha xy)^2$$

$$= \frac{S}{6}(f\Delta_{y^2} - \Delta_y f_y) - \frac{S}{12}(f\Delta_{y^2} - 2f_y\Delta_y + \Delta f_{y^2}) + \frac{T}{6}(ff_{y^2} - f_y^2)$$

$$= \left(\frac{T}{6}f - \frac{S}{12}\Delta\right)f_{y^2} + \frac{S}{12}f\Delta_{y^2} - \frac{T}{6}f_y^2,$$

$$a_\gamma\Delta_x(a\Delta\gamma x)(a\Delta xy) = \frac{S}{6}(f\Delta_y - \Delta f_y).$$

II, § 8.

$$(\alpha\gamma y)^2 = a_x\Delta_x(a_x\Delta_y - \Delta_x a_y)^2 = \frac{1}{3}\Delta\Delta_{y^2} + \frac{S}{6}ff_{y^2}$$

$$= a_x a_{1,x}(a_x a_{1,y} - a_{1,x}a_y)^2 = \frac{S}{3}ff_{y^2} - 2f_{\gamma,y}^2,$$

$$A_3 = 6(\alpha\gamma x)^2 = 2\Delta^2 + Sf^2,$$

$$f_{\gamma,y}^2 = -\frac{1}{6}\Delta\Delta_{y^2} + \frac{S}{12}ff_{y^2}.$$

$$A_4 = 12 f_\gamma^2 = -2\Delta^2 + Sf^2,$$

$$(\alpha\gamma x)(\alpha\gamma y) = \frac{1}{3}\Delta\Delta_y + \frac{S}{6} f f_y,$$

$$A_1 + A_4\Delta = 2Tf^3 - Sf^2\Delta + 2\Delta^3 - 2\Delta^3 + Sf^2\Delta = 2Tf^3,$$

$$(\alpha\beta\gamma)^2 = \frac{1}{3}\Delta\Delta_{\gamma^2} + \frac{S}{6} f\Delta_{\gamma^2} = \frac{1}{36}\Delta(S^2 f - 4T\Delta) + \frac{S}{6} f\left(\frac{T}{3} f - \frac{S}{6}\Delta\right),$$

$$(\alpha\gamma\gamma_1)^2 = \frac{1}{3}\Delta\Delta_{\gamma^2} + \frac{S}{6} f f_{\gamma^2},$$

$$A_5 = 36\Theta_{a^2} = 12\Delta\left(\frac{1}{3} Tf - \frac{S}{6}\Delta\right) + S^2 f^2.$$

II, § 9.

Aus den Formeln

$$a_\gamma a_{1,\gamma}(a a_1 \overline{xy})^2 = -\frac{S}{6} f f_{y^2} + \Delta\Delta_{y^2} + \frac{S}{6} f_y^2 - \Delta_y^2,$$

$$a_\gamma a_{1,\gamma} a_x a_y a_{1,x} a_{1,y} = -\frac{1}{6}\Delta\Delta_{y^2} + \frac{S}{12} f f_{y^2}.$$

folgt

$$a_\gamma a_{1,\gamma}(a_x a_{1,y} + a_y a_{1,x})^2 = \frac{S}{6} f f_{y^2} + \frac{1}{3}\Delta\Delta_{y^2} + \frac{S}{6} f_{y^2} - \Delta_y^2,$$

$$a_\gamma a_{1,\gamma} a_y a_{1,x}(a_y a_{1,x} + a_x a_{1,y}) = \frac{S}{12} f f_{y^2} + \frac{1}{6}\Delta\Delta_{y^2} + \frac{S}{12} f_y^2 - \frac{1}{2}\Delta_y^2,$$

$$a_y a_{1,x}(a a_1 \overline{\gamma x})(a a_1 \overline{\gamma y}) = a_y a_{1,x}(a_\gamma^2 a_{1,x} a_{1,y} + a_{1,\gamma}^2 a_y a_x - a_\gamma a_{1,\gamma}(a_y a_{1,x} + a_x a_{1,y})$$

$$= \frac{S}{6}(f_y^2 + f f_{y^2}) - \frac{S}{12} f f_{y^2} - \frac{1}{6}\Delta\Delta_{y^2} - \frac{S}{12} f_y^2 + \frac{1}{2}\Delta_y^2$$

$$= \frac{S}{12} f f_{y^2} - \frac{1}{6}\Delta\Delta_{y^2} + \frac{S}{12} f_y^2 + \frac{1}{2}\Delta_y^2,$$

$$a_{1,x}(a_x f_y - f a_y)(a a_1 \gamma x)(a a_1 \overline{\gamma y})$$

$$= f_y\left(\frac{1}{3}\Delta\Delta_y + \frac{S}{6} f f_y\right) - f\left(\frac{S}{12} f f_{y^2} - \frac{1}{6}\Delta\Delta_{y^2} + \frac{S}{12} f_y^2 + \frac{1}{2}\Delta_y^2\right)$$

$$= -\frac{S}{12} f f_{y^2} + \frac{1}{6} f\Delta\Delta_{y^2} - \frac{1}{2} f\Delta_y^2 + \frac{S}{12} f f_y^2 + \frac{1}{3}\Delta f_y \Delta_y.$$

II, § 10.

$$0 = a_\gamma^2 a_{1,x}^2 (a a_1 y x),$$

$$0 = a_\gamma a_{1,\gamma} a_x a_{1,x}(a a_1 y x),$$

$$0 = a_\gamma a_{1,x}(a a_1 \gamma x)(a a_1 \overline{y x}),$$

$$0 = a_{1,x}(a a_1 \overline{\gamma x})(a_y (a a_1 \overline{\gamma x}) - a_x (a a_1 \overline{\gamma y}),$$

$$a_y a_{1,x}(a a_1 \gamma x)^2 = a_x a_{1,x}(a a_1 \gamma x)(a a_1 \overline{\gamma y}) = (\alpha\gamma x)(\alpha\gamma y) = \frac{1}{3}\Delta\Delta_y + \frac{S}{6} f f_y,$$

$$f_y(\alpha\gamma x)^2 - f a_y a_{1,x}(a a_1 \overline{\gamma x})^2 = f_y\left(\frac{1}{3}\Delta^2 + \frac{S}{6} f^2\right) - f\left(\frac{1}{3}\Delta\Delta_y + \frac{S}{6} f f_y\right)$$

$$= \frac{1}{3}\Delta(\Delta f_y - f\Delta_y).$$

II, § 11.

Aus den Formeln

$$(\beta\gamma y)^2 = a_x\Delta_x(a_y\Delta_\beta - \Delta_y a_\beta)^2 = \tfrac{1}{3}\,\Delta_{\beta^2}f_{\gamma^2} - \Delta_{\gamma^2}\Delta_{\beta^2}$$
$$= \Delta_x\Delta_{1,x}(\Delta_\gamma\Delta_{1,y} - \Delta_y\Delta_{1,\gamma})^2 = -2\Delta_{\gamma y}^2 + 2\Delta_{\gamma^2}\Delta_{y^2}$$

folgt

I. $$36(\beta\gamma x)^2 = 12f\left(\tfrac{S^2}{12}f - \tfrac{T}{3}\Delta\right) + 36\Delta\left(\tfrac{T}{3}f - \tfrac{S}{6}\Delta\right)$$
$$= S^2f^2 + 8Tf\Delta - 6S\Delta^2,$$
$$A_7 = 36f^2(\beta\gamma x)^2 + 36\Delta^2(\alpha\gamma x)^2$$
$$= f^2(S^2f^2 + 8Tf\Delta - 6S\Delta^2) + 6\Delta^2(2\Delta^2 + Sf^2)$$
$$= S^2f^4 + 8Tf^3\Delta + 12\Delta^4.$$

II. $$\Delta_{\gamma y}^2 = \tfrac{1}{2}\,\Delta_{\gamma^2}\Delta_{y^2} - \tfrac{1}{6}\,f_{y^2}\Delta_{\gamma^2},$$
$$A_6 = 72\Delta_\gamma^2 = 36\Delta\left(\tfrac{T}{3}f - \tfrac{S}{6}\Delta\right) - 12f\left(\tfrac{S^2}{12}f - \tfrac{T}{3}\Delta\right)$$
$$= -S^2f^2 + 16Tf\Delta - 6S\Delta^2.$$

III. $$(\beta\gamma\gamma_1)^2 = \Theta_{\gamma^2} = \frac{S}{18}f\Delta_{\beta^2} + (\Delta_{\gamma^2})^2.$$

II, § 12.

$$a_xa_{1,x}\Delta_x(aa_1\Delta)^2u_y = a_xa_{1,x}\Delta_x(aa_1\Delta)\,(\Delta_y(aa_1u_\cdot) + 2a_y(a_1\Delta u)),$$
$$\Delta_x\Delta_\alpha\Delta_y u_\alpha = \frac{S}{6}fu_y - 2a_xa_\gamma a_y u_\gamma,$$
$$\Delta_\alpha = \frac{S}{6}fu_x - 2f_\gamma,$$
$$\Delta_\alpha^2 = \frac{S}{6}f\Delta - 2f_\gamma\Delta_\gamma,$$
$$\Delta_\alpha\Theta_\alpha = \frac{S}{6}f\psi - \frac{1}{108}A_8f,$$
$$2a_xa_\gamma a_y\Delta_\gamma\Delta_x\Delta_y = \Delta_{\alpha^2}\Delta_{y^2} - \Delta_{\alpha y}^2 = \frac{1}{2}(\alpha\beta y)^2,$$
$$(\alpha\beta x)^2 = 4f_\gamma\Delta_\gamma,$$
$$\Delta_x(\Delta a\,\alpha\bar{x})^2 = \Delta_x(\Delta_\alpha^2u_x^2 - 2\Delta_\alpha\Delta_xu_\alpha u_x + \Delta_x^2u_\alpha^2),$$
$$a_xa_{1,x}\Delta_x(\bar{a}a_1\bar{\Delta}ux)^2 = \frac{S}{6}fu_x^2 - 2\left(\frac{S}{6}fu_x - 2f_\gamma\right)u_x + \Delta\alpha,$$
$$2f\gamma - 2\Delta_x(\Delta\bar{f}u)^2 = \Delta\alpha + 4f_\gamma u_x - \frac{S}{6}fu_x^2,$$
$$\Delta_x(\Delta\bar{f}u)^2 = -\frac{\Delta}{2}\alpha + f\gamma - 2f_\gamma u_x + \frac{S}{12}fu_x^2,$$
$$\Delta_x(\Delta\bar{f}\gamma x)^2 = f\psi - \frac{1}{12}A_8\Delta,$$
$$216\Delta_x(\Delta\bar{f}\Theta)^2 = -3A_5\Delta + 3A_\gamma f - 2fA_8 + 18Sf\psi$$
$$= 18Sf\psi + A_8f - 3A_5\Delta.$$

II, § 13.

$$a_x\Delta_x\Delta_{1,x}(a\Delta\Delta_1)^2u_x = a_x\Delta_x\Delta_{1,x}(a\Delta\Delta_1)\,(a_x(\Delta\Delta_1 u) + 2\Delta_{1,x}(a\Delta u)),$$

$$\Delta_x\Delta_\gamma^2 u_x = a_\beta a_x^2 u_\beta + 2\Delta_\gamma\Delta_x^2 u_\gamma,$$

$$f_\beta^3 = \Delta_{\gamma^2}f - 2f_\gamma\Delta_\gamma,$$

$$f_\beta\Theta_\beta = \Delta_{\gamma^3}\psi - \frac{1}{108}A_8\Delta.$$

II, § 14.

$$\Theta = (\gamma\gamma_1 y)^2 = a_x\Delta_x(a_\gamma\Delta_y - a_y\Delta_\gamma)^2$$

$$= \frac{S}{6}f\Delta_{y^2} + \Delta_{\gamma^2}f_{y^2} - 2f_{\gamma y}\Delta_{\gamma y}$$

$$= \frac{S}{6}f\Delta_{y^2} + \Delta_{\gamma^2}f_{y^2} - \frac{1}{2}(\alpha\beta y)^2,$$

$$a_x(a\Theta u)^2 = \frac{S}{6}f\gamma + \Delta_{\gamma^2}\alpha - \frac{1}{2}a_x(a_\alpha u_\beta - a_\beta u_\alpha)^2,$$

$$= \frac{S}{6}f\gamma + \Delta_{\gamma^2}\alpha - \frac{1}{2}\Delta\beta + \frac{1}{3}\Delta\beta - \frac{1}{2}\Delta_{\gamma^2}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\Delta_{\gamma^2}\alpha + \frac{S}{6}f\gamma - \frac{1}{6}\Delta\beta,$$

$$A_8 = 72\Theta_{\gamma^2} = 12Sf\Delta_{\gamma^2} + 12Sf\Delta_{\gamma^2} - 36(\alpha\beta\gamma)^2$$

(II, § 8) $$= 24Sf\left(\frac{T}{3}f - \frac{S}{6}\Delta\right) - 36\left(\frac{1}{3}\Delta\Delta_{\beta^2} + \frac{S}{6}f\Delta_{\gamma^2}\right)$$

$$= 18Sf\left(\frac{T}{3}f - \frac{S}{6}\Delta\right) - \Delta(S^2f - 4T\Delta)$$

$$= 6STf^2 - 4S^2f\Delta + 4T\Delta^2,$$

$$\psi = \frac{S}{6}f\Delta + f\left(\frac{T}{3}f - \frac{S}{6}\Delta\right) - \frac{1}{2}(\alpha\beta x)^2$$

$$= \frac{T}{3}f^2 - \frac{1}{2}(\alpha\beta x)^2,$$

$$(\alpha\beta x)^2 = -2\psi + \frac{2}{3}Tf^2.$$

II, § 15.

(II, § 12) $$4f_\gamma\Delta_\gamma = (\alpha\beta x)^2,$$

$$f_\gamma\Delta_\gamma = -\frac{1}{2}\psi + \frac{1}{6}Tf^2,$$

$$\Delta_\alpha^2 = \frac{S}{6}f\Delta - 2f_\gamma\Delta_\gamma$$

$$= \psi - \Delta_{\gamma^2}f,$$

(II, § 13) $$f_\beta^2 = \Delta_{\gamma^2}f - 2f_\gamma\Delta_\gamma$$

II, § 16.

$$a_x(a\bar{f}u)^2 = \frac{1}{2}f\alpha - \frac{1}{6}\Delta u_x^3, \qquad \text{(II, § 5)}$$

$$a_x(a\bar{f}\overline{\beta x})^2 = \frac{1}{2}f\left(-2\psi + \frac{2}{3}Tf^2\right) \qquad \text{(II, § 14)}$$

$$= -f\psi + \frac{T}{3}f^3.$$

II, § 17.

$$f_y^2 = ff_{y^2} - \frac{1}{2}(\alpha x y)^2,$$

$$\Delta_x(\Delta\bar{f}\,\overline{\gamma x})^2 = fa_x\Delta_x(a\Delta\,\overline{\gamma x})^2 - \frac{1}{2}\Delta_x(\overline{\alpha x}\,\Delta\,\overline{\gamma x})^2$$

$$= f\psi - \frac{1}{12}A_3\Delta,$$

$$\Delta_y^2 = \Delta\Delta_{y^2} - \frac{1}{2}(\beta x y)^2,$$

$$(f\Delta\,\overline{\gamma x})^2 = \Delta(\bar{f}\Delta\,\overline{\gamma x})^2 - \frac{1}{2}(\bar{f}\,\overline{\beta x}\,\overline{\gamma x})^2$$

$$= \Delta\left(f\psi - \frac{1}{2}(\alpha\gamma x)^2\Delta\right) - \frac{1}{2}f^2(\beta\gamma x)^2$$

$$= \Delta f\psi - \frac{1}{72}A_7.$$

II, § 18.

$$\Delta_y^2 = \Delta\Delta_{y^2} - \frac{1}{2}(\beta x y)^2,$$

$$B_{11} = 12a_x(a\bar{f}\Delta)^2$$

$$= 12\Delta a_x\Delta_x(a\bar{f}\Delta)^2 - 6a_x(a\bar{f}\,\overline{\beta x})^2$$

$$= 12\Delta f_y^2 - 6\left(-f\psi + \frac{T}{3}f^3\right)$$

$$= 6f\psi + A_4\Delta - 2Tf^3 \qquad \text{(II, § 16)}$$

$$= 6f\psi - A_1. \qquad \text{(II, § 8)}$$

II, § 19.

$$B_{12} = 216a_x(af\Delta)(a\bar{f}\bar{\Theta})$$

$$= 216a_x\Delta_x(af\Delta)(\psi a\bar{f}\Delta) - f(a\bar{\Theta}\Delta) + a_x(\Delta f\bar{\Theta}))$$

$$= 216f_y(\psi f_y - f\Theta_y)$$

$$= 18A_4\psi - A_8f^2.$$

II. § 20.

II. § 5 $$a_x(a\bar{f}u)^2 = \frac{1}{2}fa - \frac{1}{6}\Delta a_x^2.$$

$$\begin{aligned} B_{13} &= 6^3 a_x(a\bar{f}\bar{\Theta})^2 = 3\cdot 6^3 f\Theta_a^2 - 6^3\Delta v^2 \\ &= -216\Delta v^2 + 18 A_3 fv - A_3 A_8 f. \end{aligned}$$

II. § 21.

II. § 5 $$\Delta_x \Delta\Delta u^2 = \frac{1}{2}\Delta\beta - \frac{1}{6}\Delta_x a_x^2.$$

$$\begin{aligned} B_{21} &= 72\Delta_x(\Delta\bar{f}\bar{\Delta})^2 \\ \text{II. § 15} \quad &= 36\Delta f_1^2 - 12 f^2\Delta_x \\ &= 36\Delta\left(v - \frac{1}{6}Sf\Delta\right) - 12f^2\Delta_x \\ &= 36\Delta v - f(6S\Delta^2 - 12f\Delta_x) \\ \text{II. § 4} \quad &= 36\Delta v - A_3 f. \end{aligned}$$

II. § 22.

$$\begin{aligned} B_{22} &= 216\Delta_x\,\Delta f\Delta(\Delta\bar{f}\bar{\Theta}) \\ &= 108\Delta_x\Delta_{1,x}(\Delta\Delta_1 f)(v\,\Delta\Delta_1 f - f\,\Delta\Delta_1\Theta) \\ &= 108 f_x(f_x v - \Theta_x f) \\ \text{II. §§ 15. 13} \quad &= 108 v\left(v - \frac{1}{6}Sf\Delta\right) - 108 f\left(\Delta_x v - \frac{1}{108}A_8\Delta\right) \\ &= 108 v^2 - fv\left(18S\Delta + 108\left(\frac{T}{3}f - \frac{S}{6}\Delta\right)\right) + A_8 f\Delta \\ &= 108 v^2 - 36 Tf^2 v + A_3 f\Delta. \end{aligned}$$

II. § 23.

$$\Theta_\gamma^2 = v\Theta_\gamma - \frac{1}{108}A_3(\gamma x y)^2,$$

$$\begin{aligned} B_{23} &= 6^4\Delta_x(\Delta\bar{f}\bar{\Theta})^2 \\ &= 6^4 v\Delta_x(\Delta\bar{f}\bar{\Theta})^2 - 12 A_8\Delta_x(\Delta\bar{f}\bar{\gamma x})^2 \\ \text{II. §§ 12. 17} \quad &= 6v(18Sfv - A_3 f - 3A_3\Delta) - 12A_8\left(fv - \frac{1}{12}A_3\Delta\right) \\ &= 108 Sfv^2 - 6(A_3 f + 3A_3\Delta)v - A_3 A_8\Delta. \end{aligned}$$

II. § 24.

$$\Theta(\gamma x)^2 = 2\gamma\gamma_1^2 - 2(u_1\gamma_1)^2,$$

$$\begin{aligned} B_{31} &= 2\cdot 6^3(\Theta\bar{f}\bar{\Delta})^2 \\ &= 4\cdot 6^3(f_1^2\Delta_1^2 - f_1\Delta_1 f^2) \\ \text{II. § 15} \quad &= 4\cdot 6^3\left\{-\left(-\frac{1}{2}v + \frac{1}{6}Tf^2\right)^2 - f_1^2\Delta_1^2\right\} \\ &= -6^3 v^2 + 144 Tf^2 v - 24 T^2 f^4 + A_4 A_6. \end{aligned}$$

II, § 25.

$$
\begin{aligned}
B_{32} &= 6^4(\Theta\bar{f}\bar{\Theta})(\Theta\bar{f}\bar{\Delta}) = 3\cdot 6^3(\Theta\bar{f}\Theta_1)(\Delta(\Theta\bar{f}\Theta_1) - f(\Theta\Delta\Theta_1)) \\
&= 12A_8 f_\gamma(\Delta f_\gamma - f\Delta_\gamma) \\
&= A_8A_4\Delta - 12A_8 f\left(-\tfrac{1}{2}\psi + \tfrac{1}{6}Tf^2\right) \qquad \text{(II, § 15)} \\
&= 6A_8 f\psi + A_8(A_4\Delta - 2Tf^3) \\
&= 6A_8 f\psi - A_1A_8 \qquad \text{(II, § 8)} \\
&= A_8B_{11}.
\end{aligned}
$$

II, § 26.

$$
\begin{aligned}
3\cdot 6^5(\Theta\bar{\Theta}u)^2 &= 216A_8\psi\gamma - A_8^2u_x^2, \qquad \text{(II, § 5)} \\
B_{33} &= 3\cdot 6^5(\Theta\bar{f}\bar{\Theta})^2 \\
&= 216A_8\psi f_\gamma^2 - A_8^2f^2 \\
&= 18A_4A_8\psi - A_8^2f^2 \\
&= A_8B_{12}.
\end{aligned}
$$

II, § 27.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Z}_y^2 &= \psi\Theta_{y^2} - \tfrac{1}{108}A_8(\gamma x y)^2, \\
B &= 6^5R^2 = 6^5(\!(f\Delta\Theta)\!)^2 \\
&= 6^5\left(\psi(\bar{f}\Delta\Theta)^2 - \tfrac{1}{108}A_8(\bar{f}\Delta\gamma x)^2\right) \\
&= 18\psi(-6^3\psi^2 + 144Tf^2\psi + A_4A_6 - 24T^2f^4) \\
&\qquad - 72A_8\left(f\Delta\psi - \tfrac{1}{72}A_7\right) \qquad \text{(II, § 17)} \\
&= -3\cdot 6^4\psi^3 + 2\cdot 6^4Tf^2\psi^2 + 18(A_4A_6 - 24T^2f^4 - 4A_8f\Delta)\psi + A_7A_8.
\end{aligned}
$$

III. Kapitel.

Kovarianten von f, die von den kubischen Formen übernommen werden.

III, § 1.

Die Kovarianten etc. der kubischen ternären Form

$$f = a_x^3$$

id Aggregate von symbolischen Produkten P.

Hat P in den Koeffizienten den Grad n, so treten darin n Symbole

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

f, welche f darstellen.

Das Produkt

$$\overline{P} = a_{1,x}^3 a_{2,x}^3 \cdots a_{n,x}^3 P$$

ist eine Kovariante der ternären Form 6^{ten} Grades

$$\bar{f} = a_x^6;$$

sie heißt eine aus dem System der kubischen Formen *übernommene Form*.

Die übernommene Form $\overline{P}$ ist durch den Faktor

$$a_{1,x}^3 a_{3,x}^3 \cdots a_{n,x}^3$$

charakterisiert.

Ist $\overline{P}$ ein symbolisches Produkt, geschrieben in den Symbolen von $\bar{f}$ vom Grade n in den Koeffizienten, welches jenen Faktor besitzt, so ist es von der Kovariante etc. P der kubischen Form übernommen.

Die Relationen zwischen den P der kubischen Form bleiben bestehen, wenn man die P durch die $\overline{P}$ ersetzt.

III, § 2.

Analog den Bezeichnungen von II, § 2 führen wir für diese übernommenen Formen von

$$f = a_x^6$$

die Bezeichnungen ein:

$$\alpha = a_x^4 a_{1,x}^4 (a a_1 u)^2; \quad \Delta_{y^3} = \Delta_y^3 d_x^9 = a_y a_{1,y} a_{2,y} a_x^3 a_{1,x}^3 a_{2,x}^3 (a a_1 a_2)^2,$$

$$\Delta = \Delta_x^3 = \varphi = a_x^4 a_{1,x}^4 a_{2,x}^4 (a a_1 a_2)^2; \; u_\beta^3 = a_x^3 a_{1,x}^3 a_{2,x}^3 (a a_1 a_2)(a a_1 u)(a a_2 u)(a_1 a_2 u),$$

$$u_t^3 = a_x^3 a_{1,x}^3 a_{2,x}^3 d_x^9 (a a_1 \Delta)(a a_1 u)(a a_2 u)(a_1 a_2 u),$$

$$\gamma = a_x^4 d_x^9 \Delta_x (a \Delta u)^2; \quad \beta = d_x^9 d_{1,x}^9 \Delta_x \Delta_{1,x} (\Delta \Delta_1 u)^2,$$

$$S = a_x^3 a_\gamma^3; \quad T = d_x^9 \Delta_x^3,$$

$$\psi = (\gamma \gamma_1 x)^2 = a_x^4 a_{1,x}^4 d_x^9 d_{1,x}^9 \Delta_x \Delta_{1,x} (a \Delta a_1 \Delta_1 x)^2,$$

$$\Theta = (\gamma \gamma_1 y)^2 = a_x^4 a_{1,x}^4 d_x^9 d_{1,x}^9 \Delta_x \Delta_{1,x} (a \Delta a_1 \Delta_1 y)^2,$$

$$\Theta_{\gamma'} = (\gamma \gamma_1 x)(\gamma \gamma_1 y) = a_x^4 a_{1,x}^4 d_x^9 d_{1,x}^9 \Delta_x \Delta_{1,x} (a \Delta a_1 \Delta_1 x)(a \Delta a_1 \Delta_1 y),$$

$$R = (f \varphi \psi) = (f \Delta \Theta),$$

$$A_1 = 2\Delta^3 - 6 f^2 \Delta_{\gamma^2},$$

$$A_2 = 12 f \Delta_{\gamma^2} + 6 S \Delta^2,$$

$$A_3 = 6(\alpha \gamma x)^2,$$

$$A_4 = 12 f_\gamma^2,$$

$$A_5 = 36 \Theta_{\alpha^2},$$

$$A_6 = 72 \Delta_\gamma^2,$$

$$A_7 = 36 f^2 (\beta \gamma x)^2 + 36 \Delta^2 (\alpha \gamma x)^2,$$

$$A_8 = 72 \Theta_{\gamma^2},$$

$$B_{11} = 12 a_x^4 (a \bar{f} \Delta)^2,$$

$$B_{12} = 216 a_x^4 (a \bar{f} \Delta)(a \bar{f} \Theta),$$

$$B_{13} = 6^4 a_x^4 (a \bar{f} \Theta)^2,$$

$$B_{21} = 72 d_x^9 \Delta_x (\Delta \bar{f} \Delta)^2,$$
$$B_{22} = 216 d_x^9 \Delta_x (\Delta \bar{f} \bar{\Delta})(\Delta \bar{f} \bar{\Theta}),$$
$$B_{23} = 6^4 d_x^9 \Delta_x (\Delta \bar{f} \Theta)^2,$$
$$B_{31} = 2 \cdot 6^3 (\Theta \bar{f} \bar{\Delta})^2,$$
$$B_{32} = 6^4 (\Theta \bar{f} \bar{\Delta})(\Theta \bar{f} \bar{\Theta}),$$
$$B_{33} = 3 \cdot 6^5 (\Theta \bar{f} \bar{\Theta})^2,$$
$$B = 6^5 R^2.$$

III, § 3.

Die Werte der A, B sind bereits in II, § 3 angegeben und behalten ihre Geltung bei der Übernahme.

Von den übrigen Relationen zwischen den übernommenen Formen erwähnen wir

$$a^3 a_{1,x}^4 (a_x f_y - f a_y)(a a_1 \gamma \bar{x})(a a_1 \bar{\gamma} \bar{y})$$

(II, § 9)
$$= -\frac{S}{12} f^2 f_{y^2} + \frac{1}{6} f \Delta \Delta_{y^2} - \frac{1}{2} f \Delta_y^2 + \frac{S}{12} f f_y^2 + \frac{\Delta}{3} f_y \Delta_y,$$

(II, § 10)
$$f_y (\alpha \gamma x)^2 - f a_x^3 a_y a_{1,x}^4 (a a_1 \bar{\gamma} \bar{x})^2 = \frac{1}{3} \Delta (f \Delta_y - \Delta f_y),$$

(II, § 4)
$$\Delta_{a^2} = \frac{S}{6} f,$$

„
$$\Delta_{\gamma^2} = \frac{T}{3} f - \frac{S}{6} \Delta$$

(II, § 15)
$$\Delta_\alpha^2 = \psi - \Delta_{\gamma^2} f,$$

(II, § 7)
$$a_x^3 a_\gamma \Delta_x d_x^9 (a \Delta \bar{\gamma} \bar{x})(a \Delta \bar{y} x) = -\frac{S}{6} (f \Delta_y - \Delta f_y),$$

„
$$a_x^3 a_\gamma \Delta_x d_x^9 (a \Delta \bar{\gamma} \bar{y})(a \Delta y \bar{x}) = \left(\frac{S}{12} \Delta - \frac{T}{6} f\right) f_{y^2} - \frac{S}{12} f \Delta_{y^2} + \frac{T}{6} f_y^2.$$

III, § 4.

Wir fügen noch einige weitere Relationen zwischen den Formen von $f = a_x^6$ hinzu.

$$(\alpha x y)^2 = 2 f f_{y^2} - 2 f_y^2,$$
$$a_x^3 a_y a_{1,x}^4 (a a_1 \bar{x} \bar{y})^2 = f f_{y^3} - f_y f_{y^2},$$
$$a_x^3 a_{1,x}^2 (a a_1 \bar{x} \bar{y})^4 = 2 f f_{y^4} - 8 f_y f_{y^3} + 6 f_{y^2}^2,$$
$$(a a_1 \overline{y x})^6 = 2 f f_{y^6} - 12 f_y f_{y^5} + 30 f_{y^2} f_{y^4} - 20 f_{y^3}^2,$$
$$(a a_1 a_2)^2 (a a_1 \bar{x} \bar{y})^4 a_{2,x}^1$$
$$= 2 a_x^2 a_y^4 - 8 (a a_1 a_2)^2 a_x a_y^3 a_{1,x}^3 a_{1,y} a_{2,x}^4 + 6 (a a_1 a_2)^2 a_x^2 a_y^2 a_{1,x}^2 a_{1,y}^2 a_{2,x}^4.$$

III, § 5.

$$6(a_x^2 a_{1,x}^2)_{y^2} = a_x^2 a_{1,y}^2 + 4a_y a_y a_{1,x} a_{1,y} + a_y^2 a_{1,x}^2,$$

$$(aa_1\overline{xy})^4 = a_x^4 a_{1,y}^4 - 4a_x^3 a_y a_{1,x} a_{1,y}^3 + 6a_x^2 a_y^2 a_{1,x}^2 a_{1,y}^2 - 4a_x a_y^3 a_{1,x}^3 a_{1,y} + a_y^4 a_{1,x}^4,$$

$$(a_x^2 a_{1,x}^2)_{y^2}\,(aa_1\overline{xy})^4$$

$$= \frac{1}{6}\begin{cases} 2a_x^3 a_{1,y}^3 (a_x^4 a_{1,y}^4 - 4a_x^3 a_y a_{1,x} a_{1,y}^3 + 6a_x^2 a_y^2 a_{1,x}^2 a_{1,y}^2 - 4a_x a_y^3 a_{1,x}^3 a_{1,y} + a_y^4 a_{1,x}^4) \\ + 8a_x a_y a_{1,x} a_{1,y} (a_x^4 a_{1,y}^4 - 4a_x^3 a_y a_{1,x} a_{1,y}^3 + 3a_x^2 a_y^2 a_{1,x}^2 a_{1,y}^2) \end{cases}.$$

$$= \frac{1}{3} f f_{y^4} - 3 f_{y^3} f_{y^3} + \frac{8}{3} f_{y^4}^3.$$

III, § 6.

Aus den Formeln (I, § 6)

$$(\alpha^3)_v = \alpha^2 \cdot v_\alpha; \quad (\alpha^2)_{v^2} = \alpha v_\alpha^2 - \frac{4}{9}\Delta a_x^4 (auv)^2;$$

$$(\alpha^3)_{v^2} = \alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{8}{15}\Delta\alpha a_x^4 (auv)^2,$$

$$(\alpha^3)_{v^3} = \alpha v_\alpha v_\alpha^2 - \frac{4}{15}\Delta v_\alpha a_x^4 (auv)^2$$

folgen diese:

$$(f_{y^3} f_y,\ \alpha^3)^6 = a_\alpha^2 a_{\alpha_1}^2 a_{\alpha_2} a_x \cdot \alpha_{1,\alpha_2} a_{1,x}^5 = \frac{\Delta}{3}(f, \alpha^2)^4,$$

$$(f_{y^3}^2,\ \alpha^2)^1 = \Delta^2 - \frac{4}{9}\Delta^2 = \frac{5}{9}\Delta^2,$$

$$(f_{y^4} f_{y^2},\ \alpha^3)^6 = \Delta(f, \alpha^2)^4 - \frac{8}{15}\Delta(f, \alpha^2)^4 = \frac{7}{15}\Delta(f, \alpha^2)^4,$$

$$(f_{y^3}^2,\ \alpha^3)^6 = a_x^3 a_{1,x}^3 \left(a_\alpha^2 a_{\alpha_1} a_{1,\alpha_1} a_{1,\alpha_2}^2 - \frac{4}{15}\Delta a_\alpha a_{1,\alpha} a_{2,x}^4 (aa_1a_2)^2\right)$$

$$= \Delta_\alpha^2 - \frac{4}{15}\Delta\Delta_{\alpha^2}$$

$$= \psi - \frac{T}{3} f^2 + \frac{11}{90} Sf\Delta^2.$$

IV. Kapitel.

Einführung der K und L, d. h. der sechs konjugierten Kegelschnitte in Punkt- und Linienkoordinaten.*)

IV, § 1.

Zwei Kegelschnitte

$$a_x^2,\ b_x^2$$

heißen konjugiert, wenn ihre Koeffizienten die Gleichungen befriedigen

$$(aa_1a_2)^2 = 6; \quad (aa_1b)^2 = 0; \quad (abb_1)^2 = 0; \quad (bb_1b_2)^2 = 6,$$

*) Vergl. hierzu die in der Einleitung zitierten Arbeiten von Herrn Gerbaldi.

enn also die Determinanten der Kegelschnitte des Büschels

$$\lambda a_x^2 + \mu b_x^2$$

e Werte

$$\lambda^3 + \mu^3$$

sitzen.

IV, § 2.

Zu einem gegebenen Kegelschnitte a_x^2 gibt es eine dreifache Mannigltigkeit von Kegelschnitten b_x^2, welche ihm konjugiert sind.

Bezieht man die beiden Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Polareieck, so kann man ihre Gleichungen in der Form schreiben

$$a_x^2 = x_1^2 + j\, x_2^2 + j^2 x_3^2,$$
$$b_x^2 = x_1^2 + j^2 x_2^2 + j\, x_3^2,$$

o $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ist.

Es wird dann

$$\tfrac{1}{2}\,(a a_1 u)^2 = u_1^2 + j^2 u_2^2 + j u_3^2,$$
$$-\,(a b u)^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad + u_3^2,$$
$$\tfrac{1}{2}\,(b b_1 u)^2 = u_1^2 + j u_2^2 \quad + j^2 u_3^2,$$
$$-\tfrac{1}{4}\,(\overline{a a_1}\, b b_1 x)^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad + x_3^2.$$

IV, § 3.

Wir führen nun die Bezeichnungen ein:

$$K_1 = x_1^2 + j\, x_2^2 + j^2 x_3^2,$$
$$K_2 = x_1^2 + j^2 x_2^2 + j\, x_3^2,$$
$$L_1 = u_1^2 + j^2 u_2^2 + j\, u_3^2,$$
$$L_2 = u_1^2 + j\, u_2^2 + j^2 u_3^2$$

d erhalten die Formeln:

$$K_{1,L_1}^2 = 3; \quad K_{2,L_2}^2 = 3; \quad K_{1,L_2}^2 = 0; \quad K_{2,L_1}^2 = 0,$$
$$(K_1 K_1 u)^2 = 2 L_1; \quad (K_2 K_2 u)^2 = 2 L_2,$$
$$-\,(K_1 K_2 u)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = o_1; \quad -\,(L_1 L_2 x)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = o.$$

IV, § 4.

Genügt ein Kegelschnitt

$$a_x^2, \quad \tfrac{1}{2}\,(a a_1 u)^2 = u_\alpha^2$$

n Relationen

$$a_{L_1}^2 = a_{L_2}^2 = 0; \quad K_{1,\alpha}^2 = K_{2,\alpha}^2 = 0,$$

so ist

$$a_{11} = a_{22} = a_{33},$$
$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33}.$$

IV, § 5.

Die Kegelschnitte

$$K_\nu, \quad L_\nu = \tfrac{1}{2}(K_\nu K_\nu u)^2,$$

welche K_1 und K_2 konjugiert sind, lassen sich in der Form schreiben

$$a_x^2 = K_\nu = r^2 o + 2r\varrho(a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2),$$
$$u_\alpha^2 = L_\nu = s^2 o_1 + 2s\sigma(b_1 u_2 u_3 + b_2 u_3 u_1 + b_3 u_1 u_2),$$

wo die Koeffizienten

$$r,\ s,\ \varrho,\ \sigma,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3$$

Relationen genügen, welche durch die Formeln

$$(a a_1 u)^2 = 2u_\alpha^2; \quad (\alpha \alpha_1 x)^2 = 2a_x^2;$$

bestimmt sind. Sie lauten:

$$s^2 = r^4 - a_1^2 r^2 \varrho^2 = r^4 - a_2^2 r^2 \varrho^2 = r^4 - a_3^2 r^2 \varrho^2,$$
$$r^2 = s^4 - b_1^2 s^2 \sigma^2 = s^4 - a_2^2 s^2 \sigma^2 = s^4 - a_3^2 s^2 \sigma^2,$$
$$s\sigma b_1 = a_2 a_3 r^2 \varrho^2 - a_1 r^3 \varrho; \quad s\sigma b_2 = a_3 a_1 r^2 \varrho^2 - a_2 r^3 \varrho; \quad s\sigma b_3 = a_1 a_2 r^2 \varrho^2 - a_3 r^3 \varrho,$$
$$r\varrho a_1 = b_2 b_3 s^2 \sigma^2 - b_1 s^3 \sigma; \quad r\varrho a_2 = b_3 b_1 s^2 \sigma^2 - b_2 s^3 \sigma; \quad r\varrho o_3 = b_1 b_2 s^2 \sigma^2 - b_3 s^3 \sigma.$$

IV, § 6.

Wir wählen ϱ und σ so, daß

$$a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3 = 1,$$
$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = 1$$

und erhalten:

$$s^2 = r^4 - r^2 \varrho^2; \quad r^2 = s^4 - s^2 \sigma^2,$$
$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = 1; \quad a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3,$$
$$s\sigma = r^2 \varrho^2 - r^3 \varrho; \quad r\varrho = s^2 \sigma^2 - s^3 \sigma.$$

Die den K_1, K_2 konjugierten Kegelschnitte haben die Formen:

$$K_3 = r^2 o + 2r\varrho(\ \ x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2); \quad L_3 = s^2 o_1 + 2s\sigma(\ \ u_2 u_3 + u_3 u_1 + u_1 u_2),$$
$$K_4 = r^2 o + 2r\varrho(\ \ x_2 x_3 - x_3 x_1 - x_1 x_2); \quad L_4 = s^2 o_1 + 2s\sigma(\ \ u_2 u_3 - u_3 u_1 - u_1 u_2),$$
$$K_5 = r^2 o + 2r\varrho(-x_2 x_3 + x_3 x_1 - x_1 x_2); \quad L_5 = s^2 o_1 + 2s\sigma(-u_2 u_3 + u_3 u_1 - u_1 u_2),$$
$$K_6 = r^2 o + 2r\varrho(-x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2); \quad L_6 = s^2 o_1 + 2s\sigma(-u_2 u_3 - u_3 u_1 + u_1 u_2).$$

IV, § 7.

Sind die K_3, K_4, K_5, K_6 auch einander konjugiert, so ist

$$(K_m L_m)^2 = 3,$$
$$(K_m L_n)^2 = 0 \qquad \text{für } m \gtrless n,$$

o

$$r^2 s^2 + 2rs\varrho\sigma = 1; \quad 3rs - 2\varrho\sigma = 0,$$
$$4r^2 s^2 = 1; \quad rs = \tfrac{1}{2}; \quad \varrho\sigma = \tfrac{3}{4}.$$

ch IV, § 6 ist:

$$s\sigma = r^2\varrho^2\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right); \quad r\varrho = s^2\sigma^2\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right),$$

o

$$\frac{8}{3} = \left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{s}{\sigma}\right) = 1 - \frac{r}{\varrho} - \frac{s}{\sigma} + \frac{2}{3},$$
$$1 + \frac{r}{\varrho} + \frac{s}{\sigma} = 0,$$
$$3\frac{s^3}{\sigma^3} = -\frac{3s^2}{\sigma^2}\left(1 + \frac{r}{\varrho}\right) = -\frac{3s^2}{\sigma^2} - \frac{2s}{\sigma}$$
$$= \frac{3s}{\sigma}\left(1 + \frac{r}{\varrho}\right) - \frac{2s}{\sigma} = \frac{s}{\sigma} + 2 \qquad \text{(IV, § 6)}$$
$$= 1 - \frac{r}{\varrho} = \frac{s\sigma}{r^2\varrho^2},$$
$$3r^2 s^3 \varrho^2 = s\sigma^4,$$
$$3r^2 s^3 \varrho^3 = \varrho\sigma^4,$$
$$\tfrac{3}{4}\varrho^3 = \tfrac{3}{4}\sigma^3.$$

Wir wählen

$$\varrho = \sigma$$

d erhalten

$$\varrho = \sigma = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

IV, § 8.

Für r, s gelten die Gleichungen:

$$rs = \tfrac{1}{2},$$
$$1 + \frac{r}{\varrho} + \frac{s}{\sigma} = 0; \quad r + s = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

ir setzen:

$$4r = -\sqrt{3} + \sqrt{-5},$$
$$4s = -\sqrt{3} - \sqrt{-5},$$
$$c = \frac{6r^3}{\sqrt{-5}} = -\frac{3}{8\sqrt{-5}}(3\sqrt{3} + \sqrt{-5}),$$
$$c_1 = \frac{4\sqrt{-5}s^3}{3} = \frac{\sqrt{-5}}{12}(3\sqrt{3} - \sqrt{-5})$$

und erhalten für die sechs konjugierten Kegelschnitte die Normalformen:

$$K_1 = x_1^2 + jx_2^2 + j^2x_3^2, \qquad L_1 = u_1^2 + j^2u_2^2 + ju_3^2,$$
$$K_2 = x_1^2 + j^2x_2^2 + jx_3^2, \qquad L_2 = u_1^2 + ju_2^2 + j^2u_3^2,$$
$$K_3 = r^2o + \sqrt{3}r(\ x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2), \quad L_3 = s^2o_1 + \sqrt{3}s(\ u_2u_3 + u_3u_1 + u_1u_2),$$
$$K_4 = r^2o + \sqrt{3}r(\ x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2), \quad L_4 = s^2o_1 + \sqrt{3}s(\ u_2u_3 - u_3u_1 - u_1u_2),$$
$$K_5 = r^2o + \sqrt{3}r(-x_2x_3 + x_3x_1 - x_1x_2), \quad L_5 = s^2o_1 + \sqrt{3}s(-u_2u_3 + u_3u_1 - u_1u_2),$$
$$K_6 = r^2o + \sqrt{3}r(-x_2x_3 - x_3x_1 + x_1x_2), \quad L_6 = s^2o_1 + \sqrt{3}s(-u_2u_3 - u_3u_1 + u_1u_2).$$

wo

$$o = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad o_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

IV, § 9.

Die Formeln

$$4o = K_3 + K_4 + K_5 + K_6,$$
$$4\sqrt{3}\,x_2x_3 = K_3 + K_4 - K_5 - K_6,$$
$$4\sqrt{3}\,x_3x_1 = K_3 - K_4 + K_5 - K_6,$$
$$4\sqrt{3}\,x_1x_2 = K_3 - K_4 - K_5 + K_6,$$
$$3x_1^2 = o + K_1 + K_2,$$
$$3x_2^2 = o + j^2K_1 + jK_2,$$
$$3x_3^2 = o + jK_1 + j^2K_2$$

zeigen, daß jeder Kegelschnitt ein Aggregat der K_ν ist, während diese selbst durch keine lineare Relation verknüpft sind.

IV, § 10.

Setzt man

$$3u_x^2 = \sum_{\nu=1}^{\nu=6} c_\nu K_\nu,$$

so wird

$$3L_\nu = 3c_\nu,$$

also hat man

$$3u_x^2 = \sum KL,$$
$$0 = \sum K(Lxy)^2$$
$$= \sum (Kuv)^2 L.$$

IV, § 11.

In dem Ausdrucke

$$o^2 - K_1K_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - (x_1^2 + jx_2^2 + j^2x_3^2)(x_1^2 + j_2^2x_2^2 + jx_3^2)$$

erschwinden die Koeffizienten von

$$x_1^4,\ x_2^4,\ x_3^4,$$

ährend die der Produkte

$$x_2^2 x_3^2,\ x_3^2 x_1^2,\ x_1^2 x_2^2$$

en Wert

$$2 - j - j^2 = 3$$

aben.

Mithin ist

$$o^2 - K_1 K_2 = 3(x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2),$$
$$o_1^2 - L_1 L_2 = 3(u_2^2 u_3^2 + u_3^2 u_1^2 + u_1^2 u_2^2).$$

IV, § 12.

In dem Produkte

$$27 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = (o + K_1 + K_2)(o + jK_1 + j^2 K_2)(o + j^2 K_1 + jK_2)$$

erschwinden die Koeffizienten von

$$oK_1^2,\ oK_2^2,\ o^2 K_1,\ o^2 K_2.$$

ie Koeffizienten von

$$o^3,\ K_1^3,\ K_2^3$$

aben den Wert 1 und der Koeffizient von

$$oK_1 K_2$$

en Wert -3; mithin ist

$$27 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = o^3 + K_1^3 + K_2^3 - 3oK_1 K_2.$$

IV, § 13.

$$K_3^3 + K_4^3 + K_5^3 + K_6^3$$
$$= \left(r^3 o + \sqrt{3} r(\ \ x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2)\right)^2 + \left(r^3 o + \sqrt{3} r(\ \ x_2 x_3 - x_3 x_1 - x_1 x_2)\right)^3$$
$$+ \left(r^3 o + \sqrt{3} r(-x_2 x_3 + x_3 x_1 - x_1 x_2)\right)^3 + \left(r^3 o + \sqrt{3} r(-x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2)\right)^3.$$

er Ausdruck ändert sich nicht, wenn die x_1, x_2, x_3 ihre Vorzeichen ndern, ist also viermal so groß wie die Summe der Glieder in

$$K_1^3 = \left(r^3 o + \sqrt{3} r(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2)\right)^3,$$

elche nur gerade Potenzen von den x enthalten, es sind das die Glieder:

$$o^3,\ ox_2^2 x_3^2,\ ox_3^2 x_1^2,\ ox_1^2 x_2^2;\ x_1^2 x_2^2 x_3^2.$$

hat den Koeffizienten r^6; $ox_2^2 x_3^2$, $ox_3^2 x_1^2$, $ox_1^2 x_2^2$ haben den Koeffizienten $9r^4$ und $x_1^2 x_2^2 x_3^2$ den Koeffizienten $18\sqrt{3}\, r^3$.

Mithin ist

$$K_3^3 + K_4^3 + K_5^3 + K_6^3$$

$$= 4r^6o^3 + 36r^4o(x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2) + 72\sqrt{3}\,r^3x_1^2x_2^2x_3^2$$

$$= 4r^6o^3 + 12r^4o(o^2 - K_1K_2) + \frac{8}{\sqrt{3}}\,r^3(o^3 + K_1^2 + K_2^3 - 3oK_1K_2)$$

$$= \left(4r^6 + 12r^4 + \frac{8}{\sqrt{3}}\,r^3\right)o^3 + \frac{8}{\sqrt{3}}\,r^3(K_1^3 + K_2^3) - (12r^4 + 8\sqrt{3}\,r^3)oK_1K_2$$

$$= -\frac{64\sqrt{-5}}{\sqrt{3}}\,r^{10}o^3 - 4\,\frac{8}{\sqrt{3}}\,r^3(K_1^3 + K_2^3) + 4\sqrt{-15}\,r^3oK_1K_2,$$

$$f = K_1^3 + K_2^3 + K_3^3 + K_4^3 + K_5^3 + K_6^3$$

$$= -\frac{64\sqrt{-5}}{\sqrt{3}}\,r^{10}o^3 - 4\,\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{3}}\,s^2(K_1^3 + K_2^3) + 4\sqrt{-15}\,r^3oK_1K_2.$$

V. Kapitel.

Invarianten der sechs Kegelschnitte.

V, § 1.

Den Formeln (I, § 5, 10, 8, 9)

$$(a_x^2)_{y^2}^3 = (a_x^2)^2a_y^2 - \frac{2}{5}\,(aa_1xy)^2,$$

$$(a_x^2)_{y^2z^2}^3 = a_x^2 \cdot a_y^2 \cdot a_z^2 - \frac{1}{5}\,\Sigma_3 a_x^2(aa_1xy)^2 + \frac{2}{45}\,(aa_1a_2)^2(xyz)^2,$$

$$((a_x^2)^2, (a_x^2)^2, u_x^2)^2 = \frac{1}{3}\,(a_x^2)^2(aa_1u)^2 - \frac{2}{27}\,(aa_1a_2)^2a_x^2u_x^2,$$

$$((a_x^2)^3, (b_x^2)^2, u_x^4)^4 = ((abu)^2)^2 - \frac{1}{3}\,(aa_1u)^2(bb_1u)^2,$$

$$((a_x^2)^3, (b_x^2)^3, u_x^6)^6 = ((abu)^2)^3 - \frac{3}{5}\,(aa_1u)^2(abu)^2(bb_1u)^2$$

entsprechen die Formeln

$$(K^3)_{y^2} = K^2K_y^2 - \frac{4}{5}\,K(Lxy)^2,$$

$$(K^3)_{y^2z^2} = KK_{y^2}K_{z^2} - \frac{2}{5}\,\Sigma_3 K(Lyz)^2 + \frac{4}{15}\,(xyz)^2,$$

$$(K^2, K^2, u_x^2)^2 = \frac{2}{3}\,K^2L - \frac{4}{9}\,Ku_x^2,$$

$$(K_m^2, K_n^2, u_x^4)^4 = ((K_mK_nu)^2)^2 - \frac{4}{3}\,L_mL_n,$$

$$(K_m^2, K_n^3, u_x^6)^6 = ((K_mK_nu)^2)^3 - \frac{12}{5}\,L_mL_n(K_mK_nu)^2,$$

$$(K^2, K^2, u_x^4)^4 = 4L^3 - \tfrac{4}{3} L^3 = \tfrac{8}{3} L^3,$$

$$(K^3, K^3, u_x^6)^6 = 8L^3 - \tfrac{24}{5} L^3 = \tfrac{16}{5} L^3.$$

rner ist

$$(Ku\overline{Lx})^2 = KL - 2K_L u_x + K_{L^2} u_x^2 = KL - 2u_x^2 + 3u_x^2$$
$$= KL + u_x^2.$$

V, § 2.

Aus der Formel (IV, § 11)

$$f = a_x^6 = \Sigma K^3$$

lgen diese:

$$f_y = \Sigma K^3 K_y,$$
$$f_{y^2} = \Sigma K^2 K_{y^2} - \tfrac{4}{5} \Sigma K(Lxy)^2$$
$$= \Sigma K^3 K_{y^2}, \qquad \text{(IV, § 10)}$$
$$f_{y^3} = \Sigma K K_y K_{y^2},$$
$$f_{y^2 z^2} = \Sigma K K_{y^2} K_{z^2} - \tfrac{2}{5} \Sigma\Sigma_8 K(Lyz)^2 + \tfrac{4}{15} \Sigma_6 (xyz)^2$$
$$= \Sigma K K_{y^2} K_{z^2} - \tfrac{18}{5} (xyz)^2 + \tfrac{8}{3} (xyz)^2 \qquad \text{(IV, § 10)}$$
$$= \Sigma K K_{yz}^2 K_{x^2} - 2(xyz)^2,$$
$$(\Sigma L^3)_v = \Sigma L^2 L_v; \quad (\Sigma L^3)_{v^2} = \Sigma' L^2 L_{v^2}; \quad (\Sigma L^3)_{v^3} = \Sigma L L_v L_{v^2},$$
$$(\Sigma L^3)_{v^2 w^2} = \Sigma L L_{v^2} L_{w^2} - 2(uvw)^2.$$

V, § 3.

$$(f, L_\varrho)^2 = \sum_{m=1}^{m=6} K_m^2 (K_m, L_\varrho)^2 = K_\varrho^2 (K_\varrho, L_\varrho)^2,$$
$$(f, L)^2 = 3K^2,$$
$$(f, L^2)^3 = 3(K^2, L) = 3Ku_x,$$
$$(f, L^2)^4 = 3(K^2, L)^2 = 3KK_{L^2} - 2(LLx)^2 = 9K - 4K$$
$$= 5K,$$
$$(f, L^3)^5 = 5(K, L) = 5u_x,$$
$$(f, L^3)^6 = 5(K, L)^2 = 15.$$

V, § 4.

$$a_x^4(aK_\varrho, L_\varrho x)^2 = \sum_{m=1}^{m=6} K_m^2(K_m K_\varrho\, L_\varrho x)^2$$

$$= \sum_{m=1}^{m=6} K_m^2((K_\varrho, L_\varrho)^2 K_m + (K_m, L_\varrho)^2 K_\varrho - 2K_{\varrho, L_\varrho} K_{m, L_\varrho} K_{\varrho, x} K_{m, x})$$

$$= 3\sum_{m=1}^{m=6} K_m^3 + 3K_\varrho^3 - 2\sum_{m=1}^{m=6} K_m^3,$$

$$a_x^4(aKLx)^2 = f + 3K^3,$$

$$a_x^2 a_L^2 a_x K_x (aKu) = ((fL)^2, K) = 3(K^2, K) = 0.$$

V, § 5.

$$a_x^2 a_L^2 (aKu)^2 = 3(K^2, K, u_x^2)^2$$

$$= 3\left(KK_{y^2} - \tfrac{2}{3}(Lxy)^2, K_{y^2}, u_y^2\right)^2$$

$$= 3K(KKu)^2 - 2(Ku\,Lx)^2$$

$$= 6KL - 2(KL + u_x^2)$$

$$= 4KL - 2u_x^2,$$

$$(a_x^4 a_L^2, K^2, u_x^3)^3 = 3(K^2, K^2, u_x^3)^3 = 0,$$

(V, § 1) $$(a_x^4 a_L^2, K^2, u_x^4)^4 = 3(K^2, K^2, u_x^4)^4 = 8L^2.$$

V, § 6.

Aus der Formel (I, § 6)

$$(\alpha^3)_{v^2 w} = \alpha v_\alpha^2 w_\alpha^2 - \tfrac{4}{15}\Delta_3 a_x^4 (avw)^2 + \tfrac{8}{135}\Delta^2 (uvw)^2$$

folgt diese:

$$\left(K_{y^2}((Lyx)^2, \alpha^2\right)^6$$

$$= K_\alpha^2((L\alpha x)^2)^2 - \tfrac{8}{15}\Delta(L\alpha x)^2 a_x^2 (aK\,Lx)^2 - \tfrac{4}{15}\Delta K_\alpha^2 a_x^4 (a\,\overline{Lx}\,\overline{Lx})^2$$

$$+ \tfrac{8}{135}\Delta^2 (K\,Lx\,\overline{Lx})^2 = \begin{cases} K_\alpha^2((La x)^2)^2 - \tfrac{8}{15}\Delta(L\alpha x)^2 (f + 3K^3) \\ -\tfrac{8}{15}\Delta K_\alpha^2 fK + \tfrac{16}{135}\Delta^3 K^2. \end{cases}$$

V, § 7.

$$a_\alpha^2 \Sigma K^2 (a_x^1, L^2)^3 = 3\Sigma K^2 (Ku_x, \alpha)^2$$

$$= \Sigma K^2 (2K_\alpha u_\alpha + K_\alpha^2 u_x) = 2f_\alpha + \Delta u_x$$

$$= \tfrac{5}{3}\Delta u_x.$$

VI. Kapitel.

Werte der K für einzelne Punkte.

VI, § 1.

Unsere Formeln gelten für alle Werte der Variabeln x_1, x_2, x_3. Als Beispiele wählen wir spezielle Werte (Punkte).

Im ersten Punkte sei: $x_1 = 0;\ \lambda x_2 = 1;\ \lambda x_3 = i;\ \lambda^2 = i\sqrt{3}r$,

„ zweiten „ „ : $\lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda x_3 = 1;\qquad \lambda^2 = 8\sqrt{3}r^5.$

Wir wollen zeigen, daß im ersten Punkte

$$f = 0;\ \Sigma K^6 + 6\sqrt{-5}\,rU = 0;\ K_1^5 + \sqrt{-5}\,r\frac{U}{K_1} = \frac{2r^3}{5\sqrt{3}}(L_1\alpha x)^2,$$

$$\Sigma K^4(Lxy)^2 = \frac{2s^2}{\sqrt{-15}}(\alpha xy)^2,$$

und im zweiten Punkte:

$$U = 0;\quad \Sigma K^6 = \frac{r^2+4}{15}f^2$$

ist. Hierbei bedeutet U das Produkt

$$U = \prod_{n=1}^{n=6} K_n.$$

VI, § 2.

Die K_n im ersten Punkte:

$$K_1 = 2s;\quad K_2 = -2s;\quad K_3 = K_4 = 1;\quad K_5 = K_6 = -1.$$

Rechnung.

$$K_1 + K_2 = -x_2^2 - x_3^2 = 0;\quad o = 0;\quad K_3 + K_4 + K_5 + K_6 = 0,$$

$$K_3 - K_4 = K_5 - K_6 = 0,$$

da sie den Faktor x_1 haben; ferner

$$i^2(K_1 - K_2) = \sqrt{3}r(K_1 - K_2) = (j - j^2)(x_2^2 - x_3^2) = 2i\sqrt{3};\quad K_1 - K_2 = 4s;$$

$$i^2(K_3 + K_4) = i\sqrt{3}r(K_3 + K_4) = 2\sqrt{3}rx_2x_3 = 2i\sqrt{3}r;\qquad K_3 + K_4 = 2.$$

VI, § 3.

Weitere Formen im ersten Punkt:

$$f = 0;\quad U = -4s^2;\quad \Sigma K^6 = 12\sqrt{-5}s;\quad f_y = -\sqrt{-15}(x_2y_2 + x_3y_3);$$

$$(L_1\alpha x)^2 = -60s,$$

$$\lambda^2(\alpha xy)^2 = 30(y_2 + iy_3)^2;\quad \lambda^2\Sigma K^4(Lxy)^2 = 4\sqrt{-15}s^2(y_3 - iy_2)^2.$$

Rechnungen.

$$\Sigma K^6 = 128 s^6 + 4,$$

$$f_y = 4s^2(K_1 + K_2)_y + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=6} K_{\lambda,y} = (-4s^3 + 4r^3)(x_2 y_2 + x_3 y_3),$$

$$f_1 = 0; \quad f_2 = -\sqrt{-15}\, x_2; \quad f_3 = -\sqrt{-15}\, x_3,$$

$$f L_1^2 = f_1^2 + j^2 f_2^2 + j f_3^2 = -15 K_1 = 30 s; \quad (L_1 \alpha x)^2 = 2 f_{L_1} f - 2 f L_1^2,$$

$$(\alpha x y)^2 = 2 f_y f - 2 f_y^2 = 30 (x_2 y_2 + x_3 y_3)^2,$$

$$\Sigma K^4 (L x y)^2 = 16 s^4 ((L_1 x y)^2 + (L_2 x y)^2) + \sum_{\kappa=3}^{\kappa=6} (L_\kappa x y)^2$$

$$= \begin{cases} 16 s^4 (2 (x y)_1^2 - (x y)_2^2 - (x y)_3^2) \\ + 4 s ((x y)_1^2 + (x y)_2^2 + (x y)_3^2), \\ (x y)_2^2 + (x y)_3^2 = - y_1^2 + y_1^2 = 0. \end{cases}$$

Folgerung.

$$\Sigma K^6 + 6\sqrt{-5}\, r U = 0.$$

VI, § 4.

Die K im zweiten Punkte:

$$K_1 = K_2 = 0; \quad K_3 = \sqrt{3}\, s; \quad K_4 = K_5 = K_6 = 1.$$

Rechnungen.

$$K_4 = K_5 = K_6.$$

$$\lambda^2 o = 3 r^2,$$

$$\lambda^2 K_3 = 8\sqrt{3} r^5 K_3 = 3 r^2 + 3\sqrt{3} r = 12 r^4,$$

$$\lambda^2 K_4 = 8\sqrt{3} r^5 K_4 = 3 r^2 - \sqrt{3} r = 8\sqrt{3} r^5.$$

VI, § 5.

Weitere Formen im zweiten Punkt:

$$U = 0; \quad f = -12\sqrt{3} s^5; \quad \Sigma K^6 = -48 (r^2 + 4) s^{10}.$$

Rechnungen.

$$f = 3\sqrt{3} s^3 + 3,$$

$$\Sigma K^6 = 27 s^6 + 3.$$

VII. Kapitel.

ı den Substitutionen Σ und T und den zugehörigen Invarianten.*)

VII, § 1.

Es gibt eine Gruppe von linearen Substitutionen Σ der x_1, x_2, x_3, ;he die K_n^s teils nicht ändern, teils ineinander überführen. Ihnen ent-chen Substitutionen Σ der $j^r K_n$. Unter diesen Σ gibt es wieder eine ergruppe von Substitutionen T, welche K_1^s nicht ändern.

Von den Kollineationen Σ erwähnen wir:

$$x_1 = isy_2 - isy_3; \qquad y_1 = -isx_2 + isx_3,$$

$$x_2 = iry_1 + \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3; \qquad y_2 = -irx_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3,$$

$$x_3 = -iry_1 + \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{2}y_3; \qquad y_3 = irx_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3,$$

$$x_1 = -y_1; \quad x_2 = y_2; \quad x_3 = y_3,$$

$$x_1 = y_1; \quad x_2 = -y_2; \quad x_3 = y_3,$$

$$x_1 = y_1; \quad x_2 = y_2; \quad x_3 = -y_3,$$

$$x_1 = y_2; \quad x_2 = y_3; \quad x_3 = y_1,$$

$$x_1 = y_1; \quad x_2 = y_3; \quad x_3 = y_2,$$

$$x_1 = jy_1; \quad x_2 = jy_2; \quad x_3 = jy_3.$$

en entsprechen die Substitutionen der K:

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{2a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{2b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{2c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ j^2 1 & j 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ j^2 1 & j^2 2 & j^2 3 & j^2 4 & j^2 5 & j^2 6 \end{pmatrix}.$$

*) Vergl. die in der Einleitung zitierte Arbeit von Herrn Wiman.

Von den Substitutionen T erwähnen wir:

$$T_{1,a} = \Sigma_{2,a}; \quad T_{1,b} = \Sigma_{2,b}; \quad T_{1,c} = \Sigma_{2,c},$$

$$T_2 = \Sigma_5,$$

$$T_{3,a} = \Sigma_1 \Sigma_3 \Sigma_{2a} \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & j^2 4 & j3 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$T_{3,b} = \Sigma_{2a} T_{3a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & j^2 3 & j4 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

$$T_{3,c} = \Sigma_{2b} T_{3a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & j^2 6 & j5 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$T_{3,d} = \Sigma_{2c} T_{3a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & j^2 5 & j6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

VII, § 2.

Die Substitutionen Σ und T bilden transitive Gruppen; die Σ führen die

$$K_1^3, \; K_2^3, \; K_3^3, \; K_4^3, \; K_5^3, \; K_6^3$$

ineinander über, und die T führen die

$$K_2^3, \; K_3^3, \; K_4^3, \; K_5^3, \; K_6^3$$

ineinander über.

Die $T_{1,\nu}$ ändern das Vorzeichen eines x und lassen die anderen beiden unverändert.

T_2 führt die x_ν in jx_ν über.

VII, § 3.

Das Entsprechen der zweiten bis letzten Kollineationen mit den Substitutionen Σ leuchtet unmittelbar ein, jedoch wollen wir den Beweis erbringen, daß die erste Kollineation die Substitutionen Σ_1 hervorbringt. Zu dem Ende bezeichnen wir die K_{n,y^2} durch $\overline{K}_n$ und wollen die Formeln beweisen:

$$K_1 = \overline{K}_4; \; K_2 = \overline{K}_3; \; K_3 = \overline{K}_1; \; K_4 = \overline{K}_2; \; K_5 = \overline{K}_3; \; K_6 = \overline{K}_5.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^3 \\ &= -2s^2(y_2 - y_3)^2 + 2r^2 y_1^2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)^2 \\ &= \overline{K}_3 + \overline{K}_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_1 + \overline{K}_2 &= 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 \\ &= -2s^2(x_2 - x_3)^2 + 2r^2 x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 \\ &= K_3 + K_4, \end{aligned}$$

$$K_5 + K_6 = 2r^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - 2\sqrt{3}rx_2x_3$$
$$= -\tfrac{1}{2}(y_2-y_3)^2 + 2r^2\left(-r^2y_1^2+\tfrac{1}{4}(y_2+y_3)^2\right) - 2\sqrt{3}r\left(r^2y_1^2+\tfrac{1}{4}(y_2+y_3)^2\right)$$
$$= \overline{K}_5 + \overline{K}_6,$$
$$K_1 - K_2 = i\sqrt{3}\,(x_2^2-x_3^2) = -2\sqrt{3}ry_1(y_2+y_3) = \overline{K}_4 - \overline{K}_3,$$
$$\overline{K}_1 - \overline{K}_2 = i\sqrt{3}\,(y_2^2-y_3^2) = 2\sqrt{3}rx_1(x_2+x_3) = K_3 - K_4,$$
$$K_5 - K_6 = 2\sqrt{3}rx_1(x_3-x_2) = 2\sqrt{3}ry_1(y_2-y_3) = \overline{K}_6 - \overline{K}_5.$$

VII, § 4.

Diejenigen Formen in den x, welche sich bei obigen Kollineationen nicht ändern, bezeichnen wir mit Φ. Solche Φ sind u. a. die Formen

$$f = \Sigma K^3; \quad U = \Pi K,$$

die Koeffizienten p_ν der Gleichung

$$F(x) = x^6 + p_1x^5 + p_2x^4 + p_3x^3 + p_4x^2 + p_5x + p_6 = \prod_{\nu=1}^{\nu=6}(x - K_\nu^3)$$

und die Invarianten und Kovarianten etc. von f.

VII, § 5.

Die Φ enthalten infolge der Substitutionen Σ_2 nur gerade Potenzen der x, sie hängen rational von

$$x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2$$

resp. von

$$o,\ K_1,\ K_2$$

ab. Infolge der Σ_5 ist ihr Grad durch 3 teilbar. Wir bezeichnen ihn durch $6n$.

Die Φ, welche K_1 zum Faktor haben, sind auch durch $K_2, \cdots, K_6$, also auch durch U teilbar.

VII, § 6.

Die Formen in den x, welche sich bei den Substitutionen T nicht ändern, bezeichnen wir mit P, und die P, deren Grad < 30 ist, mit Q. Die Formen

$$K_1^3 \text{ und } \Phi$$

sind spezielle P. Die Grade der P sind durch 6 teilbar; die Q haben die Grade

$$0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24.$$

Die P sind als ganze Funktionen von

$$o,\ K_1,\ K_2$$

ausdrückbar.

Die P, welche den Faktor K_2 haben, sind durch K_3, K_4, K_5, K_6 teilbar und die P, welche den Faktor K_1K_2 haben, durch U.

VIII. Kapitel.

Die Fundamentalformen unter den Φ und P.*)

VIII, § 1.

Die einfachsten Φ sind

$$f,\ U$$

und die einfachsten P

$$K_1^3,\ f,\ U.$$

Wir wollen den Satz beweisen:

Alle P sind ganze Funktionen (P) von

$$K_1^3,\ f,\ U,\ p_5,$$

mithin alle Q ganze Funktionen (Q) von

$$K_1^3,\ f,\ U$$

und alle Φ ganze Funktionen von

$$f,\ U,\ p_5.$$

Als Beispiele entwickeln wir die Formeln:

$$\Sigma K^6 = \frac{r^3+4}{15} f^2 - 6\sqrt{-5}\, rU, \tag{1}$$

$$K_{a^2} = 6\sqrt{-15}\, r^3 K^4 + 8\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}\, r^4 fK, \tag{2}$$

$$\frac{2r^3}{5\sqrt{3}} K(L\alpha x)^2 = K^6 - \frac{r^3+4}{15} fK^3 + \sqrt{-5}\, rU. \tag{3}$$

VIII, § 2.

Die P sind ganze Funktionen von

$$K_1,\ K_2,\ o,$$

also infolge der T ganze Funktionen von

$$K_1^3,\ K_2^3,\ o^3,\ K_1K_2o.$$

Wir wollen sie mittels der Formel (IV, § 13)

$$f = -64\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{3}} r^{10}o^3 - 4\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{3}} s^2(K_1^3+K_2^3) + 4\sqrt{-15}\, r^3 oK_1K_2$$

---

*) Vergl., was die Φ angeht, die Arbeit von Hrn. Wiman. Da der einzelne Kegelschnitt K durch 60 Kollineationen in sich verwandelt wird, die eine Ikosaedergruppe bilden, so sind die P ternäre Ikosaederformen. Es ergibt sich daher ein naher Zusammenhang mit den auf diese Formen bezüglichen Untersuchungen, wie sie Hr. Klein früher gegeben hat; vergl. beispielsweise seine „Vorlesungen über das Ikosaeder" II, 4 [das Problem der A].

so reduzieren, daß sie ganze Funktionen von

$$f,\ K_1^3,\ K_2^3,\ K_1 K_2 o$$

werden, und daß in dem Ausdruck o höchstens in der 2^{ten} Potenz auftritt.

Die Glieder in Q, welche nicht durch K_1 teilbar sind, lauten

$$K_2^{3n},\ fK_2^{3n-3},\ f^2K_2^{3n-6},\ \cdots,\ K_2 f^{n-1},\ f^n$$

wo $n \leqq 4$ ist, Q hat daher die Form

$$Q = K_1 Q_2 + c_0 f^n + c_1 f^{n-1} K_2^3 + \cdots + c_n K_2^{3n}. \tag{4}$$

VIII, § 3.

Wir behaupten

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Indirekter Beweis.

Wir nehmen an, daß

$$Q - c_0 f^n$$

nicht durch K_1 teilbar ist, daß also mindestens einer der Koeffizienten

$$c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n$$

nicht verschwindet, und leiten aus dem Ausdruck für Q mittels der T noch 4 andere Relationen ab

$$Q = K_1 Q_\varrho + c_0 f^n + c_1 K_\varrho^3 f^{n-1} + \cdots + c_n K_\varrho^n, \tag{4a}$$

wo ϱ die Ziffern 3, 4, 5, 6 durchläuft. Eliminiert man aus n dieser neuen Formeln und der ursprünglichen die Koeffizienten

$$c_1 f^{n-1},\ c_2 f^{n-2},\ \cdots,\ c_n,$$

so entsteht die Relation

$$K_1 \begin{vmatrix} Q_2 & K_2^3 & \cdots & K_2^{3n} \\ Q_3 & K_3^3 & \cdots & K_3^{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n-2} & K_{n-2}^3 & \cdots & K_{n-2}^{3n} \end{vmatrix} = (Q - c_0 f^n) \begin{vmatrix} 1 & K_2^3 & \cdots & K_2^{3n} \\ 1 & \cdot & & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & K_{n-2}^3 & \cdots & K_{n-2}^{3n} \end{vmatrix}$$

$$= (Q - c_0 f^n)\, \Pi(K_\lambda^3 - K_\mu^3).$$

Sie kann nicht bestehen, da keiner der Faktoren rechter Hand durch K_1 teilbar ist.

VIII, § 4.

Da in Q die Glieder

$$f^{n-1} K_2^3,\ f^{n-2} K_2^6,\ \cdots,\ K_2^{3n}$$

nicht vorkommen, so kommen darin nur zweierlei Glieder vor:

1) Produkte $f^\lambda K_1^{3\mu}$,

2) Produkte, welche den Faktor $K_1 K_2$ haben.

Wir bezeichnen das Aggregat der ersten mit $Q^{(1)}$ und das der letzteren mit $K_1 K_2 Q^{(2)}$ und erhalten

$$Q = Q^{(1)} + K_1 K_2 Q^{(2)}. \tag{5}$$

Sowohl $Q^{(1)}$ als auch $K_1 K_2 Q^{(2)}$ sind Formen Q; das letztere Produkt hat den Faktor U (VII, § 6), so daß die letzte Formel in

$$Q = Q^{(1)} + U Q_1^{(1)}$$

übergeht. $Q_1^{(1)}$ hat den Grad $6(n-2)^2 - 12$. Man findet durch die gleiche Behandlung dafür eine Formel:

$$Q_1^{(1)} = Q_2^{(1)} + cU$$

wo $Q_2^{(1)}$ ein (Q) und c eine numerische Konstante ist.

Durch Eintragung erhalten wir

$$Q = Q^{(1)} + Q_2^{(1)} U + cU^2,$$

also eine ganze Funktion von

$$f,\ K_1^3,\ U.$$

VIII, § 5.

Die P, deren Grad > 24 ist, lassen sich ebenfalls in der Form

$$P = K_1 P_2 + c_0 f^n + c_1 K_2^3 f^{n-1} + \cdots + c_n K_2^{3n}$$

schreiben, nur daß $n > 4$ ist. Um sie in diese Form zu bringen, reduziert man sie mittels der Formel

$$\left(\frac{F(x) - F(K_1^3)}{x - K_1^3}\right)_{x = K_2^3} = 0.$$

Die weitere Behandlung ist die gleiche, wie die der Q.

VIII, § 6.

Nach diesem Satze sind die Φ ganze Funktionen von

$$f,\ U,\ p_5,$$

u. a. ist

p_2 ein Aggregat von f^2 und U,
p_3 ein Aggregat von f^3 und fU,
p_4 ein Aggregat von f^4, $f^2 U$ und U^2.

Wir gehen dazu über, die Formeln (1), (2), (3) zu beweisen.

VIII, § 7.

ΣK^6 ist vom Grade 12, also ein Aggregat von f^2 und U

$$\Sigma K^6 + c_1 U + c_2 f^2 = 0.$$

In den beiden speziellen Punkten von VI, § 1 hat man

$$\Sigma K^6 + 6\sqrt{-5}\,rU = 0; \quad f = 0,$$

$$\Sigma K^6 - \frac{r^2+4}{15} f^2 = 0; \quad U = 0.$$

ithin ist

$$c_1 = 6\sqrt{-5}\,r; \quad c_2 = -\frac{r^2-4}{15},$$

$$\Sigma K^6 + 6\sqrt{-5}\,rU - \frac{r^2+4}{15} f^2 = 0.$$

VIII, § 8.

Das Produkt $K^2 K_{\alpha^2}$ ist ein P vom Grade 12, also ein Aggregat von

$$K^6,\ fK^3,\ f^2,\ U,$$

$$K^6 + c_1 K^2 K_{\alpha^2} + c_2 K^3 f + c_3 f^2 + c_4 U = 0,$$

ist nicht durch K und U^2 nicht durch K^2 teilbar, mithin ist

$$c_3 = c_4 = 0,$$

$$K^4 + c_1 K_{\alpha^2} + c_2 Kf = 0,$$

$$\Sigma K^4 (Lxy)^2 + 3c_1 (\alpha xy)^2 = 0 \qquad \text{(IV, § 9).}$$

n ersten Punkte (VI, § 1) ist

$$\Sigma K^4 (Lxy)^2 - \frac{2s^2}{\sqrt{-15}} (\alpha xy)^2 = 0,$$

so

$$c_1 = -\frac{2s^2}{3\sqrt{-15}},$$

$$K^4 - \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}} K_{\alpha^2} + c_2 Kf = 0,$$

a) $$\Sigma K^4 L - \frac{2s^2}{\sqrt{-15}} \alpha + 3c_2 f u_x^2 = 0.$$

VIII, § 9.

Um c_2 zu berechnen, wenden wir den Ω-Prozeß auf die Formel (5a) ı und erhalten die Formeln

$$16 f u_x + 60 c_2 f u_x = 0, \qquad \text{(I, § 1)}$$

$$c_2 = -\frac{4}{15},$$

) $$K^4 - \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}} K_{\alpha^2} - \frac{4}{15} Kf = 0,$$

) $$\Sigma K^4 L - \frac{2s^2}{\sqrt{-15}} \alpha - \frac{4}{5} f u_x^2 = 0,$$

a) $$K_{\alpha^2} = 6\sqrt{-15}\,r^2 K^4 + \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} r^2 Kf,$$

a) $$\alpha = 2\sqrt{-15}\,r^2 \Sigma K^4 L + \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} r^2 f u_x^2.$$

VIII, § 10.

$$\Sigma K^4(L\alpha x)^2 = \frac{8s^2}{3\sqrt{-15}} f\Delta,$$

$$\Sigma K^6 = \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}}\Delta + \frac{4}{15}f^2,$$

$$\Delta = 6\sqrt{-15}\, r^2 \Sigma K^6 + \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} r^2 f^2,$$

$$6\sqrt{-5}\, rU = \frac{r^2}{15} f^2 - \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}}\Delta.$$

VIII, § 11.

Das Produkt

$$K(L\alpha x)^2$$

ist ein P vom Grade 12, also ein Aggregat von

$$K^6,\ K^3 f,\ U,\ f^2,$$

$$K^6 + c_1 K(L\alpha x)^2 + c_2 f K^3 + c_3 U + c_4 f^2 = 0$$

f^2 hat nicht den Faktor K; es ist

$$c_4 = 0,$$

$$K^6 + c_1 K(L\alpha x)^2 + c_2 f K^3 + c_3 U = 0,$$

$$\Sigma K^6 + c_2 f^2 + 6 c_3 U = 0,$$

also nach (1)

$$c_2 = -\frac{r^2+4}{15};\quad c_3 = \sqrt{-5}\, r,$$

$$K^6 + c_1 K(L\alpha x)^2 - \frac{r^2+4}{15} f K^3 + \sqrt{-5}\, rU = 0.$$

Im ersten Punkte (VI, § 1) ist

$$K^6 - \frac{2r^3}{5\sqrt{3}} K(L\alpha x)^2 + \sqrt{-5}\, rU = 0;\quad f = 0,$$

mithin ist

$$c_1 = -\frac{2r^3}{5\sqrt{3}},$$

$$K_1^6 = \frac{2r^3}{5\sqrt{3}} K(L\alpha x)^2 + \frac{r^2+4}{15} K^3 f - \sqrt{-5}\, rU$$

$$= \frac{2r^3}{5\sqrt{3}} K(L\alpha x)^2 + \frac{r^2+4}{15} K^3 f - \frac{r^2}{90} f^2 + \frac{s^2}{9\sqrt{-15}}\Delta.$$

VIII, § 12.

$$\Sigma K^9 = \frac{2r^3}{5\sqrt{3}}\Sigma K^4(L\alpha x)^2 + \frac{r^3+4}{15} f\Sigma K^6 - \sqrt{-5}\, rfU,$$

$$\Sigma K^{12} = \Sigma\left(\frac{2r^3}{5\sqrt{3}} K(L\alpha x)^2 + \frac{r^3+4}{15} K^3 f - \sqrt{-5}\, rU\right)^2,$$

$$\Sigma K^{15} = \Sigma K^3\left(\frac{2r^3}{5\sqrt{3}} K(L\alpha x)^2 + \frac{r^3+4}{15} Kf - \sqrt{-5}\, rU\right)^2.$$

IX. Kapitel.

ymbole g und h für die mit den K und L verknüpften dritten Einheitswurzeln.

IX, § 1.

Nach IV, § 1 bestehen die Formeln

$$(K_n K_n K_n)^2 = 6,$$
$$(K_m K_m K_n)^2 = 0 \quad \text{für} \quad m \gtrless n.$$

ir bestimmen nunmehr im folgenden die Werte der

$$(K_m K_n K_p)^2$$

dem Falle, wo m, n, p verschiedene Zahlen bedeuten. Es sind dies:

$$(K_1 K_2 K_m)^2 = (K_3 K_4 K_m)^2 = (K_5 K_6 K_m)^2 = -3r^2, \qquad \text{(IV, § 3)}$$
$$(K_1 K_3 K_5)^2 = (K_2 K_3 K_6)^2 = (K_1 K_4 K_6)^2 = (K_2 K_4 K_5)^2 = -3jr^2,$$
$$(K_2 K_3 K_5)^2 = (K_1 K_3 K_6)^2 = (K_2 K_4 K_6)^2 = (K_1 K_4 K_5)^2 = -3j^2 r^2.$$

e Größen

$$(K_m K_n K_p)^2 \quad \text{und} \quad (L_m L_n L_p)^2$$

ıd einander konjugiert. Führt man nun die symbolische Bezeichnung ein:

$$(K_\lambda K_\mu K_\nu)^2 = -3r^2 h_\lambda h_\mu h_\nu; \quad (L_\lambda L_\mu L_\nu)^2 = -3s^2 g_\lambda g_\mu g_\nu,$$

werden diese Formeln:

$$h_m^3 = -8s^2; \quad h_m^2 h_n = 0 \quad \text{für} \quad m \gtrless n,$$

ıd wenn m, n, p verschiedene Zahlen sind,

$$h_1 h_2 h_n = h_3 h_4 h_n = h_5 h_6 h_n = 1,$$
$$h_1 h_3 h_5 = h_1 h_4 h_6 = h_2 h_3 h_6 = h_2 h_4 h_5 = j,$$
$$h_2 h_3 h_5 = h_2 h_4 h_6 = h_1 h_3 h_6 = h_1 h_4 h_5 = j^2.$$

e Einführung dieser Symbole g, h ist für die Durchführung der folgen- n Rechnungen außerordentlich wesentlich.

Die $g_m g_n g_p$ sind den $h_m h_n h_p$ konjugiert; sind m, n, p verschiedene Zahlen, so ist

$$(h_m h_n h_p)^2 = g_m g_n g_p.$$

Die Symbole g_n und die Formen L_n und K_n^2 sind einander kogredient und den Symbolen h_n und den Formen K_n, L_n^2 kontragredient. Aus den Symbolen $g_m g_n g_p$ kann man eine Form g_x^3 und ihre Differentialquotienten zusammensetzen.

Es ist:

$$g_x^3 g_1 = \begin{cases} -8r^2 \sum_{n=1}^{n=6} x_n^3 + 6(x_3x_4x_5 + x_3x_4x_6 + x_3x_5x_6 + x_4x_3x_6) + 6x_1x_2 \sum_{n=3}^{n=6} x_n \\ + 6x_1(x_3x_4 + x_5x_6 + j^2(x_3x_5 + x_4x_6) + j(x_3x_6 + x_4x_5)) \\ + 6x_2(x_3x_4 + x_5x_6 + j(x_3x_5 + x_4x_6) + j^2(x_3x_6 + x_4x_5)), \end{cases}$$

$$g_x^2 g_1 = -8r^2x_1^2 + 2x_2(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + 2(x_3x_4 + x_5x_6 + j^2(x_3x_5 + x_4x_6) + j(x_3x_6 + x_4x_5))$$

$$g_x^2 g_2 = -8r^2x_2^2 + 2x_1(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + 2(x_3x_4 + x_5x_6 + j(x_3x_5 + x_4x_6) + j^2(x_3x_6 + x_4x_5)),$$

$$g_x^2 g_3 = -8r^2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2(x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6) + 2x_1(x_4 + j^2x_5 + jx_6) + 2x_2(x_4 + jx_5 + j^2x_6),$$

$$g_x^2 g_4 = -8r^2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2(x_3x_5 + x_3x_6 + x_5x_6) + 2x_1(x_3 + j^2x_6 + jx_5) + 2x_2(x_3 + jx_6 + j^2x_5),$$

$$g_x^2 g_5 = -8r^2x_5^2 + 2x_1x_2 + 2(x_3x_4 + x_3x_6 + x_4x_6) + 2x_1(x_6 + j^2x_3 + jx_4) + 2x_2(x_6 + jx_3 + j^2x_4),$$

$$g_x^2 g_6 = -8r^2x_6^2 + 2x_1x_2 + 2(x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5) + 2x_1(x_5 + j^2x_4 + jx_3) + 2x_2(x_5 + jx_4 + j^2x_3),$$

$$g_x g_1^2 = -8r^2x_1; \quad g_x g_1 g_2 = x_3 + x_4 + x_5 + x_6,$$

$$g_x^2 \sum_{n=3}^{n=6} g_n = -8r^2 \sum_{n=3}^{n=6} x_n^2 + 8x_1x_2 + 4(x_3x_4 + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6).$$

Von den Relationen zwischen den

$$g_m g_n g_p \quad \text{und} \quad h_m h_n h_p$$

erwähnen wir

(1) $\quad g_h g_m g_n h_x^2 = 2(h_m h_n h_x)^2 + 8r^2 g_m g_n g_x^2 + 8x_m x_n \quad$ für $\quad m \gtrless n,$

(2) $\quad g_h^2 g_x h_y = 36 \sum_{n=1}^{n=6} x_n y_n.$

IX, § 2.

Um die Formel (1) zu beweisen, gehen wir von der Formel

$$(K_1 K_2 u)^2 = -r^2(L_3 + L_4 + L_5 + L_6) = -o_1$$

ıs und wenden darauf in passender Wahl die Substitionen Σ_1, Σ_{2a}, Σ_{2b}, Σ_3 ı. So erhalten wir

$$\begin{aligned}
(K_3 K_4 u)^2 &= -r^2(\ L_1 + \ L_2 + L_5 + L_6),\\
(K_5 K_6 u)^2 &= -r^2(\ L_1 + \ L_2 + L_3 + L_4),\\
(K_3 K_5 u)^2 &= -r^2(j\ L_1 + j^2 L_2 + L_4 + L_6),\\
(K_3 K_6 u)^2 &= -r^2(j^2 L_1 + j\ L_2 + L_4 + L_5),\\
(K_4 K_5 u)^2 &= -r^2(j^2 L_1 + j\ L_2 + L_3 + L_6),\\
(K_4 K_6 u)^2 &= -r^2(j\ L_1 + j^2 L_2 + L_3 + L_5).
\end{aligned}$$

IX, § 3.

Beweis der Formel (2):

$$\begin{aligned}
&= h_x^2 \sum_{n=3}^{n=6} h_n = -8s^2 \sum_{n=3}^{n=6} x_n^2 - 2\sum_{n=3}^{n=6} x_n^2 + 2\left(\sum_{n=3}^{n=6} x_n\right)^2\\
&= 8r^2 g_1 g_2 g_x + 8x_1 x_2 + 2(h_1 h_2 h_x)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h_1\left(-8r^2 h_1^{\,2} + 2h_2 \sum_{n=3}^{n=6} h_n + 2(h_3 h_4 + h_5 h_6) + j^2(h_3 h_5 + h_4 h_6) + j(h_3 h_6 + h_4 h_5)\right)\\
&= 16 + 8 + 4 \cdot 3 = 36,
\end{aligned}$$

$$= h_2\left(-8r^2 h_1^{\,2} + 2h_2 \sum_{n=3}^{n=6} h_n + 2(h_3 h_4 + h_5 h_6) + j^2(h_3 h_5 + h_4 h_6) + j(h_3 h_6 + h_4 h_5)\right) = 0.$$

X. Kapitel.

Werte der Φ in den K, L.

X, § 1.

Die Formel

$$\alpha = 2\sqrt{-15}\, r^2 \Sigma K^4 L + \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}\, r^2 f u_x^2 \qquad \text{(VIII, § 9)}$$

ırt uns

$$\alpha = (ffu)^2$$

rch die K, L ausdrücken. Wir wollen nunmehr auch für

$$(ffu)^4 \quad \text{und} \quad (ffu)^6$$

analoge Formeln entwickeln. Wir erhalten

$$a_x^2 a_{1,x}^2 (aa_1u)^4 = -\frac{10}{3} c^3 \Sigma K^2 L^3 + \frac{20}{3} c^3 u_x^4,$$

$$(aa_1u)^6 = -\frac{100}{9} c^3 \Sigma L^3$$

und hieraus

$$a_x^2 a_{1,x}^2 (aa_1u)(aa_1v)^3 = -\frac{10}{3} c^3 \Sigma K^2 L_v L_v^2 + \frac{20}{3} c^3 u_x v_x^3,$$

(IV, § 3) $$a_x^2 a_{1,x}^2 (aa_1u)^2(aa_1v)^2 = -\frac{10}{3} c^3 \Sigma K^2 L L_v^2 + \frac{20}{9} c_x^3 a_x^4 (auv)^2 + \frac{20}{3} c^3 u_x^2 v_x^2,$$

$$(aa_1u)^3(aa_1v)^3 = -\frac{100}{9} c^3 \Sigma L L_v L_v^2,$$

$$(aa_1u)^4(aa_1v)^2 = -\frac{100}{9} c^3 \Sigma L^2 L_v^2,$$

(V, § 1) $$(aa_1u)^2(aa_1v)^2(aa_1w)^2 = \frac{100}{9} c^3 \Sigma L L_v^2 L_w^2 - \frac{200}{9} c^3 (uvw)^2,$$

$$\Sigma K^2 L^2 = -\frac{3}{10} c_1^2 a_x^2 a_{1,x}^2 (aa_1u)^4 + 2u_x^4,$$

$$\Sigma K^2 L L_v^2 = -\frac{3}{10} c_1^2 a_x^2 a_{1,x}^2 (aa_1u)^2(aa_1v)^2 + \frac{2}{3} a_x^4 (auv)^2 + 2u_x^2 v_x^2,$$

$$\Sigma L^3 = -\frac{9}{100} c_1^3 (aa_1u)^6,$$

$$\Sigma L L_v^2 L_w^2 = -\frac{9}{100} c_1^3 (aa_1u)^2(aa_1v)^2(aa_1w)^2 + 2(uvw)^2,$$

$$\Sigma K K_y^2 ((Lyx)^2)^2 = -\frac{3}{10} c_1^2 (a_x^2 a_{1,x}^2)_{y^2} (aa_1yx)^4 - \frac{3}{50} c_1^3 (aa_1\overline{yx})^6,$$

$$(aa_1a_2)^4 a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^2 = -10c^2 f,$$

$$(aa_1a_2)^3 (aa_1f) a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^3 = -\frac{10}{3} c^2 f^2,$$

$$(aa_1a_2)^2 (aa_1u)^2 (aa_2u) a_x a_{1,x}^2 a_{2,x}^3 = 0,$$

$$(aa_1a_2)^2 (aa_1u)^2 a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 = -\frac{2}{3} c\alpha - \frac{4}{3} c^2 f u_x^2,$$

$$(aa_1a_2)^2 (aa_1u)^4 a_{2,x}^4 = 10c a_x^2 a_{1,x}^2 (aa_1u)^4 - \frac{200}{3} c^3 u_x^4,$$

$$(aa_1a_2)^3 (aa_1u) a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,a}^2 a_{2,x} = \frac{10}{9} c^2 \Delta u_x.$$

X, § 2.

Aus den Formeln

$$3u_x^2 = \Sigma KL, \qquad \text{(IV, § 10)}$$

$$(K_m K_n K_p)^2 = -3r^2 h_m h_n h_p \qquad \text{(IX, § 1)}$$

gen diese:

$$(3K_m K_n u)^2 = \sum_{p=1}^{p=6} (K_m K_n K_p)^2 L_p$$
$$= -3r^2 h_m h_n \Sigma h_p L_p$$
$$= -3r^2 h_m h_n h_L,$$
$$3(K_m uv)^2 = \sum_{n=1}^{n=6} (K_m K_n v)^2 L_n$$
$$= -r^2 h_m h_{L_{v^2}} \Sigma h L$$
$$= -r^2 h_m h_L h_{L_{v^2}},$$
$$0 = h_m h_L^2 = g_m g_K^2.$$

X, § 3.

Aus der Formel (IX, § 1)

$$g_h g_m g_n h_x^2 = 2(h_m h_n h_x)^2 + 8r^2 g_m g_n g_{x^2} + 8x_m x_n$$

gen diese:

$$(h_m h_n h_L)^2 = -4r^2 g_m g_n g_{L^2} - 4L_m L_n,$$
$$((K_m K_n u)^2)^2 = -4r^6 g_m g_n g_{L^2} - 4r^4 L_m L_n,$$
$$((K_m K_n u)^2)^3 = 4r^8 g_m g_n g_{L^2} h_m h_n h_L + 4r^6 L_m L_n h_m h_n h_L.$$

X, § 4.

Aus den Formeln (V, § 1)

$$(K_\lambda^2, K_\mu^2, u_x^4)^4 = ((K_\lambda K_\mu u)^2)^2 - \frac{4}{3} L_\lambda L_\mu,$$
$$(K_\lambda^2, K_\mu^3, u_x^6)^6 = ((K_\lambda K_\mu u)^2)^3 - \frac{12}{5} (K_\lambda K_\mu u)^2 L_\lambda L_\mu,$$
$$(K^2, K^2, u_x^4)^4 = \frac{8}{3} L^2,$$
$$(K^3, K^3, u_x^6)^6 = \frac{16}{5} L^3$$

ıält man für $m \gtrless n$

$$(K_m^2, K_n^2, u_x^4)^4 = -4r^6 g_m g_n g_{L^2} - \frac{16}{3} r^6 L_m L_n,$$
$$(K_m^3, K_n^3, u_x^6)^6 = 4r^8 g_m g_n g_{L^2} h_m h_n h_L - \frac{256}{5} r^{12} L_m L_n h_m h_n h_L$$

d

$$(K_m^2, K_m^2, u_x^4)^4 = -4r^6 g_m^2 g_{L^2} - \frac{16}{3} r^6 L_m^2 + 24r^6 L_m^2,$$
$$(K_m^3, K_m^3, u_x^6)^6 = 4r^8 g_m^2 g_{L^2} h_m^2 h_L - \frac{256}{5} r^{12} L_m^2 h_m^2 h_L + 48r^6 L_m^3.$$

X, § 5.

Aus der Formel

$$a_x^2 a_y^4 = \Sigma K (K_{y^2})^2$$

folgen diese:

$$a_x^2 a_{1,x}^2 (a a_1 u)^4 = \sum_{m=1}^{m=6} \sum_{n=1}^{n=6} K_m K_n (K_m^2,\ K_n^2,\ u_x^4)^4$$

$$= \sum_{m=1}^{m=6} \sum_{n=1}^{n=6} K_m K_n \left(-4 r^6 g_m g_n g_{L^2} - \frac{16}{3} r^6 L_m L_n\right) + 24 r^6 \Sigma K^2 L^2,$$

$$= -4 r^6 g_x^2 g_{L^2} - \frac{16 r^6}{3} (\Sigma K L)^2 + 24 r^6 \Sigma K^2 L^2$$

$$= 24 r^6 \Sigma K^2 L^2 - 48 r^6 u_x^4$$

$$= -\frac{10}{3} c^2 \Sigma K^2 L^2 + \frac{20}{3} c^2 u_x^4.$$

X, § 6.

$$(a a_1 u)^6 = \sum_{m=1}^{m=6} \sum_{n=1}^{n=6} (K_m^3,\ K_n^3,\ u_x^6)^6$$

$$= \sum_{m=1}^{m=6} \sum_{n=1}^{n=6} \left(\frac{4}{5} r^{12} g_h^3 g_{L^3} h_m h_n h_L - \frac{256}{5} r^{12} L_m L_n h_m h_n h_L\right) + 48 r^6 \Sigma L^3$$

$$= 4 r^8 g_h^2 g_{L^3} h_L - \frac{256}{5} r^{12} h_L^3 + 48 r^6 \Sigma L^3$$

$$= (144 r^8 + 48 r^6) \Sigma L^3 \qquad \text{(IX, § 1 (2))}$$

$$= -\frac{100}{9} c^3 \Sigma L^3.$$

X, § 7.

Schiebt man die Formel

$$a_x^2 a_{1,x}^2 (a a_1 u)^4 = -\frac{10}{3} c^2 \Sigma K^2 L^3 + \frac{20}{3} c^2 u_x^4$$

viermal über f, so erhält man

$$a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^2 (a a_1 a_2)^4 = -\frac{10}{3} c^2 \Sigma K^2 a_x^2 a_L^2 a_{L_1}^2 + \frac{20}{3} c^2 f$$

$$= -\frac{10}{3} \cdot 5 c^3 \Sigma K^3 + \frac{20}{3} c^2 f \qquad \text{(V, § 3)}$$

$$= -10 c^2 f.$$

X, § 8.

Ersetzt man in der Formel

$$a_x^2 a_{1,x}^2 (a a_1 u)^2 (a a_1 v)^2 = -\frac{10}{3} c^2 \Sigma K^2 L L_{v^2} + \frac{20}{9} c^2 a_x^4 (a u v)^2 + \frac{20}{8} c^3 u_x^2 v_x^2$$

nen Faktor a_x durch (aa_2u), v durch a_2 und multipliziert man mit $_x$ so wird

$$a_x a_{1,x}^2 a_{2,x}^2 (aa_2u)(aa_1u)^2(aa_1a_2)^2 = -\frac{10}{3} c^2 a_x^3 \Sigma K (Kau) K_x a_L^2 + \frac{20}{9} c^2 a_x^3 (aa_1u)^3 a_{1,x}^3 = 0. \qquad \text{(V, § 4)}$$

X, § 9.

Ersetzt man in der Formel

$$a_x^2 a_{1,x}^2 (aa_1u)^2(aa_1v)^2 = -\frac{10}{3} c^2 \Sigma K^2 L L_{v^2} + \frac{20}{9} c^2 a_x^4 (auv)^2 + \frac{20}{3} c^2 u_x^2 v_x^2$$

durch a_2 und multipliziert man mit $a_{2,x}^4$, so erhält man

$$\begin{aligned} a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 (aa_1u)^2(aa_1a_2)^2 &= -\frac{10}{3} c^2 a_x^2 \Sigma K^2 L a_L^2 + \frac{20}{9} c^2 \alpha + \frac{20}{3} c^2 f u_x^2 \\ &= -10 c^3 \Sigma K^4 L + \frac{20}{9} c^2 \alpha + \frac{20}{3} c^2 f u_x^2 \\ &= -10 c^2 \left(\frac{2 s^2}{\sqrt{-15}} \alpha + \frac{4}{5} f u_x^2 \right) + \frac{20}{9} c^2 \alpha \\ &\qquad + \frac{20}{3} c^2 f u_x^2 \qquad \text{(V, § 3)} \\ &= -\frac{2}{3} c\alpha - \frac{4}{3} c^2 f u_x^2. \qquad \text{(VIII, § 8)} \end{aligned}$$

X, § 10.

Schiebt man die Formel

$$(aa_1a_2)^4(aa_1v)^2 = -\frac{100}{9} c^3 \Sigma L^2 L_{v^2}$$

eimal über f, so wird

$$\begin{aligned} a_{2,x}^4 (aa_1u)^4(aa_1a_2)^2 &= -\frac{100}{9} c^3 \Sigma L^2 (f, L)^2 \\ &= -\frac{100}{3} c^2 \Sigma K^2 L^2 \\ &= -\frac{100}{3} c^3 \left(-\frac{3}{10} c_1^2 a_x^2 a_{1,x}^2 (aa_1u)^4 + 2 u_x^4 \right) \\ &= 10 c a_x^2 a_{1,x}^2 (aa_1u)^4 - \frac{200}{3} c^3 u_x^4. \end{aligned}$$

X, § 11.

Aus der Formel

$$(aa_1v)^3(aa_1u) a_x^2 a_{1,x}^2 = -\frac{10}{3} c^2 \Sigma K^2 L_{v^3} L_v + \frac{20}{3} c^3 u_x v_x^3$$

ten wir diese ab:

$$\begin{aligned} (aa_1a_2)^3(aa_1u) a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,\alpha}^2 a_{2,x} &= -\frac{10}{3} c^2 a_\alpha^2 \Sigma K^2 (a_x^4, L^2)^3 + \frac{20}{3} c \Delta u_x \\ &= -\frac{50}{9} c^2 \Delta u_x + \frac{20}{3} c^2 \Delta u_x \qquad \text{(V, § 7)} \\ &= \frac{10}{9} c^2 \Delta u_x. \end{aligned}$$

XI. Kapitel.

Beziehungen zwischen Kovarianten von f.

XI, § 1.

Die Formeln des letzten Kapitels setzen uns in den Stand, eine große Anzahl von Kovarianten von f durch

$$f,\ \Delta,\ \psi$$

auszudrücken.

Wir entwickeln die Werte von S und T

$$S = 3c^2f^2 - c\Delta,$$

$$T = \frac{3}{2}(c^3f^3 - c^2f\Delta)$$

und tragen sie in die Werte (III, § 3) der

$$A_\nu,\ \Delta_{\alpha^2},\ \Delta_{\gamma^3},\ \Delta_\alpha^2$$

ein.

So erhalten wir:

$$A_1 = 3c^3f^6 - 6c^2f^4\Delta + cf^2\Delta^2 + 2\Delta^3,$$

$$A_2 = 9c^4f^6 - 12c^3f^4\Delta + 25c^2f^2\Delta^2 - 6c\Delta^3,$$

$$A_3 = 3c^2f^4 - cf^2\Delta + 2\Delta^2,$$

$$A_4 = 3c^2f^4 - cf^2\Delta - 2\Delta^2,$$

$$A_5 = 9c^4f^6 - 11c^2f^2\Delta^2 + 2c\Delta^3,$$

$$A_6 = -9c^4f^6 + 30c^3f^4\Delta - 43c^2f^2\Delta^2 + 6c\Delta^3,$$

$$A_7 = 9c^4f^6 + 6c^3f^6\Delta - 11c^2f^4\Delta^2 + 12\Delta^4,$$

$$A_8 = 27c^5f^7 - 72c^4f^5\Delta + 39c^3f^3\Delta - 10c^2f\Delta^3,$$

$$\Delta_{\alpha^2} = \frac{c^2}{2}f^3 - \frac{c}{6}f\Delta, \qquad \text{(II, § 4)}$$

$$\Delta_{\gamma^3} = \frac{c^3}{2}f^4 - c^2f^2\Delta + \frac{1}{6}c\Delta^2,$$

$$\Delta_\alpha^2 = \psi - \frac{c^3}{2}f^5 + c^2f^3\Delta - \frac{c}{6}f\Delta^2. \qquad \text{(II, § 15)}$$

XI, § 2.

Aus der Formel (X, § 1)

$$a_x^2a_{1,x}^2a_{2,x}^4(aa_1a_2)^2(aa_1u)^2 = -\frac{2}{3}c\alpha - \frac{4}{3}c^2fu_x^2$$

leiten wir diese ab

$$a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 (a a_1 a_2)^2 (a a_1 \bar{x}\bar{y})^2 = -\frac{2}{3} c(\alpha x y)^2,$$

$$a_a^2 a_y^2 a_x^2 - \Delta_{y^2} = -\frac{c}{3}(\alpha x y)^2 = -\frac{2}{3} c(f f_{y^2} - f_y^2),$$

$$a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 a_{3,x}^4 (a a_1 a_2)^2 (a a_1 a_3)^2 = -\frac{2}{3} c\Delta - \frac{4}{3} c^2 f^2,$$

$$a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 (a a_1 a_2)^2 (a a_1 \bar{\alpha} x)^2 = -\frac{8}{9} cf\Delta,$$

$$(f, \alpha^2)^4 = \Delta_{\alpha^2} - \frac{4}{9} cf\Delta$$

$$= \frac{S}{6} f - \frac{4}{9} cf\Delta. \qquad \text{(II, § 4)}$$

XI, § 3.

Aus der Formel (X, § 1)

$$a_x a_{1,x}^2 a_{2,x}^3 (a a_2 u)(a a_1 u)^2 (a a_1 a_2)^2 = 0$$

folgen diese:

$$a_y a_x a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 (a a_1 \overline{xy})^2 (a a_1 a_2)^2 = a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^3 a_{2y} (a a_1 \bar{x}\bar{y})^2 (a a_1 a_2)^2$$

$$= (a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4)_y (a a_1 \bar{x}\bar{y})^2 (a a_1 a_2)^2$$

$$= -\frac{2}{3} c a_x^3 a_y a_{1,x}^4 (a a_1 \overline{xy})^2 \qquad \text{(XI, § 2)}$$

$$= -(a a_1 a_2)^2 (a a_1 \bar{x}\bar{y}) a_y^2 a_x a_{1,x}^3 a_{2,x}^4$$

$$= (a a_1 a_2)^2 a_{2,x}^4 (a_y^3 a_x a_{1,x}^4 - a_y^3 a_x^2 a_{1,y} a_{1,x}^3),$$

$$(a a_1 a_2)^2 a_y^2 a_x^2 a_{1,y} a_{1,x}^3 a_{2,x}^4 = a_a^2 a_y^3 a_x + \frac{2}{3} c a_x^3 a_y a_{1,x}^4 (a a_1 \bar{x}\bar{y})^2.$$

XI, § 4.

$$(a a_1 a_2)^2 (a a_2 \overline{yx}) a_y a_x^1 a_{1,x}^3 a_{1,y} a_{2,x}^3 = \frac{1}{2} (a a_1 a_2)^2 (a a_2 \bar{y}\bar{x})^2 a_x^2 a_{1,x}^3 a_{1,y} a_{2,x}^2,$$

$$(a a_1 a_2)^2 a_y^3 a_x^2 a_{1,y} a_{1,x}^3 a_{2,x}^4 - \Delta_{y^3} = -\frac{c}{3} a_x^3 a_y a_{1,x}^4 (a a_1 \overline{xy})^2,$$

$$a_a^2 a_y^3 a_x + \frac{2}{3} c a_x^3 a_y a_{1,x}^4 (a a_1 \bar{x}\bar{y})^2 - \Delta_{y^3} = -\frac{c}{3} a_x^3 a_y a_{1,x}^4 (a a_1 \bar{x}\bar{y})^2,$$

$$a_a^2 a_y^3 a_x = \Delta_{y^3} - c(f f_{y^3} - f_y f_{y^2}) = \Delta_{y^3} - c a_x^3 a_y a_{1,x}^4 (a a_1 \overline{xy})^2, \qquad \text{(V, § 4)}$$

$$a_a^2 a_z^2 a_y a_x = \Delta_{y z^2} - c f f_{y z^2} + \frac{2}{3} c f_z f_{y z} + \frac{1}{3} c f_y f_{z^2}.$$

XI, § 5.

$$(a a_1 a_2)(a a_1 u) a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^3 (a_{1,x}(a a_2 u) - a_x (a_1 a_2 u))^2$$

$$= 2(a a_1 a_2)(a a_1 u)(a a_2 u)^2 a_x^2 a_{1,x}^4 a_{2,x}^3 - 2u_s^3$$

$$= (a a_1 a_2)(a a_2 u)^2 a_x^2 a_{1,x}^4 a_{2,x}^2 (a_{1,x}(a a_2 u) + u_x (a a_1 a_2)) - 2u_s^3$$

$$= -(a a_1 f)(a a_1 u)^3 a_x^2 a_{1,x}^2 + a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 (a a_1 a_2)^2 (a a_1 u)^2 u_x - 2u_s^3,$$

$$u_s^3 = -\frac{1}{2}(aa_1f)(aa_1u)^3a_x^2a_{1,x}^2 + \frac{1}{2}a_x^2a_{1,x}^2a_{2,x}^4(aa_1a_2)^2(aa_1u)^2u_x$$
$$-\frac{1}{2}(aa_1a_2)(aa_1u)a_x^2a_{1,x}^2a_{2,x}^3(a_{2,x}(aa_1u) - u_x(aa_1a_2))^2$$
$$= -(aa_1f)(aa_1u)^3a_x^2a_{1,x}^2 + \frac{3}{2}a_x^2a_{1,x}^2a_{2,x}^4(aa_1a_2)^2(aa_1u)^2u_x$$
$$-\frac{1}{2}(aa_1a_2)^3(aa_1u)a_x^2a_{1,x}^2a_{2,x}^3u_x^2$$
$$= -(aa_1f)(aa_1u)^3a_x^2a_{1,x}^2 + \frac{3}{2}u_x\left(-\frac{2}{3}c\alpha - \frac{4}{3}c^2fu_x^2\right) + \frac{5}{3}c^3fu_x^3 \qquad (X, \S 1)$$
$$= -(aa_1f)(aa_1u)^3a_x^2a_{1,x}^2 - c\alpha u_x - \frac{c^2}{3}fu_x^3.$$

XI, § 6.

$$(aa_1f)(aa_1a_2)^3a_x^2a_{1,x}^2a_{2,x}^3 = -S - c\Delta - \frac{c^2}{3}f^2$$
$$= -\frac{10}{3}c^2f^2, \qquad (X, \S 1)$$
$$S = 3c^2f^2 - c\Delta.$$

XI, § 7.

Aus der Formel (XI, § 4)

$$\Delta_{y^3} = a_y^3a_a^2a_x + cff_{y^3} - cf_yf_{y^2}$$

leiten wir für $T = \Delta_s^3$ die Werte ab:

$$T = (f, \alpha s)^5 + \frac{2}{3}cfS$$
$$= -(aa_1a_2)^3(aa_1f)a_x^2a_{1,x}^2a_{2,a}^2a_{2,x} - c(f, \alpha^2)^4 - \frac{c^2}{3}f\Delta + \frac{2}{3}cfS \quad (XI, \S 5)$$
$$= -\frac{10}{9}c^2f\Delta - c\left(\frac{S}{6}f - \frac{4}{9}cf\Delta\right) - \frac{c^2}{3}f\Delta + \frac{2}{3}cfS \qquad (X, \S 1)$$
$$= -c^2f\Delta + \frac{1}{2}cSf$$
$$= -c^2f\Delta + \frac{1}{2}cf(3c^2f^2 - c\Delta) \qquad (XI, \S 6)$$
$$= \frac{3}{2}(c^3f^3 - c^2f\Delta).$$

XI, § 8.

$$(f, \alpha^2)^4 = \frac{S}{6}f - \frac{4}{9}cf\Delta \qquad (XI, \S 2)$$
$$= \frac{1}{6}f(3c^2f^2 - c\Delta) - \frac{4}{9}cf\Delta \qquad (XI, \S 2, 6)$$
$$= \frac{1}{2}c^2f^3 - \frac{11}{18}cf\Delta.$$

XII. Kapitel.

Weitere Darstellungen von Formen Φ durch die Grundformen.

XII, § 1.

Von weiteren Formen Φ berechnen wir diese Überschiebungen über otenzen von α:

$$(aa_1a_2)^2a_x^2a_{1,x}^2a_{2,x}^4(a_y^2a_{1,y}^2,\alpha^2)^4 = \frac{1}{6}c^3f^4 - \frac{4}{27}c^2f^2\Delta + \frac{13}{54}c\Delta^2,$$

$$(aa_1a_2)^2a_xa_{1,x}^3a_{2,x}^4(a_y^3a_{1,y},\alpha^2)^4 = -\frac{1}{2}c^3f^4 + \frac{2}{3}c^2f^2\Delta - \frac{1}{18}c\Delta^2,$$

$$(f_{y^2}^2,\alpha^2)^4 = \frac{5}{9}\Delta^2, \qquad \text{(III, § 6)}$$

$$a_x^2a_{1,x}^2(aa_1\overline{\alpha x})^4 = c^2f^4 - \frac{11}{9}cf^2\Delta + \frac{2}{3}\Delta^2,$$

$$(f,\alpha^3)^6 = \frac{5}{2}c^3f^4 - 3c^2f^2\Delta + \frac{43}{18}c\Delta^2,$$

$$(f_yf_{y^3},\alpha^3)^6 = \frac{1}{6}c^2f^3\Delta - \frac{11}{54}cf\Delta^2,$$

$$(f_{y^2}f_{y^3},\alpha^3)^6 = \frac{7}{30}c^2f^3\Delta - \frac{77}{270}cf\Delta^2,$$

$$(f_{y^3}^3,\alpha^3)^6 = \psi - \frac{c^3}{2}f^5 + \frac{13}{15}c^2f^3\Delta - \frac{11}{90}cf\Delta^2,$$

$$((a_x^2a_{1,x}^2)_{y^3}(aa_1\overline{yx})^4,\alpha^3)^6 = \frac{8}{3}\psi - \frac{c^3}{3}f^5 + \frac{11}{18}c^2f^3\Delta + \frac{179}{135}cf\Delta^2,$$

$$(aa_1\overline{\alpha x})^6 = -20\psi + 15c^3f^5 - \frac{55}{3}c^2f^3\Delta + \frac{10}{9}cf\Delta^2$$

ıd die Summen:

$$-10\Sigma K^2((L\alpha x)^2)^2 = 3f^4 + c_1(8\sqrt{3}r-1)f^2\Delta + 2c_1^2\Delta^2,$$

$$)c_1\Sigma K\left(K_y^2((Lyx)^2)^2,\alpha^3\right)^6 = 72s^2c_1^3\psi + 54r^2f^5 - 66c_1r^2f^3\Delta + \frac{30\sqrt{3}s-169}{15}c_1^2f\Delta^2,$$

$$\Sigma KK_\alpha^2((L\alpha x)^2)^2 = \frac{c}{5}\Big(12^2s^2c_1^3\psi + 9r^2f^5 - 11c_1r^2f^3\Delta - \frac{13r+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}c_1^2f\Delta^2\Big),$$

$$-75\Sigma K^5((L\alpha x)^2)^2 = 6\sqrt{3}sc_1^3\psi + 3\frac{3\sqrt{3}r+17}{4}f^5 + \frac{53\sqrt{3}r-41}{4}c_1f^3\Delta + 14\sqrt{3}r^2c_1^2f\Delta^2.$$

XII, § 2.

Aus der Formel (XI, § 2)

$$a_\alpha^2 a_x^2 a_y^2 = \Delta_{y^2} - \frac{c}{3}(\alpha x y)^2$$

folgen diese:

$$(a a_1 a_2)^2 a_\alpha^2 a_x^2 a_{1,a_1}^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4$$

$$= a_x^4 \left\{(a\Delta\Delta_1)^2 \Delta_x \Delta_{1,x} - \frac{2}{3} c\Delta(a\Delta\overline{\alpha x})^2\right\} + \frac{4}{27} c^2 f^2 \Delta$$

$$= \Delta_{y^2} - \frac{2}{3} c(\alpha\gamma x)^2 + \frac{4}{27} c^2 f^2 \Delta$$

(XI, § 1) $$= \frac{c^3}{8} f^4 - c^2 f^2 \Delta + \frac{c}{6}\Delta^2 - \frac{c}{9}(3c^2 f^4 - c f^2 \Delta + 2\Delta^2) + \frac{4}{27} c^2 f^2 \Delta$$

$$= \frac{c^3}{6} f^4 - \frac{20}{27} c^2 f^2 \Delta - \frac{c}{18}\Delta^2.$$

(III, § 6) $$(f_y^3, \alpha^2)^4 = \Delta^2 - \frac{4}{9}\Delta^2 = \frac{5}{9}\Delta^2,$$

$$(f_{y^2} f_y, \alpha^2)^4 = f_\alpha a_x^3 a_\alpha a_{a_1}^2 = \frac{1}{3}\Delta^2.$$

XII, § 3.

Ersetzt man in der Formel

(III, § 6) $$(\alpha^2)_{v^2} = u_\alpha^2 v_\alpha^2 - \frac{4}{9}\Delta(a_3 u v)^2 a_{3,x}^4$$

die u und v durch a, a_1 und multipliziert man mit

$$(a a_1 a_2)^2 a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4,$$

so wird

$$(a a_1 a_2)^2 a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 (a_y^3 a_{1,y}^2, \alpha^2)^4$$

$$= (a a_1 a_2)^2 a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 \left(a_\alpha^2 a_{1,a_1}^2 - \frac{4}{9}\Delta(a a_1 a_3)^2 a_{3,x}^4\right)$$

(XI, § 2) $$= \frac{c^3}{6} f^4 - \frac{20}{27} c^2 f^2 \Delta - \frac{c}{18}\Delta^2 + \frac{4}{9}\Delta\left(\frac{4}{3} c^2 f^2 + \frac{2}{3} c\Delta\right)$$

$$= \frac{c^3}{6} f^4 - \frac{4}{27} c^2 f^2 \Delta + \frac{13}{54} c\Delta^2.$$

XII, § 4.

Ersetzt man in der Formel

(XI, § 4) $$a_\alpha^2 a_y a_z^2 a_x = \Delta_y \Delta_{z^2} + \frac{c}{3} f_y f_{z^2} + \frac{2}{3} c f_z f_{yz} - c f f_{yz^2}.$$

y durch α_1, z durch $\overline{a_1 a_2}$

und multipliziert man mit

$$a_{1,a_1} a_{1,x}^3 a_{2,x}^4,$$

so wird

$$(aa_1a_2)^2a_xa_{1,x}^3a_{2,x}^4(a_y^3a_{1,y},\alpha^2)^4$$

$$= a_{1,\alpha_1}a_{1,x}^3a_{2,x}^4\Big((a_1a_2\Delta)^2\Delta_{\alpha_1}+\frac{c}{3}f_{\alpha_1}a_x^4(aa_1a_2)^2+\frac{2c}{3}a_x^4a_{\alpha_1}(aa_1a_2)(a_1a_2f) - cfa_x^3a_{\alpha_1}(aa_1a_2)^2\Big)$$

$$= \frac{S}{6}\Delta+\frac{c}{9}\Delta^2-\frac{c}{6}Sf^2+\frac{c}{3}a_x^4a_{1,\alpha_1}a_{1,x}^3a_{2,x}^4(aa_1a_2)(a_{1\,\alpha_1}(aa_2f) + f_{\alpha_1}(aa_1a_2)) \quad \text{(II, § 4)}$$

$$= \frac{c}{9}\Delta^2+\frac{1}{6}(-cf^2+\Delta)(3c^2f^2-c\Delta)+\frac{c}{3}(-f_a\Delta_a+f_a\Delta_a) \quad \text{(XI, § 1)}$$

$$= -\frac{c^3}{2}f^4+\frac{2}{3}c^2f^2\Delta-\frac{c}{18}\Delta^2.$$

XII, § 5.

Schiebt man die Formel

$$a_x^3a_{1,x}^3(aa_1\overline{yx})^4 = 2ff_{y^4}-8f_yf_{y^3}+6f_{y^2}^2$$

viermal über α^2, so wird

$$a_x^2a_{1,x}^2(aa_1\overline{\alpha x})^4 = 2f(f,\alpha^2)^4-8(f_yf_{y^3},\alpha^2)^4+6(f_{y^2}^2,\alpha^2)^4$$

$$= 2f\Big(\frac{1}{2}c^2f^3-\frac{11}{18}cf\Delta\Big)-\frac{8}{3}\Delta^2+6\cdot\frac{5}{9}\Delta^2 \quad \text{(XII, § 2)}$$

$$= c^2f^4-\frac{11}{9}cf^2\Delta+\frac{2}{3}\Delta^2.$$

XII, § 6.

Ersetzt man in der Formel (X, § 1)

$$\Sigma K^2LL_{6^2} = -\frac{3}{10}c_1^2a_x^2a_{1,x}^2(aa_1u)^2(aa_1v)^2+\frac{2}{3}a_x^4(auv)^2+2u_x^2v_x^2$$

u und v durch $\overline{\alpha x}$ und $\overline{\alpha_1 x}$, so wird

$$\Sigma K^2((L\alpha x)^2)^2 = -\frac{3}{10}c_1^2a_x^2a_{1,x}^2(aa_1\overline{\alpha x})^4+\frac{8}{9}f^2\Delta$$

$$= -\frac{3}{10}c_1^2\Big(c^2f^4-\frac{11}{9}cf^2\Delta+\frac{2}{3}\Delta^2\Big)+\frac{8}{9}f^2\Delta$$

$$-10\Sigma K^2((L\alpha x)^2)^2 = 3f^4+c_1(8\sqrt{3}r-1)f^2\Delta+2c_1^2\Delta^2.$$

XII, § 7.

Schiebt man die Formel (X, § 1)

$$(aa_1u)^4(aa_1a_2)^2a_{2,x}^4 = 10ca_x^2a_{1,x}^2(aa_1u)^4-\frac{200}{3}c^3u_x^4$$

viermal über $((\alpha xy)^2)^2$ so erhält man:

$$(aa_1\overline{\alpha x})^4(aa_1a_2)^2a_{2,x}^4 = 10ca_x^2a_{1,x}^2(aa_1\overline{\alpha x})^4$$

$$= 10c\Big(c^2f^4-\frac{11}{9}cf^2\Delta+\frac{2}{3}\Delta^2\Big). \quad \text{(XII, § 5)}$$

analoge Formeln entwickeln. Wir erhalten

$$a_x^2 a_{1,x}^2 (a a_1 u)^4 = -\frac{10}{3} c^2 \Sigma K^2 L^2 + \frac{20}{3} c^2 u_x^4,$$

$$(a a_1 u)^6 = -\frac{100}{9} c^3 \Sigma L^3$$

und hieraus

$$a_x^2 a_{1,x}^2 (a a_1 u)(a a_1 v)^3 = -\frac{10}{3} c^2 \Sigma K^2 L_v L_v^3 + \frac{20}{3} c^2 u_x v_x^3,$$

(IV, § 3) $$a_x^2 a_{1,x}^2 (a a_1 u)^2 (a a_1 v)^2 = -\frac{10}{3} c^2 \Sigma K^2 L L_v^2 + \frac{20}{9} c_x^2 a_x^4 (a u v)^2 + \frac{20}{3} c^2 u_x^2 v_x^2,$$

$$(a a_1 u)^3 (a a_1 v)^3 = -\frac{100}{9} c^3 \Sigma L L_v L_v^3,$$

$$(a a_1 u)^4 (a a_1 v)^2 = -\frac{100}{9} c^3 \Sigma L^2 L_v^2,$$

(V, § 1) $$(a a_1 u)^2 (a a_1 v)^2 (a a_1 w)^2 = \frac{100}{9} c^3 \Sigma L L_v^2 L_w^2 - \frac{200}{9} c^3 (u v w)^2,$$

$$\Sigma K^2 L^2 = -\frac{3}{10} c_1^2 a_x^2 a_{1,x}^2 (a a_1 u)^4 + 2 u_x^4,$$

$$\Sigma K^2 L L_v^2 = -\frac{3}{10} c_1^2 a_x^2 a_{1,x}^2 (a a_1 u)^2 (a a_1 v)^2 + \frac{2}{3} a_x^4 (\alpha u v)^2 + 2 u_x^2 v_x^2,$$

$$\Sigma L^3 = -\frac{9}{100} c_1^3 (a a_1 u)^6,$$

$$\Sigma L L_v^2 L_w^2 = -\frac{9}{100} c_1^3 (a a_1 u)^2 (a a_1 v)^2 (a a_1 w)^2 + 2 (u v w)^2,$$

$$\Sigma K K_y^2 ((L y x)^2)^2 = -\frac{3}{10} c_1^2 (a_x^2 a_{1,x}^2)_{y^2} (a a_1 y x)^4 - \frac{3}{50} c_1^3 (a a_1 \bar{y} \bar{x})^6,$$

$$(a a_1 a_2)^4 a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^2 = -10 c^2 f,$$

$$(a a_1 a_2)^3 (a a_1 f) a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^3 = -\frac{10}{3} c^2 f^2,$$

$$(a a_1 a_2)^2 (a a_1 u)^2 (a a_2 u) a_x a_{1,x}^2 a_{2,x}^3 = 0,$$

$$(a a_1 a_2)^2 (a a_1 u)^2 a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,x}^4 = -\frac{2}{3} c \alpha - \frac{4}{3} c^2 f u_x^2,$$

$$(a a_1 a_2)^2 (a a_1 u)^4 a_{2,x}^4 = 10 c a_x^2 a_{1,x}^2 (a a_1 u)^4 - \frac{200}{3} c^3 u_x^4,$$

$$(a a_1 a_2)^3 (a a_1 u) a_x^2 a_{1,x}^2 a_{2,\alpha}^2 a_{2,x} = \frac{10}{9} c^2 \Delta u_x.$$

X, § 2.

Aus den Formeln

$$3 u_x^2 = \Sigma K L, \qquad \text{(IV, § 10)}$$

$$(K_m K_n K_p)^2 = -3 r^2 h_m h_n h_p \qquad \text{(IX, § 1)}$$

folgen diese:

$$(3K_m K_n u)^2 = \sum_{p=1}^{p=6} (K_m K_n K_p)^2 L_p$$
$$= -3r^2 h_m h_n \Sigma h_p L_p$$
$$= -3r^2 h_m h_n h_L,$$
$$3(K_m uv)^2 = \sum_{n=1}^{n=6} (K_m K_n v)^2 L_n$$
$$= -r^2 h_m h_{L_{\varrho^2}} \Sigma h L$$
$$= -r^2 h_m h_L h_{L_{\varrho^2}},$$
$$0 = h_m h_L^2 = g_m g_K^2.$$

X, § 3.

Aus der Formel (IX, § 1)

$$g_h g_m g_n h_x^2 = 2(h_m h_n h_x)^2 + 8r^2 g_m g_n g_{x^2} + 8x_m x_n$$

folgen diese:

$$(h_m h_n h_L)^2 = -4r^2 g_m g_n g_{L^2} - 4L_m L_n,$$
$$((K_m K_n u)^2)^2 = -4r^6 g_m g_n g_{L^2} - 4r^4 L_m L_n,$$
$$((K_m K_n u)^2)^3 = 4r^8 g_m g_n g_{L^2} h_m h_n h_L + 4r^6 L_m L_n h_m h_n h_L.$$

X, § 4.

Aus den Formeln (V, § 1)

$$(K_\lambda^2, K_\mu^2, u_x^4)^4 = ((K_\lambda K_\mu u)^2)^2 - \frac{4}{3} L_\lambda L_\mu,$$
$$(K_\lambda^2, K_\mu^3, u_x^6)^6 = ((K_\lambda K_\mu u)^2)^3 - \frac{12}{5} (K_\lambda K_\mu u)^2 L_\lambda L_\mu,$$
$$(K^2, K^2, u_x^4)^4 = \frac{8}{3} L^2,$$
$$(K^2, K^3, u_x^6)^6 = \frac{16}{5} L^3$$

erhält man für $m \gtrless n$

$$(K_m^2, K_n^2, u_x^4)^4 = -4r^6 g_m g_n g_{L^2} - \frac{16}{3} r^6 L_m L_n,$$
$$(K_m^2, K_n^3, u_x^6)^6 = 4r^8 g_m g_n g_{L^2} h_m h_n h_L - \frac{256}{5} r^{12} L_m L_n h_m h_n h_L$$

und

$$(K_m^2, K_m^2, u_x^4)^4 = -4r^6 g_m^2 g_{L^2} - \frac{16}{3} r^6 L_m^2 + 24r^6 L_m^2,$$
$$(K_m^2, K_m^3, u_x^6)^6 = 4r^8 g_m^2 g_{L^2} h_m^2 h_L - \frac{256}{5} r^{12} L_m^2 h_m^2 h_L + 48 r^8 L_m^2$$

XII, § 16.

$$75\Sigma K^5((L\alpha x))^2$$

$$= -\frac{10\sqrt{-5}}{\sqrt{3}} s^2 \Sigma K K_\alpha^2((L\alpha x)^2)^2 + 20f\Sigma K^2((L\alpha x)^2)^2$$

$$= \begin{cases} -\sqrt{3}\,r\left(12s^2c_1^3\psi + 9r^2f^5 - 11c_1r^2f^3\Delta - \frac{13r+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}c_1^2f\Delta^2\right) & \text{(VIII, § 8)} \\ -2f\quad\left(\qquad 3f^4 + c_1(8\sqrt{3}r-1)f^2\Delta + 2c_1^2\Delta^2\right) \end{cases}$$

$$= -\left(6\sqrt{3}sc_1^3\psi + 3\frac{3\sqrt{3}r+17}{4}f^5 + \frac{53\sqrt{3}r-41}{4}c_1f^3\Delta + 14\sqrt{3}r^3c_1^2f\Delta^2\right).$$

XIII. Kapitel.

Rechnung mit Zwischenformen.

XIII, § 1.

Die drei ersten Polaren der Form

$$\varphi = (aa_1a_2)^2a_x^4a_{1,x}^4a_{2,x}^4 = \Delta = d_x^9\Delta_x^2 \qquad \text{(III, § 2)}$$

und die Elementarkovarianten von

$$d_x^9\Delta_y^3 = (aa_1a_2)^2a_ya_x^3a_{1,y}a_{1,x}^3a_{2,y}a_{2,x}^3$$

lassen sich mittels der Formen

$$\begin{aligned} \varphi_y &= \Delta_y, \\ \varphi_{y^2} &= \Delta_{y^2} - \frac{2c}{11}ff_{y^2} + \frac{2c}{11}f_y^2, \\ \varphi_{y^3} &= \Delta_{y^3} + \frac{3c}{11}f_yf_{y^2} - \frac{3c}{11}ff_{y^3}, \\ d_x^8\Delta_x^2(d\Delta u) &= 0, \\ d_x^7\Delta_x(d\Delta u)^2 &= \frac{5}{36}c\alpha, \\ d_x^6(d\Delta u)^3 &= 0 \end{aligned}$$

durch übernommene Formen ausdrücken. Aus ihnen leiten wir die Formeln ab:

$$d_x^8\Delta_z^2(d\Delta\bar{y}x) = \frac{2c}{9}(f_yf_{z^2} - ff_{yz^2}),$$

$$a_x^4a_{1,x}^4\Delta_{1,x}d_x^8d_{1,x}^9(a\Delta\overline{yx})\,(\bar{a}\Delta\,\overline{a_1\Delta_1}\,x)^2 = \frac{2c}{27}(\Delta f_y - f\Delta_y),$$

$$a_x^4a_{1,x}^4\Delta_{1,x}d_x^8d_{1,x}^9(a\Delta\overline{yx})\,(\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,x)\,(\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,y)$$
$$= \frac{2c}{81}\left(-\frac{S}{12}f^2f_{y^2} + \frac{1}{6}f\Delta\Delta_{y^2} - \frac{1}{2}f\Delta_y^2 + \frac{1}{12}Sff_y^2 + \frac{1}{3}\Delta f_y\Delta_y\right).$$

XIII, § 2.

$$(aa_1a_2)^2a_ya_x^3a_{1,x}^4a_{2,x}^4 = \varphi_y = \Delta_y,$$

$$\varphi_{y^2} = \frac{1}{11}(aa_1a_2)^2(3a_y^2a_x^2a_{1,x}^4a_{2,x}^4 + 8a_ya_x^3a_{1,y}a_{1,x}^3a_{2,x}^4)$$

$$= \frac{3}{11}a_a^2a_y^2a_x^2 + \frac{8}{11}\Delta_{y^2}$$

$$= \Delta_{y^2} - \frac{2c}{11}(ff_{y^2} - f_y^2) \qquad \text{(XI, § 2)}$$

$$p_{y^3} = \frac{1}{5}(aa_1a_2)^2(3a_2a_x^2a_{1,y}a_{1,x}^3a_{2,x}^4 + 2a_ya_x^3a_{1,y}a_{1,x}^3a_{2,y}a_{2,x}^3) - \frac{4c}{55}a_ya_x^3a_{1,x}^4(aa_1\overline{xy})^2$$

$$= \Delta_{y^3} - \frac{3c}{11}a_ya_x^3a_{1,x}^4(aa_1\overline{xy})^2, \qquad \text{(XI, § 4)}$$

$$(\varphi\bar{f}u)^2 = (\Delta\bar{f}u)^2 - \frac{2c}{11}fa_x^4(a\bar{f}u)^2.$$

XIII, § 3.

Vergleicht man die Koeffizienten der Formel

$$\Delta_{y^3} = \varphi_{y^3} + \frac{3c}{11}(\alpha xy)_y^3$$

mit denen der Reihenentwicklung

$$\Delta_y^3d_x^9 = (\Delta_x^3d_x^9)_{y^3} + \frac{\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{12}{1}}(\Delta d\overline{yx})(\Delta_x^2d_x^8)_y + \frac{\binom{3}{2}\binom{9}{2}}{\binom{11}{2}}(\Delta d\overline{yx})^2(\Delta_xd_x^7)_y$$

$$+ \frac{\binom{3}{3}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}(\Delta d\overline{yx})^3d_x^6,$$

so erhält man:

$$\Delta = \varphi; \quad (d\Delta\overline{xy})d_x^8\Delta_x^2 = 0; \quad (d\Delta\overline{xy})^2d_x^7\Delta_x = \frac{5c}{36}(\alpha xy)^2; \quad (d\Delta\overline{xy})^3d_x^6 = 0.$$

Nach dem in I, § 3 aufgestellten Satze folgen hieraus für die Elementarkovarianten von $\Delta_y^3d_x^9$ die Werte:

$$(d\Delta u)\ d_x^8\Delta_x = 0,$$

$$(d\Delta u)^2d_x^7\Delta_x^2 = \frac{5}{36}c\alpha,$$

$$(d\Delta u)^3d_x^6 \quad = 0.$$

XIII, § 4.

$$\Delta_z^2d_z^8(d\Delta yx) = \frac{8}{5}(d\Delta\bar{y}x)(d\Delta\overline{xz})(d_x^2\Delta_x)_z$$

$$= -\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{36}c((\alpha xy)(\alpha xz))_z$$

$$= \frac{2c}{9}(f_yf_{z^2} - ff_{yz^2}).$$

Schiebt man diese Formel zweimal über die Formen

$$a_x^4(au\,\bar{\gamma}\bar{x})^2 \quad \text{und} \quad a_x^4(au\,\bar{\gamma}\bar{x})\,(au\,\overline{\gamma y})$$

in bezug auf z, u, so erhält man die Formeln:

$$a_x^4 d_x^3(d\Delta yx)\,(a\Delta\bar{\gamma}\bar{x})^2 = \tfrac{2c}{9}\,a_x^4 a_{1,x}^3(f_y a_{1,x} - f a_{1,y})\,(aa_1\,\bar{\gamma}\bar{x})^2$$

$$= \tfrac{2c}{27}\,\Delta(\Delta f_y - f\Delta_y), \qquad \text{(III, § 3)}$$

$$a_x^4 d_x^3(d\Delta\bar{y}\bar{x})\,(a\Delta\bar{\gamma}\bar{x})\,(a\Delta\bar{\gamma}\bar{y}) = \tfrac{2c}{9}\,a_x^4 a_{1,x}^3(f_y a_{1,x} - f a_{1,y})\,(aa_1\,\bar{\gamma}\bar{x})\,(aa_1\,\bar{\gamma}\bar{y})$$

$$= \tfrac{2c}{9}\Big(-\tfrac{S}{12}f^2 f_{y^2} + \tfrac{1}{6}f\Delta\Delta_{y^2} - \tfrac{1}{2}f\Delta_y^2 + \tfrac{S}{12}f f_y^2 + \tfrac{1}{3}\Delta f_y\Delta_y.$$

(III, § 3.)

XIV. Kapitel.

Polaren von ψ.

XIV, § 1.

Die beiden ersten Polaren der Form

$$\psi = a_x^4 a_{1,x}^4 d_x^9\Delta_x d_{1,x}^9\Delta_{1,x}(\bar{a}\bar{\Delta}\,\bar{a}_1\bar{\Delta}_1\,x)^2$$

lassen sich mittels dieser Formeln auf übernommene Formen reduzieren

(1) $$\psi_y = \Theta_y + Q(f\Delta_y - \Delta f_y),$$

(2) $$\psi_{y^2} = \Theta_{y^2} + Q_1 f\Delta_{y^2} + Q_2 f_{y^2} - \tfrac{2c}{87}f\Delta_y^2 + Q_3 f_y^2 + Q_4 f_y\Delta_y,$$

wo die Koeffizienten die Werte haben

$$45\,Q = -21c^2f^2 + 5c\Delta,$$

$$\tfrac{29\cdot 45}{2}\,Q_1 = -273c^2f^2 + 95c\Delta,$$

$$\tfrac{29\cdot 45}{2}\,Q_2 = -159c^3f^4 + 370c^2f^2\Delta - 65c\Delta^2,$$

$$\tfrac{29\cdot 45}{2}\,Q_4 = \quad 159c^3f^2 - 34c^2\Delta,$$

$$\tfrac{29\cdot 15}{2}\,Q_5 = -21c^2f^2 - 5c\Delta.$$

Aus Formel (2) leiten wir diese ab:

$$(\psi\bar{f}u)^2 = (\Theta\bar{f}u)^2 + Q_1 f(\Delta\bar{f}u)^2 + Q_2 a_x^4(a\bar{f}u)^2 - \tfrac{2c}{87}((\Delta fu))^2.$$

XIV, § 2.

Die beiden symbolischen Produkte

$$\psi = a_x^4 a_{1,x}^4 \Delta_4 d_x^9 \Delta_{1,x} d_{1,x}^9 (\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,x)^9,$$
$$\Theta_y = a_x^4 a_{1,x}^4 \Delta_x d_x^9 \Delta_{1,x} d_{1,x}^9 (\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,x)(\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,y)$$

haben die Faktoren erster Art

$$a_x,\ a_{1,x},\ \Delta_x,\ \Delta_{1,x},\ d_x,\ d_{1,x},\ (\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,x).$$

Man erhält die Glieder ihrer ersten Polaren, wenn man je einen dieser Faktoren entsprechend durch

$$a_y,\ a_{1,y},\ \Delta_y,\ \Delta_{1,y},\ d_y,\ d_{1,y},\ (\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,y)$$

ersetzt. Die von

$$a_x,\ a_{1,x},\ \Delta_x,\ \Delta_{1,x}$$

herrührenden Glieder haben die Werte

$$G_{11} = a_x^3 a_y a_{1,x}^4 \Delta_x d_x^9 \Delta_{1,x} d_{1,x}^9 (\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,x)^9 = a_x^3 a_y \Delta_x d_x^9 (a\Delta\,\overline{\gamma x})^5,$$
$$G_{21} = a_x^3 a_y a_{1,x}^4 \Delta_x d_x^9 \Delta_{1,x} d_{1,x}^9 (\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,x)(\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,y)$$
$$= a_x^3 a_y d_x^9 \Delta_x (a\Delta\,\overline{\gamma x})(a\Delta\,\overline{\gamma y}),$$

die von d_x und $d_{1,x}$ herrührenden die Werte

$$G_{12} = a_x^4 a_{1,x}^4 \Delta_x d_y d_x^8 \Delta_{1,x} d_{1,x}^9 (\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,x)^9 = a_x^4 \Delta_x d_y d_x^8 (a\Delta\,\overline{\gamma x})^9,$$
$$G_{22} = a_x^4 a_{1,x}^4 \Delta_x d_y d_x^8 \Delta_{1,x} d_x^9 (a\Delta\,\overline{a_1\Delta_1}\,x)(a\Delta\,\overline{a_1\Delta_1}\,y)$$
$$= a_x^4 \Delta_x d_y d_x^8 (a\Delta\,\overline{\gamma x})(a\Delta\,\gamma y)$$

und die von $(\overline{a\Delta}\,\overline{a_1\Delta_1}\,x)$ herrührenden die Werte

$$\Theta_y \quad \text{und} \quad \Theta_{y^2}.$$

Aus diesen Gliedern setzen sich die ersten Polaren mittels der Formeln zusammen:

$$15\psi_y = \Theta_y + 5G_{11} + 9G_{12},$$
$$29(\Theta_y)_y = \Theta_{y^2} + 10G_{21} + 18G_{22},$$

die wir auch so schreiben können

$$15\psi_y = 15\Theta_y + 14(G_{11} - \Theta_y) + 9(G_{12} - G_{11}), \tag{1a}$$
$$29(\Theta_y)_y = 29\Theta_{y^2} + 28(G_{21} - \Theta_{y^2}) + 18(G_{22} - G_{21}). \tag{2a}$$

XIV, § 3.

$$G_{11} - \Theta_y = a_x^3 a_y \Delta_x d_x^9 (a\Delta\,\overline{\gamma x})^2 - a_x^4 \Delta_x d_x^9 (a\Delta\,\overline{\gamma x})(a\Delta\,\overline{\gamma y})$$
$$= a_x^3 \Delta_x d_x^9 (a\Delta\,\overline{\gamma x}\,(a_y((a\Delta\,\overline{\gamma x}) - a_x(a\Delta\,\overline{\gamma y}))$$
$$= a_x^3 a_\gamma \Delta_x d_x^9 (a\Delta\,\overline{\gamma x})(a\Delta\,\overline{\gamma x})$$
$$= -\frac{S}{6}(f\Delta_y - \Delta f_y), \qquad \text{(III, § 3)}$$

$$G_{21} - \Theta_{y^2} = a_x^3 a_y \Delta_x d_x^9 (a\Delta\gamma\bar{x})\,(a\Delta\overline{\gamma y}) - a_x^4 \Delta_x d_x^9 (a\Delta\gamma\bar{y})^2$$
$$= a_x^3 \Delta_x d_x^9 (a\Delta\overline{\gamma y})\,(a_y (a\Delta\overline{\gamma x}) - a_x (a\Delta\gamma y))$$
$$= a_x^3 \Delta_x d_x^9 a_y (a\Delta\gamma\bar{y})\,(a\Delta\bar{y}x)$$
$$= \left(\frac{S}{12}\Delta - \frac{T}{6} f\right) f_{y^2} - \frac{S}{12} f\Delta_{y^2} + \frac{T}{6} f_y^3, \qquad \text{(III, § 3)}$$

$$G_{12} - G_{11} = a_x^4 \Delta_x d_y d_x^8 (a\Delta\gamma x)^2 - a_x^4 \Delta_y d_x^9 (a\Delta\gamma x)^2 = a_x^4 (d\Delta\bar{y}x)\, d_x^8 (a\Delta\gamma x)^2$$
$$= \frac{2c}{27}\Delta(\Delta f_y - f\Delta_y), \qquad \text{(XIII, § 4)}$$

$$G_{22} - G_{21} = a_x^4 \Delta_x d_y d_x^8 (a\Delta\overline{\gamma x})\,(a\Delta\gamma y) - a_x^4 \Delta_y d_x^9 (a\Delta\gamma\bar{x})\,(a\Delta\overline{\gamma y})$$
$$= a_x^4 (d\Delta yx)\, d_x^8 (a\Delta\gamma x)\,(a\Delta\overline{\gamma y})$$
$$= \frac{2c}{9}\left(-\frac{S}{12} f^2 f_{y^2} + \frac{1}{6} f\Delta\Delta_{y^2} - \frac{1}{2} f\Delta_y^2 + \frac{S}{12} f f_y^2 + \frac{1}{3}\Delta f_y \Delta_y\right)$$
(XIII, § 4).

XIV, § 4.

Trägt man diese Werte in (1a), (2a) ein, so wird:

$$15(\psi_y - \Theta_y) = \left(-\frac{7}{3} S + \frac{2c}{3}\Delta\right)(f\Delta_y - \Delta f_y)$$
$$= \left(-\frac{7}{3}(3c^2 f^2 - c\Delta) + \frac{2c}{3}\Delta\right)(f\Delta_y - \Delta f_y) \qquad \text{(XI, § 1)}$$
$$= \left(-7c^2 f^2 + \frac{5}{3} c\Delta\right)(f\Delta_y - \Delta f_y),$$

$$\psi_y = \Theta_y + \left(-\frac{7}{15} c^2 f^2 + \frac{1}{9} c\Delta\right)(f\Delta_y - \Delta f_y) = \Theta_y + Q(f\Delta_y - \Delta f_y),$$

$$29((\Theta_y)_y - \Theta_{y^2}) = \begin{cases} 28\left(\left(\frac{S}{12}\Delta - \frac{T}{6} f\right) f_{y^2} - \frac{S}{12} f\Delta_{y^2} + \frac{T}{6} f_y^3\right) \\ + 4c\left(-\frac{S}{12} f^2 f_{y^2} + \frac{1}{6} f\Delta\Delta_{y^2} - \frac{1}{2} f\Delta_y^2 + \frac{S}{12} f f_y^2 + \frac{1}{3}\Delta f_y \Delta_y\right) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -28\left(\frac{1}{4}(ff_{y^2} - f_y^2)(c^2 f^2 - c^2 f\Delta) - \frac{1}{12}(\Delta f_{y^2} - f\Delta_{y^2})(3c^2 f^2 - c\Delta)\right) \\ + 4c\left(-\frac{1}{12} f(ff_{y^2} - f_y^2)(3c^2 f^2 - c\Delta) + \frac{1}{6}\Delta\Delta_{y^2} - \frac{1}{2} f\Delta_y^2\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{1}{3}\Delta f_y \Delta_y\right) \qquad \text{(XI, § 1)} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (-7c^2 f^2 + 3c\Delta) f\Delta_{y^2} + \left(-8c^3 f^4 + \frac{43}{3} c^2 f^2 \Delta - \frac{7}{3} c\Delta^2\right) f_{y^2} \\ -2cf\Delta_y^2 + \left(8c^3 f^2 - \frac{22}{3} c^2 \Delta\right) f f_y^2 + \frac{4c}{3}\Delta f_y \Delta_y. \end{cases}$$

XIV, § 5.

Die Polare des Ausdruckes

$$45(\psi_y - \Delta_{y^2}) = (5c\Delta - 21c^2 f^2)(f\Delta_y - \Delta f_y)$$

hat den Wert XIII, § 1

$$29 \cdot 45(\psi_{y^2} - (\Theta_y)_y)$$

$$= \begin{cases} (f(11\Delta\Delta_{y^2} - 2cff_{y^2} + 2cf_y^2) - 5\Delta f_{y^2})(5c\Delta - 21c^2f^2) \\ + \Delta_y(30c(2f\Delta_y + \Delta f_y) - 18 \cdot 21c^2f^2f_y) \\ - f_y(120c\Delta\Delta_y - 12 \cdot 21c^2f(f\Delta_y + \Delta f_y)) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 11f\Delta_{y^2}(5c\Delta - 21c^2f^2) + f_{y^2}(42c^3f^4 + 95c^2f^2\Delta - 25c\Delta^2) + 60cf\Delta_y^2 \\ + ff_y^2(262c^2\Delta - 42c^3f^2) - f_y\Delta_y(126c^2f^3 + 90c\Delta). \end{cases}$$

XV. Kapitel.

Einführung der v, w in die Formeln.

XV, § 1.

Nach dem im VIII. Kapitel bewiesenen Satze sind die Formen Φ als ganze Funktionen von f, φ, ψ darstellbar.

Setzt man:

$$\varphi = cf^2v, \qquad \psi = \tfrac{1}{6}c^3f^5w$$

so lassen sie sich als Produkte ausdrücken, deren einer Faktor eine Potenz von f ist, während der andere eine ganze Funktion von v und w wird (Valentinerparameter).

Den Formeln

$$\Sigma K^6 = \tfrac{4}{15}f^2 + \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}}\Delta, \qquad \text{(VIII, § 10)}$$

$$6\sqrt{-5}\,rU = \tfrac{r^2}{15}f^2 - \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}}\Delta, \qquad \text{„ „}$$

$$\Sigma K^4(L\alpha x)^2 = \frac{8s^2}{3\sqrt{-15}}f\Delta, \qquad \text{„ „}$$

$$-10\Sigma K^3((L\alpha x)^2)^2 = 3f^4 + c_1(8\sqrt{3}r - 1)f^2\Delta + 2c_1^2\Delta^2, \qquad \text{(XII, § 1)}$$

$$-75\Sigma K^5((L\alpha x)^2)^2 \qquad \text{(XII, § 16)}$$

$$= 6\sqrt{3}sc_1^3\psi + 3\frac{3\sqrt{3}r + 17}{4}f^5 + \frac{53\sqrt{3}r - 41}{4}c_1f^3\Delta + 14\sqrt{3}r^3c_1^3f\Delta^2,$$

$$S = 3c^2f^2 - c\Delta, \qquad \text{(XI, § 1)}$$

$$T = \tfrac{3}{2}(c^3f^3 - c^2f\Delta), \qquad \text{„ „}$$

$$45Q = 5c\Delta - 21c^2f^2, \qquad \text{(XIV, § 1)}$$

$$\tfrac{29 \cdot 45}{2}Q_1 = -273c^2f^2 + 95c\Delta, \qquad \text{„ „}$$

$$\tfrac{29 \cdot 45}{2}Q_2 = -159c^3f^4 + 370c^2f^2\Delta - 65c\Delta^2. \qquad \text{„ „}$$

$$A_1 = 3c^3f^6 - 6c^2f^4\Delta + cf^2\Delta^2 + 2\Delta^3, \qquad \text{(XI, § 1)}$$
$$A_2 = 9c^4f^6 - 12c^3f^4\Delta + 25c^2f^2\Delta^2 - 6c\Delta^3,$$
$$A_3 = 3c^2f^4 - cf^2\Delta + 2\Delta^2,$$
$$A_4 = 3c^2f^4 - cf^2\Delta - 2\Delta^2,$$
$$A_5 = 9c^4f^6 - 11c^3f^2\Delta^2 + 2c\Delta^3,$$
$$A_6 = -9c^4f^6 + 30c^3f^4\Delta - 43c^2f^2\Delta^2 + 6c\Delta^3,$$
$$A_7 = 9c^4f^8 + 6c^3f^6\Delta - 11c^2f^4\Delta^2 + 12\Delta^4,$$
$$A_8 = 27c^5f^7 - 72c^4f^5\Delta + 39c^3f^3\Delta^2 - 10c^2f\Delta^2,$$
$$B_{11} = 6f\psi - A_1, \qquad \text{(II, § 3)}$$
$$B_{21} = 36\Delta\psi - A_2f,$$
$$B_{31} = -6^3\psi^2 + 144Tf^2\psi + A_4A_6 - 24T^2f^4,$$
$$B_{12} = 18A_4\psi - A_8f^2,$$
$$B_{22} = 108\psi^2 - 36Tf^2\psi + A_8f\Delta,$$
$$B_{32} = A_8B_{11},$$
$$B_{13} = -6^3\Delta\psi^2 + 18fA_5\psi - A_8A_8f,$$
$$B_{23} = 108Sf\psi^2 - 6(A_8f + 3A_5\Delta)\psi + A_8A_8\Delta,$$
$$B_{33} = A_8B_{12},$$
$$B = -3\cdot 6^4\psi^3 + 2\cdot 6^4Tf^2\psi^2 + 18(A_6A_4 - 4A_8f\Delta - 24T^2f^4)\psi + A_7A_8$$

entsprechen diese:

$$\Sigma K^6 = f^2\left(\frac{4}{15} + \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}}cv\right),$$

$$U = \frac{r}{90\sqrt{-5}}f^2(1 + 2\sqrt{3}sv),$$

$$\Sigma K^4(L\alpha x)^2 = -\frac{4r}{5\sqrt{3}}f^3v,$$

$$-10\Sigma K^2((L\alpha x)^2)^2 = f^4(3 + (8\sqrt{3}r - 1)v + 2v^2),$$

$$-75\Sigma K^5((L\alpha x)^2)^2$$
$$= f^5\left(\sqrt{3}sw + 3\frac{3\sqrt{3}r + 17}{4} + \frac{53\sqrt{3}r - 41}{4}v + 14\sqrt{3}r^3v^2\right),$$

$$S = c^2f^2(3 - v),$$

$$T = \frac{3}{2}c^3f^3(1 - v),$$

$$45Q = c^2f^2(-21 + 5v) = 45c^2f^2q,$$

$$\frac{29\cdot 45}{2}Q_1 = c^2f^2(-273 + 95v) = \frac{29\cdot 45}{2}c^2f^2q_1,$$

$$\frac{29\cdot 45}{2}Q_2 = c^3f^4(-159 + 370v - 65v^2) = \frac{29\cdot 45}{2}c^3f^4q_2,$$

$$A_1 = c^3f^6(3 - 6v + v^2 + 2v^3),$$
$$A_2 = c^4f^6(9 - 12v + 25v^2 - 6v^3),$$
$$A_3 = c^2f^4(3 - v + 2v^2),$$
$$A_4 = c^2f^4(3 - v - 2v^2),$$
$$A_5 = c^4f^6(9 - 11v^2 + 2v^3),$$
$$A_6 = c^4f^6(-9 + 30v - 43v^2 + 6v^3),$$
$$A_7 = c^4f^8(9 + 6v - 11v^2 + 12v^4),$$
$$A_8 = c^5f^7(27 - 72v + 39v^2 - 10v^3),$$
$$B_{11} = c^3f^6(w - c_1^3f^{-6}A_1),$$
$$B_{21} = c^4f^7(6vw - c_1^4f^{-6}A_2),$$
$$B_{31} = c^6f^{10}(-6w^2 + 36(1-v)w + c_1^6f^{-10}A_4A_6 - 54(1-v)^2),$$
$$B_{12} = c^5f^9(3c_1^2f^{-4}A_4w - c_1^5f^{-7}A_8),$$
$$B_{22} = c^6f^{10}(3w^2 - 9(1-v)w + c_1^5f^{-7}A_3v),$$
$$B_{32} = A_8B_{11},$$
$$B_{13} = c^7f^{12}(-6vw^2 + 3c_1^4f^{-6}A_5w - c_1^7f^{-10}A_3A_8),$$
$$B_{23} = c^8f^{13}(3(3-v)w^2 - (c_1^5f^{-7}A_8 + 3c_1^4f^{-6}A_5v)w + c_1^7f^{-11}A_3A_8v),$$
$$B_{33} = A_8B_{12},$$
$$B = c^9f^{15}\Big(-18w^3 + 108(1-v)w^2 + 3(c_1^6f^{10}A_4A_6 - 4c_1^5f^{-7}A_8v - 54(1-v)^2)w + c_1^9f^{-15}A_7A_8\Big).$$

XV, § 2.

Die absoluten Kovarianten

$$t = 450\sqrt{3}f^{-3}\Sigma K^4(L\alpha x)^2,$$
$$t_1 = 2700r^2f^{-4}\Sigma K^2((L\alpha x)^2)^2,$$
$$t_2 = 40500rf^{-5}\Sigma K^5((L\alpha x)^2)^2,$$

$$a_{31} = c_1^3f^{-6}A_1; \quad a_{32} = c_1^4f^{-6}A_2; \quad a_{21} = c_1^2f^{-4}A_3; \quad a_{22} = c_1^2f^{-4}A_4;$$
$$a_{33} = c_1^4f^{-6}A_5; \quad a_{34} = c_1^4f^{-10}A_6; \quad a_4 = c_1^4f^{-8}A_7; \quad a_{35} = c_1^5f^{-7}A_8;$$
$$b_{11} = c_1^3f^{-6}B_{11}; \quad b_{21} = c_1^4f^{-7}B_{21}; \quad b_{31} = c_1^6f^{-10}B_{31};$$
$$b_{12} = c_1^5f^{-9}B_{12}; \quad b_{22} = c_1^6f^{-10}B_{22}; \quad b_{32} = c_1^8f^{-13}B_{32};$$
$$b_{13} = c_1^7f^{-12}B_{13}; \quad b_{23} = c_1^8f^{-12}B_{23}; \quad b_{33} = c_1^{10}f^{-16}B_{33};$$
$$b = 6^5c_1^9f^{-15}R^2$$

haben die Werte:

$$t = -360rv,$$
$$t_1 = -270r^2(3 + (8\sqrt{3}r - 1)v + 2v^2),$$
$$t_2 = -810r\left(\frac{2s}{\sqrt{3}}w + \frac{3\sqrt{3}r + 17}{2} + \frac{53\sqrt{3}r - 41}{6}v + \frac{28}{\sqrt{3}}r^3v^2\right),$$

$$A_1 = 3c^3f^6 - 6c^2f^4\Delta + cf^2\Delta^2 + 2\Delta^3, \qquad \text{(XI, § 1)}$$
$$A_2 = 9c^4f^6 - 12c^3f^4\Delta + 25c^2f^2\Delta^2 - 6c\Delta^3,$$
$$A_3 = 3c^2f^4 - cf^2\Delta + 2\Delta^2,$$
$$A_4 = 3c^2f^4 - cf^2\Delta - 2\Delta^2,$$
$$A_5 = 9c^4f^6 - 11c^3f^2\Delta^2 + 2c\Delta^3,$$
$$A_6 = -9c^4f^6 + 30c^3f^4\Delta - 43c^2f^2\Delta^2 + 6c\Delta^3,$$
$$A_7 = 9c^4f^8 + 6c^3f^6\Delta - 11c^2f^4\Delta^2 + 12\Delta^4,$$
$$A_8 = 27c^5f^7 - 72c^4f^5\Delta + 39c^3f^3\Delta^2 - 10c^2f\Delta^2,$$
$$B_{11} = 6f\psi - A_1, \qquad \text{(II, § 3)}$$
$$B_{21} = 36\Delta\psi - A_2f,$$
$$B_{31} = -6^3\psi^2 + 144Tf^2\psi + A_4A_6 - 24T^2f^4,$$
$$B_{12} = 18A_4\psi - A_8f^2,$$
$$B_{22} = 108\psi^2 - 36Tf^2\psi + A_8f\Delta,$$
$$B_{32} = A_8B_{11},$$
$$B_{13} = -6^3\Delta\psi^2 + 18fA_5\psi - A_3A_8f,$$
$$B_{23} = 108Sf\psi^2 - 6(A_8f + 3A_5\Delta)\psi + A_3A_8\Delta,$$
$$B_{33} = A_8B_{12},$$
$$B = -3\cdot 6^4\psi^3 + 2\cdot 6^4Tf^2\psi^2 + 18(A_6A_4 - 4A_8f\Delta - 24T^2f^4)\psi + A_7A_8$$

entsprechen diese:

$$\Sigma K^6 = f^2\left(\frac{4}{15} + \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}}cv\right),$$
$$U = \frac{r}{90\sqrt{-5}}f^2(1 + 2\sqrt{3}sv),$$
$$\Sigma K^4(L\alpha x)^2 = -\frac{4r}{5\sqrt{3}}f^3v,$$
$$-10\Sigma K^3((L\alpha x)^2)^2 = f^4(3 + (8\sqrt{3}r - 1)v + 2v^2),$$
$$-75\Sigma K^5((L\alpha x)^2)^2$$
$$= f^5\left(\sqrt{3}sw + 3\frac{3\sqrt{3}r + 17}{4} + \frac{53\sqrt{3}r - 41}{4}v + 14\sqrt{3}r^3v^2\right),$$
$$S = c^2f^2(3 - v),$$
$$T = \frac{3}{2}c^3f^3(1 - v),$$
$$45Q = c^2f^2(-21 + 5v) = 45c^2f^2q,$$
$$\frac{29\cdot 45}{2}Q_1 = c^2f^2(-273 + 95v) = \frac{29\cdot 45}{2}c^2f^2q_1,$$
$$\frac{29\cdot 45}{2}Q_2 = c^3f^4(-159 + 370v - 65v^2) = \frac{29\cdot 45}{2}c^3f^4q_2,$$

$$A_1 = c^3 f^6(3 - 6v + v^2 + 2v^3),$$
$$A_2 = c^4 f^6(9 - 12v + 25v^2 - 6v^3),$$
$$A_3 = c^3 f^4(3 - v + 2v^2),$$
$$A_4 = c^3 f^4(3 - v - 2v^2),$$
$$A_5 = c^4 f^6(9 - 11v^2 + 2v^3),$$
$$A_6 = c^4 f^6(-9 + 30v - 43v^2 + 6v^3),$$
$$A_7 = c^4 f^8(9 + 6v - 11v^2 + 12v^4),$$
$$A_8 = c^5 f^7(27 - 72v + 39v^2 - 10v^3),$$
$$B_{11} = c^3 f^6(w - c_1^3 f^{-6} A_1),$$
$$B_{21} = c^4 f^7(6vw - c_1^4 f^{-6} A_2),$$
$$B_{31} = c^6 f^{10}(-6w^2 + 36(1-v)w + c_1^6 f^{-10} A_4 A_6 - 54(1-v)^2),$$
$$B_{12} = c^5 f^9(3c_1^2 f^{-4} A_4 w - c_1^5 f^{-7} A_8),$$
$$B_{22} = c^6 f^{10}(3w^2 - 9(1-v)w + c_1^5 f^{-7} A_3 v),$$
$$B_{32} = A_8 B_{11},$$
$$B_{13} = c^7 f^{12}(-6vw^2 + 3c_1^4 f^{-6} A_5 w - c_1^7 f^{-10} A_3 A_8),$$
$$B_{23} = c^8 f^{13}(3(3-v)w^2 - (c_1^5 f^{-7} A_8 + 3c_1^4 f^{-6} A_5 v)w + c_1^7 f^{-11} A_3 A_8 v),$$
$$B_{33} = A_8 B_{12},$$
$$B = c^9 f^{15}\big(-18w^3 + 108(1-v)w^2 + 3(c_1^6 f^{10} A_4 A_6 - 4c_1^5 f^{-7} A_8 v - 54(1-v)^2)w + c_1^9 f^{-15} A_7 A_8\big).$$

XV, § 2.

Die absoluten Kovarianten

$$t = 450\sqrt{3} f^{-3} \Sigma K^4 (L\alpha x)^2,$$
$$t_1 = 2700 r^2 f^{-4} \Sigma K^3 ((L\alpha x)^2)^2,$$
$$t_2 = 40500 r f^{-5} \Sigma K^5 ((L\alpha x)^2)^2,$$

$$a_{31} = c_1^3 f^{-6} A_1 ; \quad a_{32} = c_1^4 f^{-6} A_2 ; \quad a_{21} = c_1^2 f^{-4} A_3 ; \quad a_{22} = c_1^2 f^{-4} A_4;$$
$$a_{33} = c_1^4 f^{-6} A_5 ; \quad a_{34} = c_1^4 f^{-10} A_6 ; \quad a_4 = c_1^4 f^{-8} A_7 ; \quad a_{35} = c_1^5 f^{-7} A_8;$$
$$b_{11} = c_1^3 f^{-6} B_{11}; \quad b_{21} = c_1^4 f^{-7} B_{21}; \quad b_{31} = c_1^6 f^{-10} B_{31};$$
$$b_{12} = c_1^5 f^{-9} B_{12}; \quad b_{22} = c_1^6 f^{-10} B_{22}; \quad b_{32} = c_1^8 f^{-13} B_{32};$$
$$b_{13} = c_1^7 f^{-12} B_{13}; \quad b_{23} = c_1^8 f^{-12} B_{23}; \quad b_{33} = c_1^{10} f^{-16} B_{33};$$
$$b = 6^5 c_1^9 f^{-15} R^2$$

haben die Werte:

$$t = -360 r v,$$
$$t_1 = -270 r^2 (3 + (8\sqrt{3} r - 1) v + 2v^2),$$
$$t_2 = -810 r \left(\frac{2s}{\sqrt{3}} w + \frac{3\sqrt{3} r + 17}{2} + \frac{53\sqrt{3} r - 41}{6} v + \frac{28}{\sqrt{3}} r^3 v^2\right),$$

$$
\begin{aligned}
a_{21} &= 3 - v + 2v^2,\\
a_{22} &= 3 - v - 2v^2,\\
a_{31} &= 3 - 6v + v^2 + 2v^3,\\
a_{32} &= 9 - 12v + 25v^2 - 6v^3,\\
a_{33} &= 9 - 11v + 2v^3,\\
a_{34} &= -9 + 30v - 43v^2 + 6v^3,\\
a_{35} &= 27 - 72v + 39v^2 - 10v^3,\\
a_4 &= 9 + 6v - 11v^2 + 12v^4,\\
b_{11} &= w - a_{31},\\
b_{21} &= 6vw - a_{32},\\
b_{31} &= -6w^2 + 36(1-v)w + a_{22}a_{34} - 54(1-v)^2,\\
b_{12} &= 3a_{22}w - a_{35},\\
b_{22} &= 3w^2 - 9(1-v)w + a_{35}v,\\
b_{32} &= a_{35}b_{11},\\
b_{13} &= -6vw^2 + 3a_{33}w - a_{21}a_{35},\\
b_{23} &= 3(3-v)w^2 - (a_{35} + 3a_{33}v)w + a_{21}a_{35}v,\\
b_{33} &= a_{35}b_{12},\\
b &= -18w^3 + 108(1-v)w^2 + 3(a_{22}a_{34} - 54(1-v)^2 - 4a_{35}v)w + a_4a_{35}.
\end{aligned}
$$

XVI. Kapitel.

Die c_{ik}.

XVI, § 1.

Die Formen

$$
\begin{array}{lll}
D_{11} = 12a_x^4(af\bar{\varphi})^2 ; & D_{12} = 216a_x^4(af\bar{\varphi})(af\bar{\psi}) ; & D_{13} = 6^4a_x^4(af\bar{\psi})^2 ,\\
D_{21} = 72d_x^2\Delta_x(\Delta f\bar{\varphi})^2; & D_{22} = 216d_x^2\Delta_x(\Delta f\bar{\varphi})(\Delta f\bar{\psi}); & D_{23} = 6^4d_x^2\Delta_x(\Delta f\bar{\psi})^2,\\
D_{31} = 2\cdot 6^3(\Theta f\bar{\varphi})^2 ; & D_{32} = 6^4(\Theta f\bar{\varphi})(\Theta f\bar{\psi}) ; & D_{33} = 3\cdot 6^5(\Theta f\bar{\psi})^2 ,\\
C_{11} = 12a_x^4(af\bar{\varphi})^2 ; & C_{12} = 216a_x^4(af\bar{\varphi})(af\bar{\psi}) ; & C_{13} = 6^4a_x^4(af\bar{\psi})^2 ,\\
C_{21} = 72(\varphi f\bar{\varphi})^2 ; & C_{22} = 216(\varphi f\bar{\varphi})(\varphi f\bar{\psi}) ; & C_{23} = 6^4(\varphi f\bar{\psi})^2 ,\\
C_{31} = 2\cdot 6^3(\psi f\bar{\varphi}) ; & C_{32} = 6^4(\psi f\bar{\varphi})(\psi f\bar{\psi}) ; & C_{33} = 3\cdot 6^5(\psi f\bar{\psi})^2
\end{array}
$$

lassen sich mittels der Formeln

$$\varphi_y = \Delta_y; \quad \varphi_{y^2} = \Delta_{y^2} - \frac{2c}{11}ff_{y^2} + \frac{2c}{11}f_y^2, \qquad \text{(XIII, § 1)}$$

$$\psi_y = \Theta_y + Q(f\Delta_y - \Delta f_y); \quad (\psi\bar{f}u)^2 = (\Theta\bar{f}u)^2 + Q_1f(\Delta\bar{f}u)^2 + Q_2a_x^4(af\bar{u})^2 - \frac{2c}{87}f(\bar{\Delta}\bar{f}u)^2 \qquad \text{(XIV, § 1)}$$

ls Aggregate der B_{ik} darstellen. Die Formeln lauten:

$$)_{11} = B_{11};\quad D_{12} = B_{12} + 18fQB_{11};\quad D_{13} = B_{13} + 12fQB_{12} + 108f^2Q^2B_{11};$$
$$)_{21} = B_{21};\quad D_{22} = B_{22} + 3fQB_{21};\quad D_{23} = B_{23} + 12fQB_{22} + 18f^2Q^2B_{21};$$
$$)_{31} = B_{31};\quad D_{32} = B_{32} + 3fQB_{22};\quad D_{33} = B_{33} + 36fQB_{32} + 54f^2Q^2B_{31};$$
$$'_{11} = D_{11} = B_{11};\quad C_{12} = D_{12} = B_{12} + 18fQB_{11};$$
$$'_{13} = D_{13} = B_{13} + 12fQB_{12} + 108f^2Q^2B_{11};$$
$$'_{21} = D_{21} - \frac{12}{11}D_{11} = B_{21} - \frac{12}{11}cfB_{11};$$
$$'_{22} = D_{22} - \frac{2}{11}cD_{12} = B_{22} + 3fQB_{21} - \frac{2}{11}cfB_{12} - \frac{36}{11}cf^2Q^2B_{11};$$
$$'_{23} = D_{23} - \frac{2}{11}cfD_{13} = B_{23} + 12fQB_{22} + 18f^2Q^2B_{21} - \frac{2c}{11}fB_{13} - \frac{24}{11}cf^2Q^2B_{12} - \frac{216}{11}cf^3QB_{11};$$
$$'_{31} = D_{31} + 6Q_1fD_{21} + 36Q_2D_{11} = B_{31} + 6Q_1fB_{21} + 36Q_2B_{11};$$
$$'_{32} = D_{32} + 6Q_1fD_{22} + 6Q_2D_{12} = B_{32} + 3QfB_{31} + 6Q_1fB_{22} + 18QQ_1f^2B_{21} + 6Q_2B_{12} + 108fQQ_2B_{11};$$
$$'_{33} = D_{33} + 18Q_1fD_{23} + 18Q_2D_{13} - \frac{2}{29}fB$$
$$= \begin{cases} B_{33} + 36fQB_{32} + 54f^2Q^2B_{31} + 18fQ_1B_{23} + 216f^2QQ_1B_{22} \\ \quad + 324f^3Q^2Q_1B_{21} + 18Q_2B_{13} + 216fQQ_2B_{12} + 1944f^2Q^2Q_2B_{11} \\ \qquad - \frac{2}{29}cfB. \end{cases}$$

XVI, § 2.

Die Formen

$$c_{11} = c_1^3f^{-6}C_{11};\quad c_{12} = c_1^5f^{-9}C_{12};\quad c_{13} = c_1^7f^{-12}C_{13};\quad c_{21} = c_1^4f^{-7}C_{21};$$
$$c_{22} = c_1^6f^{-10}C_{22};\quad c_{23} = c_1^8f^{-13}C_{23};\quad c_{31} = c_1^6f^{-10}C_{31};\quad c_{32} = e_1^8f^{-13}C_{32};$$
$$c_{33} = c_1^{10}f^{-16}C_{33}$$

sind absolute Invarianten, also ganze Funktionen von v und w; sie lassen sich mittels der obigen Formeln als Aggregate der b_{ik} ausdrücken:

$$c_{11} = b_{11};\ c_{12} = b_{12} + 18qb_{11};\ c_{13} = b_{13} + 12qb_{12} + 108q^2b_{11};\ c_{21} = b_{21} - \frac{12}{11}b_{11};$$
$$c_{22} = b_{22} + 3qb_{21} - \frac{2}{11}b_{12} - \frac{36}{11}qb_{11};$$
$$c_{23} = b_{23} + 12qb_{22} + 18q^2b_{21} - \frac{2}{11}b_{13} - \frac{24}{11}qb_{12} - \frac{216}{11}q^2b_{11};$$
$$c_{31} = b_{31} + 6q_1b_{21} + 36q_2b_{11};$$
$$c_{32} = b_{32} + 3qb_{31} + 6q_1b_{22} + 18qq_1b_{21} + 6q_2b_{12} + 108qq_2b_{11};$$
$$c_{33} = b_{33} + 36qb_{32} + 54q^2b_{31} + 18q_1b_{23} + 216qq_1b_{22} + 324q^2q_1b_{21} + 18q_2b_{13} + 216qq_2b_{12} + 1944q^2q_2b_{11} - \frac{2}{29}b.$$

XVII. Kapitel.

Berechnung der Resolvente der ξ_ν.*)

XVII, § 1.

Die absoluten Kovarianten hängen nur von den Verhältnissen der

$$x_1,\ x_2,\ x_3$$

ab. Einfache Funktionen dieser Verhältnisse sind

$$\xi = 30sf^{-1}K^3,$$

$$\eta = 30\sqrt{3}rf^{-2}K(L\alpha x)^2.$$

Aus ihnen setzen sich u. a. die Koeffizienten p_ν der Gleichung

$$\Pi(x-\xi_\nu) = x^6 + p_1x^5 + p_2x^4 + p_3x^3 + p_4x^2 + p_5x + p_6,$$

sowie die Potenzsummen

$$\Sigma\xi^\nu = s_\nu$$

zusammen.

XVII, § 2.

$$p_1 = -30s; \qquad s_1 = 30s;$$

p_6 bestimmen wir aus den Formeln

$$p_6 = 900^3s^6f^{-6}U^3,$$

$$U = \frac{r}{90\sqrt{-5}}f^2(1+2\sqrt{3}sv), \qquad \text{(XV, § 1)}$$

es hat den Wert

$$p_6 = -5\sqrt{-5}r^3(1+2\sqrt{3}sv)^3.$$

s_2 berechnen wir aus den Formeln

$$s_2 = 900s^2f^{-2}\Sigma K^6,$$

$$\Sigma K^6 = f^2\left(\frac{4}{15} + \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}}cv\right), \qquad \text{(XV, § 1)}$$

es hat den Wert

$$s_2 = 900s^2\left(\frac{4}{15} + \frac{2s^2}{3\sqrt{-15}}cv\right).$$

XVII, § 3.

Aus der Formel (VIII, § 1)

$$\frac{2r^2}{5\sqrt{3}}K(L\alpha x)^2 = K^6 - \frac{r^2+4}{15}fK^3 + \sqrt{-5}rU$$

*) Diese Resolvente ist bereits von Hrn. Gerbaldi in seiner dritten Mitteilung *an den Circolo* Matematico di Palermo angegeben (1900, Rendiconti Bd. XIV).

folgt zwischen η und ξ die Relation

$$\xi^3 = \eta + q_1\xi + q_2,$$

wo

$$q_1 = \quad r + 8s,$$
$$q_2 = -\tfrac{5}{2}(1 + 2\sqrt{3}sv)$$

ist.

XVII, § 4.

Den Formeln

$$\Sigma K(L\alpha x)^2 = 0,$$
$$t = 450\sqrt{3}f^{-3}\Sigma K^4(L\alpha x)^2, \qquad \text{(XV, § 2)}$$
$$t_1 = 2700r^2f^{-4}\Sigma K^3((L\alpha x)^2)^2,$$
$$t_2 = 40500rf^{-5}\Sigma K^5((L\alpha x)^2)^2$$

entsprechen diese:

$$\Sigma\eta = 0,$$
$$\Sigma\xi\eta = t,$$
$$\Sigma\eta^2 = t_1,$$
$$\Sigma\xi\eta^2 = t_2.$$

XVII, § 5.

Aus den Formeln (XVII, § 3)

$$s_3 = t + q_1s_2 + q_2s_1,$$
$$t_1 + 6q_2^2 = s_4 - 2q_1s_3 + q_1^2s_2,$$
$$t_2 + 2q_2t_1 + q_2^2s_1 = s_5 - 2q_1s_4 + q_1^2s_3$$

kann man s_3, s_4, s_5 berechnen und aus ihnen mittels der Newtonschen Formeln die Koeffizienten

$$p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5.$$

Wir führen die Rechnung in etwas abgekürzter Art aus.

XVII, § 6.

$$s_2 = q_1s_1 + 6q_2,$$
$$p_1^2 = s_2 + 2p_2 = q_1s_1 + 6q_2 + 2p_2,$$
$$p_2 = \tfrac{1}{2}s_1^2 - \tfrac{1}{2}q_1s_1 - 3q_2$$
$$= 15(22s^2 + \sqrt{3}sv),$$
$$p_2 + q_2 + q_1^2 + q_1p_1 = \tfrac{3}{2}(51\sqrt{3}r + 19) + 10\sqrt{3}sv.$$

XVII, § 7.

$$q_1 + p_1 = r - 22s = 23r + 11\sqrt{3},$$
$$2q_1 + p_1 = 2(r - 7s),$$
$$3q_1 + p_1 = -6\sqrt{3}\,r^2,$$
$$4q_1 + p_1 = -8s^3.$$

XVII, § 8.

Nach den Newtonschen Formeln ist für $2 < n \leqq 6$

$$0 = s_n + p_1 s_{n-1} + p_2 s_{n-2} \cdots p_{n-1} s_1 + n p_n,$$

$$\begin{aligned} p_1 p_{n-1} - n p_n &= \Sigma(\eta + q_1\xi + q_2)\,(\xi^{n-2} + p_1\xi^{n-3} \cdots p_{n-2}) \\ &= \Sigma\xi\eta(\xi^{n-3} + p_1\xi^{n-4} \cdots p_{n-3}) + q_1(s_{n-1} + p_1 s_{n-2} \cdots p_{n-2} s_1) \\ &\qquad + q_2(s_{n-2} + p_1 s_{n-3} \cdots p_{n-3} s_1 + 6p_{n-2}) \\ &= \Sigma\xi\eta(\xi^{n-3} + p_1\xi^{n-4} \cdots p_{n-3}) - (n-1)q_1 p_{n-1} + (8-n)q_2 p_{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_n = -\frac{1}{n}\,\Sigma\xi\eta(\xi^{n-3} + p_1\xi^{n-4} \cdots p_{n-3}) + \frac{1}{n}\,((n-1)q_1 + p_1)p_{n-1} \\ - \frac{1}{n}\,(8-n)p_{n-2}q_2, \end{aligned}$$

$$p_3 = -\frac{1}{3}\,t + \frac{1}{3}\,(2q_1 + p_1)p_2 - \frac{5}{3}\,p_1 q_2,$$

$$p_4 = -\frac{1}{4}\,\Sigma\xi\eta(\xi + p_1) + \frac{1}{4}\,(3q_1 + p_1)p_3 - q_2 p_2,$$

$$p_5 = -\frac{1}{5}\,\Sigma\xi\eta(\xi^2 + p_1\xi + p_2) + \frac{1}{5}\,(4q_1 + p_1)p_4 - \frac{3}{5}\,q_2 p_3,$$

XVII, § 9.

$$p_3 = -\frac{1}{3}\,t + \frac{1}{3}\,(2q_1 + p_1)p_2 - \frac{5}{3}\,q_2 p_1$$

(XV, § 2)
$$\begin{aligned} &= 120rv + 10(r - 7s)(22s^2 + \sqrt{3}sv) - 125s(1 + 2\sqrt{3}sv) \\ &= 5\left(24rv + 2(r-7s)(22s^2 + \sqrt{3}sv) - 25(1 + 2\sqrt{3}sv)s\right) \\ &= 5\left(-(80s + 77\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}\,(8\sqrt{3}s + 7)v\right). \end{aligned}$$

XVII, § 10.

$$\begin{aligned} \Sigma\xi\eta(\xi + p_1) &= \Sigma\eta(\eta + q_1\xi + q_2 + p_1\xi) \\ &= t_1 + (p_1 + q_1)t, \\ \Sigma\xi\eta(\xi^2 + \xi p_1 + p_2) &= \Sigma\xi\eta(\eta + q_1\xi + q_2 + p_1\xi + p_2) \\ &= t_2 + \Sigma\eta((p_1 + q_1)(\eta + q_1\xi + q_2) + (q_2 + p_2)\xi) \\ &= t_2 + (p_1 + q_1)t_1 + (p_1 q_1 + q_1^2 + q_2 + p_2)t. \end{aligned}$$

XVII, § 11.

$$\tfrac{4}{15}p_4 = -\tfrac{1}{15}t_1 - \tfrac{1}{15}(p_1+q_1)t + \tfrac{1}{15}(p_1+3q_1)p_3 - \tfrac{4}{15}q_2p_2$$

(XV, § 2)
$$= \begin{cases} 18r^2(3+(8\sqrt{3}r-1)v+2v^2) + 24(r-22s)rv \\ -2\sqrt{3}r^2(-80s+77\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}(8\sqrt{3}s+7)v) \\ \qquad + 10(1+2\sqrt{3}sv)(22s^2+\sqrt{3}sv) \end{cases}$$
$$= -(68\sqrt{3}r+203) - 6\sqrt{3}(16r-3\sqrt{3})v + 3(4\sqrt{3}r-1)v^2.$$

XVII, § 12.

$$\tfrac{4}{3}p_5 = -\tfrac{4}{15}t_2 - \tfrac{4}{15}(p_1+q_1)t_1 - \tfrac{4}{15}(p_2+q_2+q_1^2+p_1q_1)t + \tfrac{4}{15}(p_1+4q_1)p_4 - \tfrac{4}{5}q_2p_3$$

XV, § 2)
$$= \begin{cases} 216r\left(\frac{2}{\sqrt{3}}sw + \frac{3\sqrt{3}s+17}{2} + \frac{53\sqrt{3}r-41}{6}v + \frac{28}{\sqrt{3}}r^3v^2\right) \\ +72r^2(3+(8\sqrt{3}r-1)v+2v^2)(r-22s) \\ \qquad +96rv\left(\frac{3}{2}(51\sqrt{3}r+19)+10\sqrt{3}sv\right) \\ -8s^3\left(-(68\sqrt{3}r+203)-6\sqrt{3}(16r-3\sqrt{3})v+3(4\sqrt{3}r-1)v^2\right) \\ +10\left((1+2\sqrt{3}sv)(-80s+77\sqrt{3})+3\sqrt{3}(8\sqrt{3}s+7)v\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 72\sqrt{3}w + 108r(3\sqrt{3}r+17) + 216r^2(r-22s) + 8s^3(68\sqrt{3}r+203) \\ \qquad -10(80s+77\sqrt{3}) \\ +v\begin{cases} 36r(53\sqrt{3}r-41)+72r^2(8\sqrt{3}r-1)(r-22s)+144r(51\sqrt{3}r+19) \\ +48\sqrt{3}s^3(16r-3\sqrt{3})+30\sqrt{3}(8\sqrt{3}s+7)-20\sqrt{3}s(80s+77\sqrt{3}) \end{cases} \\ +v^2(72\cdot28\sqrt{3}r^4+144r^2(r-22s)+480\sqrt{3}-24s^3(4\sqrt{3}r-1) \\ \qquad +180s(8\sqrt{3}s+7)) \end{cases}$$
$$= 72\sqrt{3}w - 170r - 207\sqrt{3} + 2\sqrt{3}(10\sqrt{3}r+127)v - 120s^3v^2.$$

XVII, § 13.

Trägt man diese Werte der Koeffizienten p_ν in die Formel XVII, § 1 ein, so wird sie:

$$\Pi_\nu(x-\xi_\nu)$$
$$= \begin{cases} x^6 - 30sx^5 + 15(22s^2+\sqrt{3}sv)x^4 \\ +5(-(80s+77\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}(8\sqrt{3}s+7)v)x^3 \\ +\frac{15}{4}(-(68\sqrt{3}r+203)-6\sqrt{3}(16r-3\sqrt{3}v)+3(4\sqrt{3}r-1)v^2)x^2 \\ +\frac{3}{4}(72\sqrt{3}w-170r-207\sqrt{3}+2\sqrt{3}(10\sqrt{3}r+127)v-120s^3v^2)x \\ +5\sqrt{-5}r^3(2\sqrt{3}sv+1)^3. \end{cases}$$

XVIII. Kapitel.

Herstellung der partiellen Differentialgleichungen.

XVIII, § 1.

Die Differentiale der Formen

$$f,\ \varphi,\ \psi$$

haben die Werte

$$\begin{aligned} df &= 6f_{dx}, \\ d\varphi &= 12\varphi_{dx}, \\ d\psi &= 30\psi_{dx} \\ d_2 f &= 30f_{dx^2} + 6f_{d_2x}, \\ d_2\varphi &= 132\varphi_{dx^2} + 12\varphi_{d_2x}, \\ d_2\psi &= 870\psi_{dx^2} + 30\psi_{d_2x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir wählen f, φ, ψ als unabhängige Variabeln, so daß

$$d_2 f = d_2\varphi = d_2\psi = 0$$

wird.

XVIII, § 2.

Diese Formeln lassen sich in die eine zusammenziehen:

$$\frac{\partial u_x}{\partial f} d_2 f + \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} d_2\varphi + \frac{\partial u_x}{\partial \psi} d_2\psi = 0.$$

Führt man die Bezeichnung ein

$$g_{x^2} = 30\frac{\partial u_x}{\partial f} f_{x^2} + 132\frac{\partial u_x}{\partial \varphi}\varphi_{x^2} + 870\frac{\partial u_x}{\partial \psi}\psi_{x^2}, \tag{2}$$

so wird diese Formel

$$d_2 u_x + g_{dx^2} = 0. \tag{2a}$$

XVIII, § 3.

$$R = (f\varphi\psi),$$

$$Rg_{dx} = (g\varphi\bar{\psi})f_{dx} + (g\bar{\psi}\bar{f})\varphi_{dx} + (g\bar{f}\,\bar{\varphi})\psi_{dx}$$

also nach (2a)

$$R^2 d_2 u_x + ((g\bar{\varphi}\bar{\psi})f_{dx} + (g\bar{\psi}\bar{f})\varphi_{dx} + (g\bar{f}\,\bar{\varphi})\psi_{dx})^2 = 0. \tag{3}$$

XVIII, § 4.

Aus dem totalen Differentiale $d_2 u_x$ lassen sich die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \bar{\varphi}^2},\quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi\,\partial\psi},\quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2}$$

mittels der Formel berechnen

$$d_2 u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial f^2} df^2 + \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2} d\varphi^2 + \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} d\psi^2 + 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial f \partial \varphi} df d\varphi + 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial f \partial \psi} df d\psi + 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi \partial \psi} d\varphi d\psi .$$

In der Identität

$$R^2 \Big(36 \frac{\partial^2 u_x}{\partial f^2} f_{dx}^2 + 144 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2} \varphi_{dx}^2 + 900 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} \psi_{dx}^2 + 144 \frac{\partial^2 u_x}{\partial f \partial \varphi} f_{dx} \varphi_{dx} + 360 \frac{\partial^2 u_x}{\partial f \partial \psi} f_{dx} \psi_{dx} + 720 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi \partial \psi} \varphi_{dx} \psi_{dx}\Big) + ((g\varphi\psi) f_{dx} + (g\psi f)\varphi_{dx} + (gf\varphi)\psi_{dx})^2 = 0$$

verschwinden die Koeffizienten von

$$f_{dx}^2,\ \varphi_{dx}^2,\ \psi_{dx}^2,\ f_{dx}\varphi_{dx},\ f_{dx}\psi_{dx},\ \varphi_{dx}\psi_{dx};$$

u. a. ergeben sich die Formeln

$$900 R^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} + (g\bar{f}\bar{\varphi})^2 = 0; \quad 360 R^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi \partial \psi} - (g\bar{f}\bar{\varphi})(g\bar{f}\bar{\psi}) = 0;$$

$$144 R^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2} + (g\bar{f}\bar{\psi})^2 = 0$$

und nach der Formel $R^2 = 6^{-5} c^9 f^{15} b$:

$$(4)\quad 25 \cdot 6^{-3} c^9 f^{15} b \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} + (g\bar{f}\bar{\varphi})^2 = 0; \quad 10 \cdot 6^{-3} c^9 f^{15} b \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi \partial \psi} - (g\bar{f}\bar{\varphi})(g\bar{f}\bar{\psi}) = 0;$$

$$4 \cdot 6^{-3} c^9 f^{15} b \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2} + (g\bar{f}\bar{\psi})^2 = 0.$$

XVIII, § 5.

Wir wenden uns nun zu den absoluten Kovarianten; sie lassen sich nach XV, § 1 als rationale Funktionen der Valentinerparameter

$$v = c_1 f^{-2} \Delta; \qquad w = 6 c_1^3 f^{-5} \psi$$

ausdrücken. Die partiellen Differentialquotienten dieser beiden Größen haben die Werte

$$\frac{\partial v}{\partial f} = -2 c_1 f^{-2} \varphi = -2 f^{-1} v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = c_1 f^{-2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \psi} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial f} = -30 c_1^3 f^{-6} \psi = -5 f^{-1} w,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \psi} = 6 c_1^3 f^{-5}.$$

XVIII, § 6.

Der Quotient

$$u = f^{-\frac{1}{6}} u_x$$

hängt nur von den Verhältnissen der x ab und ist daher eine Funktion von v, w.

Seine partiellen Differentialquotienten haben die Werte:

$$\frac{\partial u}{\partial f} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial f} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial f} = -f^{-1}\left(2v\frac{\partial u}{\partial v} + 5w\frac{\partial u}{\partial w}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \varphi} = c_1 f^{-2}\frac{\partial u}{\partial v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \psi} = 6c_1^3 f^{-5}\frac{\partial u}{\partial w},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = c_1 f^{-2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) = c_1^2 f^{-4}\frac{\partial^2 u}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \psi} = c_1 f^{-2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w}\frac{\partial w}{\partial \psi}\right) = 6c_1^4 f^{-7}\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 6c_1^3 f^{-5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial \psi}\right) = 36c_1^6 f^{-10}\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}.$$

Aus ihnen leiten wir die der Differentialquotienten von

$$u_x = f^{\frac{1}{6}} u$$

ab. Es wird

$$\frac{\partial u_x}{\partial f} = f^{\frac{1}{6}-1}\left(\frac{1}{6}u - 2v\frac{\partial u}{\partial v} - 5w\frac{\partial u}{\partial w}\right),$$

(5)
$$\frac{\partial u_x}{\partial \varphi} = c_1 f^{\frac{1}{6}-2}\frac{\partial u}{\partial v},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \psi} = 6c_1^3 f^{\frac{1}{6}-5}\frac{\partial u}{\partial w},$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2} = c_1^2 f^{\frac{1}{6}-4}\frac{\partial^2 u}{\partial v^2},$$

(6)
$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi \partial \psi} = 6c_1^4 f^{\frac{1}{6}-7}\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w},$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} = 36c_1^6 f^{\frac{1}{6}-10}\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}.$$

XVIII, § 7.

$(g\bar{f}u)^2$.

Nach (2) wird:

$$(g\bar{f}u)^2 = 30\frac{\partial u_x}{\partial f}a_x^4(a\bar{f}u)^2 + 132\frac{\partial u_x}{\partial \varphi}(\varphi\bar{f}u)^2 + 870\frac{\partial u_x}{\partial \psi}(\varphi\bar{f}u)^2.$$

$$= f^{\frac{1}{6}}\left(30f^{-1}\left(\frac{1}{6}u - 2v\frac{\partial u}{\partial v} - 5w\frac{\partial u}{\partial w}\right)a_x^4(afu)^2 + 132c_1f^{-2}\frac{\partial u}{\partial v}(\varphi\bar{f}u)^2 + 6\cdot 870c_1^3f^{-5}\frac{\partial u}{\partial w}(\psi\bar{f}u)^2\right)$$

$$= f^{\frac{1}{6}}\left(\left(-60f^{-1}va_x^4(a\bar{f}u)^2 + 132c_1f^{-2}(\varphi\bar{f}u)^2\right)\frac{\partial u}{\partial v} + \left(-150f^{-1}wa_x^4(a\bar{f}u)^2 + 6\cdot 870f^{-5}(\psi\bar{f}u)^2\right)\frac{\partial u}{\partial w} + 5f^{-1}a_x^4(a\bar{f}u)^2\right)$$

und nach Kapitel XVI

$$(g\bar{f}\bar{\varphi}) = c^3f^{5\frac{1}{6}}\left(\left(-5vc_{11} + \frac{11}{6}c_{21}\right)\frac{\partial u}{\partial v} + \left(-\frac{25}{2}wc_{11} + \frac{145}{12}c_{31}\right)\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{5}{12}c_{11}u\right),$$

$$(g\bar{f}\bar{\varphi})(g\bar{f}\bar{\psi}) = c^5f^{8\frac{11}{6}}\left(\left(-\frac{5}{18}vc_{12} + \frac{11}{18}c_{22}\right)\frac{\partial u}{\partial v} + \left(-\frac{25}{36}wc_{12} + \frac{145}{36}c_{32}\right)\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{5}{216}c_{12}u\right),$$

$$(g\bar{f}\bar{\psi}) = c^7f^{11\frac{1}{6}}\left(\left(-\frac{5}{108}vc_{13} + \frac{11}{108}c_{23}\right)\frac{\partial u}{\partial v} + \left(-\frac{25}{216}wc_{13} + \frac{145}{3\cdot 6^3}c_{33}\right)\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{5}{6^4}c_{13}u\right).$$

XVIII, § 8.

Trägt man in Formel (2) für die Größen

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi^2},\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial \varphi \partial \psi},\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2},\ (g\bar{f}\bar{\varphi})^2,\ (g\bar{f}\bar{\varphi})(g\bar{f}\bar{\psi}),\ (g\bar{f}\bar{\psi})^2$$

ihre Werte aus (6) und (7) ein und ersetzt man u durch die Variable y, so erhält man *die partiellen Differentialgleichungen*

$$b\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = \left(\frac{5}{2}vc_{13} - \frac{11}{2}c_{23}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \left(\frac{25}{4}wc_{13} - \frac{145}{12}c_{33}\right)\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{5}{24}c_{13}y,$$

$$b\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} = \left(-vc_{12} + \frac{11}{5}c_{22}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \left(-\frac{5}{2}wc_{12} + \frac{29}{2}c_{32}\right)\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{1}{12}c_{12}y,$$

$$b\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} = \left(\frac{6}{5}vc_{11} - \frac{11}{25}c_{21}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \left(3wc_{11} - \frac{29}{10}c_{31}\right)\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{1}{10}c_{11}y.$$

Sie haben die allgemeine Lösung

$$u = f^{-\frac{1}{6}}(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$$

und die Partikularlösungen

$$f^{-\frac{1}{6}} x_1, \quad f^{-\frac{1}{6}} x_2, \quad f^{-\frac{1}{6}} x_3.$$

Mit der expliziten Angabe dieser Differentialgleichungen ist das Resultat, welches Herr Lachtin 1902 im 56ten Bande der Math. Annalen gegeben hat, in der hier beabsichtigten Weise vervollständigt.

Erlangen, im Herbst 1905.

Über einen Satz von Tschebyschef.

Von

Edmund Landau in Berlin.

§ 1.

Es bezeichne $f(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$, welche die Form $4n+3$ haben, $g(x)$ die Anzahl der Primzahlen $4n+1 \leqq x$. Dann ist nach einem schon von Dirichlet*) vermuteten, aber erst von Herrn de la Vallée Poussin**) bewiesenen Satze

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Diese Gleichung folgt nämlich unmittelbar aus Herrn de la Vallée Poussins***) Relationen

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\frac{x}{\log x}} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{g(x)}{\frac{x}{\log x}} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Da

$$\lim_{x=\infty} \frac{Li(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

ist, wo $Li(x)$ den Integrallogarithmus von x bedeutet, lassen sich die Gleichungen (1) auch so schreiben:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x}\left(f(x) - \frac{1}{2} Li(x)\right) = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\log x}{x}\left(g(x) - \frac{1}{2} Li(x)\right) = 0.$$

*) „Beweis des Satzes, daß jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält", Abhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1837, S. 45; Werke, Bd. 1, 1889, S. 315.

**) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2, 1896, S. 281—362.

***) l. c., S. 360, Gleichung (13).

Kürzlich habe ich*) nachgewiesen, daß sogar für jedes m

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(f(x)-\frac{1}{2}Li(x)\right)=0, \quad \lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(g(x)-\frac{1}{2}Li(x)\right)=0$$

ist. Hieraus folgt

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^m x}{x}\left(f(x)-g(x)\right)=0.$$

Die Differenz $f(x)-g(x)$ ist also für $x=\infty$ von geringerer Größenordnung als $f(x)$, als $g(x)$ und sogar als $\frac{x}{\log^m x}$, wo m irgend eine Konstante bezeichnet.

Über das Vorzeichen von $f(x)-g(x)$, sowie über die Frage nach einer unteren Schranke für die Größenordnung dieser Differenz liefern diese asymptotischen Resultate offenbar keinen Aufschluß.

In dieser Richtung liegt nun ein Satz, den Tschebyschef**) im Jahre 1853 ohne Beweis in folgendem Wortlaut veröffentlicht hat:

Si de la totalité des nombres premiers de la forme $4n+3$, on retranche celle des nombres premiers de la forme $4n+1$, et que l'on divise ensuite cette différence par la quantité $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$, on trouvera plusieurs valeurs de x telles, que ce quotient s'approchera de l'unité aussi près qu'on le voudra.

Tschebyschef spricht also in sehr klaren Worten folgenden Satz aus:

Wenn zwei positive Größen δ und x_0 gegeben sind, so gibt es oberhalb x_0 ein $x=x(\delta, x_0)$, *so daß die Ungleichung*

$$\left|\frac{f(x)-g(x)}{\frac{\sqrt{x}}{\log x}}-1\right|<\delta \tag{2}$$

erfüllt ist.

Dieser Satz ist zuerst im Jahre 1891 von Herrn Phragmén***) bewiesen worden, mit Anwendung der Theorie der Funktionen complexen Argumentes und insbesondere eines funktionentheoretischen Hilfssatzes, den der Verfasser zu diesem Zweck entwickelt hat.

Dies ist zur Zeit der einzige Beweis des Tschebyschefschen Satzes. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, muß ich eine Reihe anderer

*) „Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2ª, 1903, S. 532, Gleichung (48).

**) „Lettre de M. le professeur Tchébychev à M. Fuss, sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenus dans les formes $4n+1$ et $4n+3$", Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des Sciences, Bd. 11, St. Petersburg, S. 208; Œuvres, Bd. 1, 1899, S. 697.

***) „Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann", Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Bd. 48, S. 599—616.

Arbeiten besprechen, welche sich mit dem Gegenstand beschäftigen und vermeintliche Beweise des Tschebyschefschen Satzes enthalten.

I) Polignac*) hat im Jahre 1859 eine Untersuchung über die Verteilung der Primzahlen $4n+1$ und $4n+3$ veröffentlicht, in welcher er den Tschebyschefschen Satz zu beweisen glaubt. Er bildet richtig eine Identität, auf welche auch Tschebyschef im Briefe an Fuss anspielt; sie ist eine Verallgemeinerung derjenigen, welche den früheren unabhängig entstandenen Untersuchungen von Tschebyschef und Polignac über die Verteilung der Primzahlen zugrunde liegt. Polignacs Schlußfolgerungen aus jener Identität sind jedoch heuristischer Natur und enthalten im übrigen nicht einmal dem Wortlaut nach das zu beweisende Resultat, welches Polignac nur in der unscharfen Form zitiert: „pour x très-grand, le premier terme de la différence des nombres premiers de la forme $4n+3$ et $4n+1$ est $\frac{1}{\log x}$".

II) Im Jahre 1896 hat Herr Cesàro**) eine Abhandlung über unseren Gegenstand veröffentlicht. Seine Schlüsse enthalten jedoch am Anfang eine auch beim heutigen Stande der Wissenschaft unausfüllbare Lücke. Der Verfasser setzt nämlich als selbstverständlich voraus, daß die unendliche Reihe

$$\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}-\cdots=\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s}, \tag{3}$$

wo p alle ungeraden Primzahlen durchläuft, für reelle $s>\frac{1}{2}$ konvergiert. Tatsächlich weiß man über diese Reihe, welche offenbar für $\Re(s)>1$ konvergiert, nur noch durch Herrn Mertens***), daß sie für $s=1$ konvergiert, d. h. daß die Reihe

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\cdots \tag{4}$$

konvergent ist, und durch Herrn de la Vallée Poussin†), daß sie für alle s mit reellem Teil 1 konvergiert.

Übrigens ist Herrn Cesàro, wie er am Anfang††) bemerkt, bei der

*) „Nouvelles recherches sur les nombres premiers (suite)", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 49, S. 386—387.

**) „Sulla distribuzione dei numeri primi", Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, Ser. 3, Bd. 2, S. 297ff.

***) „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, 1874, S. 55—56.

†) Vergl. die auf S. 527, Anm. **) zitierte Arbeit, S. 361. Es folgt ohne weiteres aus dem dort mit 5° bezeichneten Satze.

††) l. c., S. 297.

Veröffentlichung seiner Arbeit die Tschebyschefsche Note aus dem Jahre 1853 unzugänglich gewesen; er hatte nur eine spätere Abhandlung*) von Tschebyschef gelesen, welche die obige präzise Formulierung des Satzes nicht enthält, sondern nur die sehr populäre Aussage: „Il y a une différence notable dans la répartition des nombres premiers, des deux formes $4n+3, 4n+1$: la première forme en contient beaucoup plus que la seconde." Es ist — von der Lücke im Beweise ganz abgesehen — der in der Ungleichung (2) bestehende Tschebyschefsche Satz nicht in vollem Umfang in Herrn Cesàros Arbeit entwickelt. Herr Cesàro ist also im Irrtum, wenn er später**) unter genauer Wiedergabe der betreffenden Stelle aus Tschebyschefs Brief an Fuss meint, zu dem Satz in seiner Arbeit gelangt zu sein.

Da einmal von der Reihe (4)

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\cdots$$

die Rede war, benutze ich diese Gelegenheit zu einigen historischen Mitteilungen über dieselbe, welche mehrere verbreitete Irrtümer richtig stellen sollen. Schon Euler***) hatte mit dem Produkte

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}}$$

gerechnet, ohne dessen Konvergenz zu beweisen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ohne die Konvergenz der Reihe (4) zu beweisen. Dieser unendlichen Reihe widmete Euler — gleichfalls ohne Rücksicht auf die Konvergenzfrage — später eine besondere Abhandlung†). Merkwürdigerweise operiert auch Tschebyschef in einer Arbeit††) aus dem Jahre 1851 mit der Reihe (4), ohne ihre Konvergenz zu beweisen. Tatsächlich

*) „Sur une transformation de séries numériques", Nouvelle correspondance mathématique, Bd. 4, 1878, S. 305 ff.

**) L'intermédiaire des mathématiciens, Bd. 7, 1900, S. 386—387.

***) „Introductio in analysin infinitorum", Bd. 1, Lausanne, 1748, S. 241.

†) „De summa seriei ex numeris primis formatae $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}+\frac{1}{31}$ etc. ubi numeri primi formae $4n-1$ habent signum positivum, formae autem $4n+1$ signum negativum", Opuscula analytica, Bd. 2, St. Petersburg, 1785, S. 240 ff.; commentationes arithmeticae collectae, Bd. 2, St. Petersburg, 1849, S. 116 ff.

††) „Note sur différentes séries", Journal de mathématiques pures et appliquées, *Ser. 1*, Bd. 16, S. 343—346; Œuvres, Bd. 1, S. 105—108.

begründet Tschebyschef an jener Stelle höchstens die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{s=1}\left(\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\cdots\right), \tag{5}$$

wo s von rechts an 1 heranrückt, und er bestimmt diese Konstante numerisch auf mehrere Dezimalstellen genau*). Wenn die Konvergenz der Reihe (4) festgestellt ist, so ist ihr Wert tatsächlich gleich jener Zahl (5).

Nun ist ja, wie schon oben**) bemerkt, von Herrn Mertens die Konvergenz der Reihe (4) bewiesen worden, so daß alle hieraus früher gezogenen Schlüsse gerechtfertigt sind. Folgende Gründe lassen jedoch die Entscheidung der Frage nach dem wahren Konvergenzbereich der Reihe

$$\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}-\cdots, \tag{3}$$

insbesondere die etwaige Bestätigung der Vermutung ihrer Konvergenz für $s>\frac{1}{2}$, als in weiter Ferne liegend erscheinen. Wenn die Reihe für $s>\frac{1}{2}$ konvergiert, so konvergiert sie — als Dirichletsche Reihe — in allen Punkten der Halbebene $\Re(s)>\frac{1}{2}$. Dasselbe gilt alsdann auch von der unendlichen Reihe

$$\sum_p\left(-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}-\frac{1}{2p^{2s}}-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{3p^{3s}}-\frac{1}{4p^{4s}}-\cdots\right)=\sum_p\log\left(1-\frac{1}{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p^s}\right),$$

da die Zusatzreihe

$$\sum_p\left(-\frac{1}{2p^{2s}}-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{3p^{3s}}-\cdots\right)$$

in jener Halbebene konvergiert. Also würde das Produkt

$$\prod_p\frac{1}{1-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}}$$

für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ konvergieren und eine reguläre, nicht verschwindende analytische Funktion von s darstellen. Die für $\Re(s)>1$ gültige Gleichung

$$1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}=\prod_p\frac{1}{1-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}} \tag{6}$$

*) Dieser Wert findet sich auch schon in der auf S. 530, Anm. †) zitierten Eulerschen Abhandlung auf S. 254 bezw. S. 125.

**) s. S. 529.

würde also für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ gelten und zeigen, daß die für $\Re(s) > 0$ konvergente unendliche Reihe in (6) in der Halbebene $\Re(s) > \frac{1}{2}$ nirgends verschwindet. Der etwaige Nachweis der Richtigkeit dieser Vermutung wäre ein analoges, also wohl ebenso schwieriges Problem wie die Entscheidung der zur Zeit noch offenen Frage, ob wirklich die Riemannsche Zetafunktion in der Halbebene $\Re(s) > \frac{1}{2}$ von 0 verschieden ist.

Herr Torelli glaubte neuerdings im Kap. 11 seiner großen Monographie*) über das Primzahlproblem den Beweis der Richtigkeit der Gleichung (6), also der Konvergenz des darin rechts auftretenden Produktes für alle reellen $s > 0$ erbracht zu haben. Er entwickelt nämlich dort vermeintlich allgemein für $s > 0$ die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}, \tag{7}$$

wo $\chi(n)$ ein vom Hauptcharakter verschiedener Charakter modulo M ist**). Schon aus der Konvergenz des Produktes in (7) für alle $s > \frac{1}{2}$ würde die Konvergenz der Reihe

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \tag{8}$$

für $s > \frac{1}{2}$ folgen, also für $\Re(s) > \frac{1}{2}$, also die Richtigkeit der Gleichung (7) für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ und das Nichtverschwinden der Reihe

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{9}$$

für $\Re(s) > \frac{1}{2}$***). Jedoch enthält Herrn Torellis Beweisführung einen unheilbaren Fehlschluß†). Aus der Tatsache, daß eine gewisse Funktion $G(x)$ für jedes konstante m die Gleichung

*) „Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato", Atti della R. Accademia delle science fisiche e matematiche di Napoli, Ser. 2, Bd. 11, 1901.

**) Im vorliegenden Fall ist $M = 4$.

***) Dies bemerkt Herr Torelli nicht einmal und schließt (l. c., S. 158) aus (7) nur: „alle Nullstellen der Reihe (9), deren reeller Teil zwischen 0 und 1 liegt, sind nicht reell."

†) l. c., S. 157, Z. 9—10.

$$\lim_{x=\infty} (G(x+m) - G(x)) = 0$$

erfüllt, schließt nämlich der Verfasser, daß $\lim_{x=\infty} G(x)$ existiert.

Die irrtümliche Annahme, die Gleichung (7) sei für irgend ein $s<1$ bewiesen, findet sich noch in einer kürzlich erschienenen Notiz von Herrn Pellet*). Die Schlüsse, welche derselbe aus (7) zieht, sind daher unzulässig.

Ich erwähne noch, daß ich im Schlußparagraphen meiner Arbeit**) über die arithmetische Progression den Nachweis geführt habe, daß die unendliche Reihe

$$\sum_p \frac{\chi(p)\log^m p}{p^s} \tag{10}$$

für jedes reelle m und jedes s mit dem reellen Teil 1 konvergiert. Wäre für irgend ein $s<1$ die Konvergenz der Reihe (8) bekannt, so würde diese Reihe (8) für den in der Konvergenzhalbebene gelegenen Punkt $s = 1 + ti$ gliedweise differentiierbar sein; die Konvergenz von (10) wäre also für jedes ganzzahlige positive m, also für jedes reelle m selbstverständlich, und ich hätte einen überflüssigen analytischen Apparat aufgeboten. Aus diesem Grunde habe ich hier Wert darauf gelegt, die Unrichtigkeit aller bisherigen Begründungen der Konvergenz von (8) für irgend ein $s<1$ zu konstatieren. Ich darf hinzufügen, daß ich den Herren Cesàro und Torelli von meinen Einwänden schon vor einiger Zeit Kenntnis gegeben habe, und daß sie die Berechtigung derselben anerkennen***).

III) Herr Torelli bemerkt in einer Note†) aus dem Jahre 1902, der Tschebyschefsche Satz über die Verteilung der Primzahlen $4n+1$ und $4n+3$ folge als Korollar aus Herrn Poincarés††) Untersuchungen über die komplexen Primzahlen $a+bi$. Dies ist jedoch nicht der Fall. Herr Poincaré beweist nur diejenigen Sätze, die man später zu der Folgerung

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

*) Sur un théorème de Lejeune-Dirichlet", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, Bd. 136, 1903, S. 1235—1236.

**) l. c. (vergl. S. 528, Anm. *)), S. 533—535.

***) Vergl. auch die entsprechende Mitteilung Herrn Torellis am Ende der Rezension von Herrn Vecchi über sein Buch, Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, Bd. 6, 1903, S. 48.

†) „Sur quelques théorèmes de M. Poincaré sur les idéaux premiers", Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Bd. 16, S. 100.

††) „Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff", Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 8, 1892, S. 25 ff.

verschärft hat und deren Wortlaut symmetrisch in den beiden Primzahlarten $4n+1$ und $4n+3$ ist, da nur die Glieder höchster Größenordnung betrachtet werden.

Im folgenden beabsichtige ich nun einen neuen Beweis des Tschebyschefschen Satzes mitzuteilen, welcher einfacher ist als der Phragménsche. Ich beginne damit, in § 2 einen allgemeinen Satz über Dirichletsche Reihen zu entwickeln, der auch an sich von Interesse erscheint. In § 3 beweise ich dann unter Anwendung dieses Hilfssatzes den Tschebyschefschen Satz. In § 4 ziehe ich einige andere Folgerungen aus den analytischen Hilfsbetrachtungen.

§ 2.

Wenn eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{11}$$

mit endlichem Konvergenzradius R vorgelegt ist, so folgt bekanntlich ohne spezielle Voraussetzungen aus der Tatsache, daß die Reihe in einem bestimmten Punkte auf dem Konvergenzkreise konvergiert oder divergiert, nichts über die Frage, ob jener Punkt ein regulärer oder singulärer Punkt der durch die Reihe definierten analytischen Funktion ist. Es kann sich eben in beiden Fällen beides ereignen. Manchmal jedoch kann man aus den Koeffizienten der Reihe Folgerungen über die analytische Natur eines Randpunktes ziehen; in dieser Richtung liegen ja zahlreiche Arbeiten der neueren Zeit. Einer der einfachsten Sätze dieser Art lautet:

Sind alle Koeffizienten von einer gewissen Stelle an positiv, ist also

$$a_n > 0 \quad \textit{für} \quad n \geqq m,$$

so ist der positive Punkt $x = R$ des Konvergenzkreises sicher singulär, mag die Reihe dort konvergieren oder nicht.

Dieser Satz wurde trotz seiner Einfachheit zuerst im Jahre 1893 von Herrn Vivanti*) ausgesprochen. Ein Beweis wurde etwa gleichzeitig von Herrn Pringsheim**) veröffentlicht; derselbe lautet folgendermaßen. $\xi = re^{\varphi i}$ sei irgend ein Punkt im Konvergenzkreise. Dann ist für $n \geqq m$

$$\left| \frac{1}{n!} \mathfrak{P}^{(n)}(\xi) \right| = \left| \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu \xi^{\nu-n} \right| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu r^{\nu-n}.$$

*) „Sulle serie di potenze", Rivista di matematica, Bd. 3, S. 112.

**) „Über Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylorsche Reihenentwickelung besitzen", *Mathematische* Annalen, Bd. 44, 1894, S. 42.

Die Koeffizienten der in der Umgebung von $\xi = re^{\varphi i}$ für konstantes r $\left(\text{z. B. } r = \frac{R}{2}\right)$ gültigen Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathfrak{P}^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n \tag{12}$$

erreichen also von dem Index $n = m$ ab durchweg ihre Maximalwerte, wenn gerade $\varphi = 0$, $\xi = r$ ist. Daher ist der Konvergenzkreis der Reihe (12) für keine Stelle ξ mit dem absoluten Betrage r kleiner als für $\xi = r$ selbst; da auf dem Konvergenzkreise $|x| = R$ der ursprünglichen Reihe mindestens eine singuläre Stelle liegen muß, da also mindestens einer der Konvergenzkreise von (12) für $\xi = re^{\varphi i}$ gerade den Radius $R - r$ haben muß, so muß dies sicher für den auf $\xi = r$ bezüglichen der Fall sein, d. h. $x = R$ ist eine singuläre Stelle.

Derselbe Beweis steht auch in den Büchern von Herrn Hadamard*) und Herrn Vivanti.**)

Ein anderer Beweis des Satzes lautet folgendermaßen: Es sei beständig $a_n > 0$; dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da es sich — unter der Voraussetzung $a_n > 0$ für $n \geqq m$ — stets durch Addition einer ganzen rationalen Funktion erreichen läßt. Gesetzt, der Punkt $x = R$ wäre regulär, dann hätte die in der Umgebung von $x = r$ $\left(0 < r < R, \text{ z. B. } r = \frac{R}{2}\right)$ gebildete Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu r^{\nu-n}(x-r)^n \tag{13}$$

einen Konvergenzradius $\varrho > R - r$. Es sei $R + p$ irgend eine Zahl zwischen R und $r + \varrho$, also $0 < p < r + \varrho - R$. Dann wäre die Reihe (13) für $x = R + p$ konvergent. Diese Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} a_\nu r^{\nu-n}(R+p-r)^n$$

ist eine Doppelreihe mit positiven Gliedern, läßt sich also beliebig ordnen. Es wäre also die durch Vertauschung der Summationsfolge entstehende Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu \sum_{n=0}^{\nu} \binom{\nu}{n} \left(\frac{R+p-r}{r}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu \left(1 + \frac{R+p-r}{r}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (R+p)^\nu$$

*) „La série de Taylor et son prolongement analytique", Paris 1901, S 21.

**) „Teoria delle funzioni analitiche", Mailand 1901, S. 369—370; deutsche Ausgabe von Gutzmer (Leipzig, 1906), S. 399.

konvergent, d. h. die Potenzreihe (11) würde in dem außerhalb ihres Konvergenzkreises gelegenen Punkte $R + p$ konvergieren.

Dieser Beweis hat vor dem ersten den Vorzug, daß er den Satz von der Existenz eines singulären Punktes auf dem Rande des Konvergenzkreises einer Potenzreihe nicht voraussetzt; aber schließlich ist es ja gleichgültig, ob man den einen oder anderen Weg einschlägt.

Ganz anders verhält es sich, wenn man die analogen Fragen für Dirichletsche Reihen untersucht, d. h. für Reihen von der Form

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

oder allgemeiner

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ eine monoton ins Unendliche wachsende Folge positiver Größen ist. Bekanntlich ist das Konvergenzgebiet einer solchen Reihe — von den beiden extremen Fällen abgesehen, daß die Reihe nirgends oder überall konvergiert — eine Halbebene, d. h. es gibt eine bestimmte reelle Zahl σ, so daß die Reihe für $\Re(s) < \sigma$ divergiert, dagegen für $\Re(s) > \sigma$ konvergiert und (wegen der gleichmäßigen Konvergenz in einer gewissen Umgebung jeder Stelle dieser Halbebene) eine analytische Funktion darstellt. Das Verhalten auf der „Grenzgeraden" bleibt ebenso unbestimmt, wie das Verhalten der Potenzreihen (die ja für $\lambda_n = n$ einen Spezialfall der Dirichletschen Reihen darstellen) auf dem Rande des Konvergenzkreises. Nun ist aber bekanntlich auf der Grenzgeraden $\Re(s) = \sigma$ einer Dirichletschen Reihe nicht notwendig eine singuläre Stelle der durch sie in der Halbebene $\Re(s) > \sigma$ definierten analytischen Funktion gelegen; z. B. hat die Dirichletsche Reihe

$$1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots$$

die Grenzgerade $\Re(s) = 0$ und stellt doch eine ganze transzendente Funktion, nämlich $\left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\zeta(s)$, dar. Wenn also für Dirichletsche Reihen ein analoger Satz zu dem obigen Satze über Potenzreihen vorhanden ist, so würde sicher die erste der beiden angeführten Beweismethoden versagen. Tatsächlich ist aber, wie nunmehr gezeigt werden soll, die zweite Methode imstande, den Satz zu beweisen:

Wenn alle Koeffizienten einer Dirichletschen Reihe von einer gewissen Stelle an positiv sind, so ist der reelle Punkt ihrer Grenzgeraden eine singuläre Stelle der Funktion.

Zum Beweise darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß alle Koeffizienten a_n der gegebenen Reihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{14}$$

positiv sind, da man anderenfalls (wenn nur für $n \geqq m$ $a_n > 0$ ist) dies durch Addition einer ganzen transzendenten Funktion

$$\sum_{n=1}^{m-1} b_n e^{-\lambda_n s}$$

stets erreichen kann. Gesetzt nun, es sei die reelle Stelle σ der Grenzgeraden regulär, so würde, wenn σ_1 irgend eine Zahl $> \sigma$ ist (z. B. $\sigma_1 = \sigma + 1$) die Potenzreihe in der Umgebung von $s = \sigma_1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(\sigma_1)(s-\sigma_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma_1} (-\lambda_\nu)^n (s-\sigma_1)^n \tag{15}$$

einen Konvergenzradius $\varrho > \sigma_1 - \sigma$ haben. Es sei $\sigma - p$ irgend eine Zahl zwischen $\sigma_1 - \varrho$ und σ, also $0 < p < \varrho - (\sigma_1 - \sigma)$. Dann konvergiert die Reihe (15) für $s = \sigma - p$; d. h. die unendliche Doppelreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma_1} \lambda_\nu^n (\sigma_1 - \sigma + p)^n$$

mit positiven Gliedern konvergiert, also auch die durch Vertauschung der Summationsfolge entstehende Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_\nu (\sigma_1 - \sigma + p))^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma_1} e^{\lambda_\nu (\sigma_1 - \sigma + p)}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu (\sigma - p)};$$

d. h. die gegebene Dirichlet'sche Reihe (14) würde in dem links von der Grenzgeraden gelegenen Punkte $s = \sigma - p$ konvergieren.

Der hier bewiesene Satz ist, so viel ich weiß, bisher nirgends ausgesprochen oder angewendet worden. Es wird sich im folgenden zeigen, daß er manche bekannte Untersuchungen wesentlich abzukürzen gestattet. Dabei wird namentlich folgende Fassung angewendet werden:

Wenn von einer Dirichletschen Reihe, deren Koeffizienten von einer gewissen Stelle an positiv sind, bekannt ist, daß sie mindestens für $\Re(s) > \sigma$ konvergiert, und daß die durch sie dargestellte Funktion auf der Strecke $\sigma_0 < s \leqq \sigma$ sich regulär verhält (wo σ_0 irgend eine reelle Zahl $< \sigma$ ist), so konvergiert die Reihe mindestens in der Halbebene $\Re(s) > \sigma_0$.

Dies folgt tatsächlich aus dem Satze. Denn nach ihm kann die Abszisse α der Grenzgeraden der Reihe nicht $> \sigma_0$ sein, da sonst α eine singuläre Stelle der Funktion wäre; α ist also $-\infty$ oder endlich und $\leqq \sigma_0$, d. h. die Reihe konvergiert (mindestens) für $\Re(s) > \sigma_0$ und stellt in dieser Halbebene eine reguläre Funktion dar.

§ 3.

Es mögen $F_1(s)$ und $F_2(s)$ die Dirichletschen Reihen

$$F_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots,$$

$$F_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \cdots$$

bezeichnen. Die Grenzgerade der ersteren ist $\Re(s) = 1$, der letzteren $\Re(s) = 0$; ferner ist $F_2(s)$ für $0 < s \leqq 1$ von Null verschieden, da die Glieder monoton abnehmen und abwechselndes Vorzeichen besitzen. Ferner ist für $\Re(s) > 1$

$$F_1(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}, \tag{16}$$

$$F_2(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}}, \tag{17}$$

wo p alle ungeraden Primzahlen durchläuft. Aus (17) folgt, daß für $\Re(s) > 1$

$$\log F_2(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s}\right) = \sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}}$$
$$+ \sum_p \left(\frac{1}{3}\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{3s}} + \frac{1}{4}\frac{1}{p^{4s}} + \cdots\right)$$

ist. Die letzte Summe ist in einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(s) > \frac{1}{3}$ gleichmäßig konvergent, stellt also eine in dieser Halbebene reguläre Funktion dar. Im folgenden mögen in fortlaufender Nummerierung unter $R_1(s)$, $R_2(s)$, $\cdots$ Funktionen verstanden werden, welche in der Halbebene $\Re(s) > 1$ und für reelle $s \geqq \frac{1}{2}$ regulär sind. Dann ist also für $\Re(s) > 1$

$$\log F_2(s) = \sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}} + R_1(s),$$

also, da nach dem oben Bemerkten

$$\log F_2(s) = R_2(s)$$

ist,

$$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = -\frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}} + R_3(s). \tag{18}$$

Nun folgt aus (16)

$$\log F_1(2s) = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right) = \sum_p \frac{1}{p^{2s}} + \sum_p \left(\frac{1}{2}\frac{1}{p^{4s}} + \cdots\right)$$

$$= \sum_p \frac{1}{p^{2s}} + R_4(s);$$

da

$$F_1(s) = \left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$$

bekanntlich für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung besitzt, ist

$$\log F_1(2s) = -\log\left(s-\frac{1}{2}\right) + R_5(s),$$

also

$$\sum_p \frac{1}{p^{2s}} = -\log\left(s-\frac{1}{2}\right) + R_6(s);$$

dies ergibt, in (18) eingesetzt,

$$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = \frac{1}{2}\log\left(s-\frac{1}{2}\right) + R_7(s). \tag{19}$$

Die Gleichung (19) zeigt, daß $s = \frac{1}{2}$ eine singuläre Stelle der durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} \tag{20}$$

definierten Funktion ist; die Abszisse der Grenzgeraden der Reihe (20) ist also zwischen $\frac{1}{2}$ (inkl.) und 1 (inkl.) gelegen; sie läßt sich zurzeit nicht bestimmen*), und die Kenntnis ihres Wertes ist, wie sich zeigen wird, erfreulicherweise für den vorliegenden Zweck unerheblich.

Ich setze nun

$$\varphi(x) = f(x) - g(x),$$

wo $f(x)$ und $g(x)$ die auf S. 527 angegebenen Bedeutungen haben; $\varphi(x)$

*) Vergl. S. 531—532.

ist also der Überschuß der Anzahl der Primzahlen $4m+3 \leqq x$ über die Anzahl der Primzahlen $4m+1 \leqq x$. Es ist offenbar

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)\begin{cases}=1 \text{ für Primzahlen } n=4m+3,\\ =-1 \text{ für Primzahlen } n=4m+1,\\ =0 \text{ für andere Zahlen,}\end{cases}$$

und es ergibt sich für $\Re(s)>1$

$$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(n)-\varphi(n-1)}{n^s}.$$

Durch partielle Summation erhält man

$$\sum_{n=2}^{x} \frac{\varphi(n)-\varphi(n-1)}{n^s} = \sum_{n=2}^{x} \varphi(n)\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)+\frac{\varphi(x)}{(x+1)^s}$$

wegen

$$|\varphi(x)|<x$$

ist für $\Re(s)>1$

$$\lim_{x=\infty}\frac{\varphi(x)}{(x+1)^s}=0,$$

also

$$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = -\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n)\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right). \tag{21}$$

Nun ist

$$\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s} = \frac{s}{n^{s+1}} - s(s+1)\int_n^{n+1} du \int_n^u \frac{dv}{v^{s+2}}; \tag{22}$$

es konvergiert

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}}$$

für $\Re(s)>1$; außerdem ist wegen

$$\left|s(s+1)\int_n^{n+1} du \int_n^u \frac{dv}{v^{s+2}}\right| \leqq |s|\cdot|s+1|\cdot\int_n^{n+1} du \int_n^{n+1} \frac{dv}{v^{\Re(s)+2}} < \frac{|s|\cdot|s+1|}{n^{\Re(s)+2}}$$

die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n)\, s(s+1)\int_n^{n+1} du \int_n^u \frac{dv}{v^{s+2}}$$

in einer gewissen Umgebung jeder Stelle der Halbebene $\Re(s)>0$ gleichmäßig konvergent; aus (21) und (22) ergibt sich also

$$\sum_p \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p^s} = -s\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} + R_8(s),$$

also in Verbindung mit (19)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} = -\frac{1}{2s}\log\left(s-\tfrac{1}{2}\right) + R_9(s). \tag{23}$$

Ferner ist für $\Re(s) > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}{n^{s+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{s+\frac{1}{2}}\log n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\log n} - \int_1^s \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{s+\frac{1}{2}}}\,ds$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\log n} - \int_1^s \zeta\left(s+\tfrac{1}{2}\right)ds + s - 1,$$

also, da $\zeta(s)$ im Punkte $s=1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 hat,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}{n^{s+1}} = -\log\left(s-\tfrac{1}{2}\right) + R_{10}(s). \tag{24}$$

(24) werde von (23) subtrahiert:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varphi(n) - \frac{\sqrt{n}}{\log n}}{n^{s+1}} = \left(1-\frac{1}{2s}\right)\log\left(s-\tfrac{1}{2}\right) + R_{11}(s) \tag{25}$$

$$= \frac{1}{s}\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\log\left(s-\tfrac{1}{2}\right) + R_{11}(s).$$

Da bei Annäherung von rechts

$$\lim_{s=\frac{1}{2}}\left(s-\tfrac{1}{2}\right)\log\left(s-\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

ist, so folgt aus (25), wenn

$$\varphi(n) - \frac{\sqrt{n}}{\log n} = \psi(n)$$

gesetzt wird: die durch die mindestens für $\Re(s) > 1$ konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\psi(n)}{n^{s+1}} \tag{26}$$

definierte analytische Funktion $\Psi(s)$ ist für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär und hat in $s=\frac{1}{2}$ eine singuläre Stelle; jedoch nähert sich bei Annäherung von rechts an diesen Punkt die Funktion einem endlichen Grenzwert.

Der zu beweisende Tschebyschefsche Satz sagt nun aus: wenn δ eine beliebig gegebene positive Größe ist, so ist unendlich oft

$$\left|\frac{\varphi(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}} - 1\right| < \delta,$$

also

$$-\delta\frac{\sqrt{n}}{\log n} < \varphi(n) - \frac{\sqrt{n}}{\log n} < \delta\frac{\sqrt{n}}{\log n},$$

$$-\delta\frac{\sqrt{n}}{\log n} < \psi(n) < \delta\frac{\sqrt{n}}{\log n}. \tag{27}$$

Dazu braucht nur gezeigt zu werden, daß weder für alle n von irgend einer Stelle an

$$\psi(n) \geqq \delta\frac{\sqrt{n}}{\log n} \tag{28}$$

noch für alle hinreichend großen n

$$\psi(n) \leqq -\delta\frac{\sqrt{n}}{\log n} \tag{29}$$

sein kann. Denn, wenn dies bewiesen ist, schließt man weiter so: wäre (27) nicht unendlich oft erfüllt, so wäre für alle n von einer gewissen Stelle an der Quotient $\psi(n) : \frac{\sqrt{n}}{\log n}$ außerhalb des Intervalles von $-\delta$ (exkl.) bis δ (exkl.) gelegen. Wenn nun aber das Argument sich um 1 vermehrt, so ändert sich dieser Quotient um eine Größe, welche für $n = \infty$ den Grenzwert 0 hat, also für alle hinreichend großen n kleiner als 2δ ist; es ist nämlich

$$\varphi(n) < n, \quad \varphi(n) - \varphi(n-1) = 1, \quad 0 \text{ oder } -1$$

und folglich

$$\left|\frac{\psi(n+1)}{\frac{\sqrt{n+1}}{\log(n+1)}} - \frac{\psi(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}\right| = \left|\frac{\varphi(n+1)}{\frac{\sqrt{n+1}}{\log(n+1)}} - \frac{\varphi(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}}\right|$$

$$= \left|(\varphi(n+1) - \varphi(n))\frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} + \varphi(n)\left(\frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} - \frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)\right|$$

$$< \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} + n\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{u\sqrt{u}} - \frac{\log u}{2u\sqrt{u}}\right)du\right|$$

$$< \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} + n\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{\log(n+1)}{2n\sqrt{n}}\right) = \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\log(n+1)}{2\sqrt{n}}.$$

Also wäre unter der Annahme, daß der Tschebyschefsche Satz falsch ist, entweder (28) oder (29) von einer gewissen Stelle an erfüllt.

Gesetzt nun, die Ungleichung (28) sei für alle $n \geqq m$ erfüllt. Dann

wären alle Koeffizienten der Dirichletschen Reihe (26) von einer gewissen Stelle an positiv; die Anwendung des Satzes in § 2 ergibt also, daß die Abszisse σ der Grenzgeraden von (26) nicht $> \frac{1}{2}$ sein könnte. Denn nach dem auf S. 541 Gefundenen ist die durch (26) definierte Funktion für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär. Aus $\sigma \leqq \frac{1}{2}$ würde $\sigma = \frac{1}{2}$ folgen, da ja die durch die Reihe definierte Funktion im Punkte $\frac{1}{2}$ singulär ist. In diesem Punkte divergiert die Reihe (26) und zwar nach $+\infty$, da für $n \geqq m$ ihr allgemeines Glied

$$\frac{\psi(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \geqq \frac{\delta}{n \log n}$$

wäre. Die nunmehr für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} \tag{26}$$

dargestellte Funktion $\Psi(s)$ wächst infolgedessen offenbar bei Annäherung von rechts an $s = \frac{1}{2}$ über alle Grenzen. Denn nach Annahme von g gibt es ein $\nu = \nu(g)$, so daß $\nu > m$ und

$$\sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{\frac{3}{2}}} > 2g$$

ist. Da nun

$$\lim_{s=\frac{1}{2}} \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} = \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

ist, so wäre für $\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2} + \varepsilon$ (wo ε nach Annahme von g passend bestimmbar ist)

$$\left| \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} - \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \right| < g,$$

also

$$\sum_{n=2}^{\nu} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} > g$$

und a fortiori

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^{s+1}} > g.$$

$\Psi(s)$ wächst also bei Annäherung an $s = \frac{1}{2}$ von rechts über alle Grenzen;

dies steht aber im Widerspruch damit, daß nach S. 541 $\Psi(s)$ bei jener Annäherung gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert.

Genau ebenso ergibt sich, daß die Ungleichung (29) nicht für alle hinreichend großen n erfüllt sein kann, und damit ist der Tschebyschefsche Satz bewiesen.

Offenbar folgt ebenso, daß unendlich oft sogar

$$\left| \frac{f(n) - g(n)}{\frac{\sqrt{n}}{\log n}} - 1 \right| < \frac{\delta}{\log\log n}$$

sein muß; denn die Annahme

$$\psi(n) \geqq \frac{\delta\sqrt{n}}{\log n \log\log n}$$

führt wegen der Divergenz von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n}$$

zu demselben Widerspruch wie oben (28).

§ 4.

Es sei hier noch eine andere Anwendung des Hilfssatzes in § 2 angegeben. Es vereinfachen sich durch ihn die Untersuchungen, welche Herr Erhard Schmidt*) über die Verteilung der Primzahlen angestellt hat; es wird nämlich die Anwendung eines Satzes von Herrn von Koch**) und damit der tieferen Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion entbehrlich. Dieser von Kochsche Satz lautet:

Unter der Annahme, daß die komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ sämtlich den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben, ist für $x > 2$

$$\left| F(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} \right| < \text{Const.}\, \sqrt{x} \log x,$$

wo $F(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet.

*) „Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze", Mathematische Annalen, Bd. 57, 1903, S. 195—204. Herrn Schmidts Sätze verschärfen die ähnlich lautenden Ungleichungen, zu denen vordem schon Herr Phragmén gelangt war, vergl. dessen auf S. 528, Anm. ***) zitierte Abhandlung und seine Arbeit: „Sur une loi de symmétrie relative à certaines formules asymptotiques", Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Bd. 58, 1901, S. 189—202.

**) „Sur la distribution des nombres premiers", Acta mathematica, Bd. 24, 1901, S. 182.

Herr Schmidt beweist nun den Satz*):

*Wenn alle komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben***), so ist oberhalb jeder Schranke die Ungleichung*

$$f(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y} < -\frac{1}{29}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\log x} \tag{30}$$

erfüllbar, wo $f(x)$ durch die Gleichung

$$f(x) = F(x) + \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

definiert ist.

Um dies zu beweisen, setzt er

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{n=2}^{x} \frac{1}{\log n},$$

versteht unter n_1 bezw. n_2 die Zahlen, für welche $\varphi(n) \geqq 0$ bezw. $\varphi(n) < 0$ ist, und entwickelt zunächst die mindestens für $\Re(s) > 1$ gültige Gleichung***)

$$\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} \log n_1 = \sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} \log n_2 - A'(s) \tag{31}$$
$$+ \frac{1}{s^2}\int_a^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right) ds - \frac{1}{s}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)\right),$$

wo a irgend eine reelle Zahl > 1 ist und $A'(s)$ eine für $\Re(s) > 0$ reguläre Funktion bezeichnet. Da $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)$ sich im Punkte $s = 1$ regulär verhält und da bekanntlich für $0 < s < 1$ $\zeta(s) \neq 0$ ist, läßt sich (31) kurz so schreiben:

$$\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}} \log n_1 = \sum_{n_2} \frac{-\varphi(n_2)}{n_2^{s+1}} \log n_2 + G(s), \tag{32}$$

wo $G(s)$ für reelle $s > 0$, also insbesondere für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär ist.

*) Ich zitiere hier einen Teil des bei Herrn Schmidt mit I. bezeichneten Satzes.

**) Für den Fall, daß $\zeta(s)$ Nullstellen mit reellem Teil $> \frac{1}{2}$ besitzt, beweist Herr Schmidt die Richtigkeit der Ungleichung (30) wesentlich elementarer. Übrigens mache ich in der Beweisanordnung des Textes keinen Gebrauch von jener Annahme über die Nullstellen. Vielmehr wird sich aus der — als unrichtig nachzuweisenden — Annahme (33) von selbst ergeben, daß alsdann $\zeta(s)$ für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ von Null verschieden wäre.

***) l. c., S. 200, Gleichung (7).

Herr Schmidt nimmt nun — um daraus einen Widerspruch herzuleiten — an, daß für alle hinreichend großen x

$$-\varphi(n_2) < c\,\frac{\sqrt{n_2}}{\log n_2} \tag{33}$$

ist, wo c eine positive Konstante bezeichnet. Daraus folgt die Konvergenz der Summe auf der rechten Seite von (31) und (32) für $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Um nun schließen zu können, daß auch die Summe auf der linken Seite von (31) und (32) für $\Re(s) > \frac{1}{2}$ konvergiert, und dann gewisse Grenzübergänge gegen die Gerade $\Re(s) = \frac{1}{2}$ ausführen zu dürfen, wendet Herr Schmidt die aus dem von Kochschen Satze folgende Relation

$$\varphi(n_1) < \text{Const.}\sqrt{n_1}\log n_1$$

an. Tatsächlich kann man aber mit alleiniger Anwendung des Hilfssatzes in § 2 folgendermaßen schließen. Die für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n_1} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^{s+1}}\log n_1$$

mit positiven Koeffizienten definierte Funktion ist für $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ regulär; also konvergiert diese Dirichletsche Reihe für $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Jetzt kann der Beweis des Satzes auf S. 545 weitergehen wie bei Herrn Schmidt.

Analog zu dem Satz in § 2 lassen sich auch die analytischen Hilfssätze, welche Herr Phragmén a. a. O.*) entwickelt, beweisen, und zwar so, daß ein Teil der Voraussetzungen fallen gelassen wird. Dadurch läßt sich z. B. der Phragménsche Beweis des Tschebyscheffschen Satzes so darstellen, daß der (a. a. O. unter Benutzung der Funktionalgleichung zwischen den Argumenten s und $1-s$ geführte) Nachweis der Ungleichungen

$$\zeta(s) \neq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \neq 0$$

für den Kreis $|s-1| \leqq 1$ entbehrlich wird.

Jene Modifikation sei zunächst bei dem ersten der Phragménschen Sätze ausgeführt:

Es sei $\varphi(x)$ eine Funktion der reellen Variabeln x, α eine Konstante $\geqq 1$; es konvergiere das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx$$

*) S. seine auf S. 528, Anm. ***) zitierte Abhandlung und auch seine Note „Sur la distribution des nombres premiers", Comptes rendus hebdomadaires des séances de *l'Académie des* Sciences, Paris. Bd. 114, 1892, S. 337—340.

für $\Re(s) > 1$, *und es sei die durch das Integral dargestellte Funktion an der Stelle* $s = 1$ *regulär und lasse sich in eine Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$ *entwickeln, deren Konvergenzradius* > 1 *ist; dann kann nicht für alle* x *von einer gewissen Stelle an*

$$\varphi(x) > \delta$$

sein, wo δ *eine positive Konstante ist.*

Der folgende Beweis dieses Satzes setzt nicht voraus, daß die Funktion für $|s-1| \leqq 1$ regulär ist, sondern nur, daß sie auf dem Stück der reellen Achse $0 \leqq s \leqq 1$ regulär ist.

Gesetzt, es sei von einer gewissen Stelle an (für alle $x \geqq x_0$)

$$\varphi(x) > \delta;$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $x_0 = \alpha$ angenommen werden, da

$$\int_{\alpha}^{x_0} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx$$

eine ganze transzendente Funktion ist.

Das Integral

$$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-1}\, dx$$

divergiert, da der Integrand $> \delta x^{-1}$ ist. Da nun für jedes $x > \alpha$ der Integrand $\varphi(x)\, x^{-s-1}$ mit abnehmendem reellem s zunimmt, so gibt es eine ganz bestimmte Zahl β zwischen 0 (inkl.) und 1 (inkl.) derart, daß das Integral

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx \tag{34}$$

für $s < \beta$ divergiert, für $s > \beta$ konvergiert.*) In der Halbebene $\Re(s) > \beta$ ist wegen

$$|\varphi(x)\, x^{-s-1}| \leqq \varphi(x)\, x^{-\Re(s)-1}$$

sicher das Integral konvergent und zwar gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jeder Stelle; (34) stellt also für $\Re(s) > \beta$ eine reguläre analytische Funktion dar. Da $0 \leqq \beta \leqq 1$ ist, ist nach Voraussetzung die für $\Re(s) > 1$ durch das Integral (34) definierte Funktion im Punkte β regulär.

*) Bekanntlich läßt sich, auch ohne die Annahme, daß $\varphi(x)$ konstantes Vorzeichen besitzt, beweisen, daß der Konvergenzbereich des Integrals $\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx$ eine Halbebene ist; aus der Konvergenz für s_0 folgt nämlich die Konvergenz für jedes s_1, das die Ungleichung $\Re(s_1) > \Re(s_0)$ erfüllt.

Es sei γ irgend eine Zahl $> \beta$ (z. B. $\gamma = 2$). Die Taylorsche Reihe in der Umgebung der Stelle γ ist, da Differentiation unter dem Integral zeichen gestattet ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (s-\gamma)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}(\gamma)\,(s-\gamma)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^{\infty} \varphi(x) \log^n x\, x^{-\gamma-1}\, dx\, (s-\gamma)^n,$$

und ihr Konvergenzradius ϱ wäre $> \gamma - \beta$. Es sei $\beta - p$ eine Zahl zwischen $\gamma - \varrho$ und β, also $0 < p < \varrho - (\gamma - \beta)$. Dann wäre

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\beta - p - \gamma)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_a^{\infty} \varphi(x) \log^n x\, x^{-\gamma-1}\, dx\, (p+\gamma-\beta)^n$$

konvergent, also auch, da alle Elemente positiv sind, das durch Vertauschung der Summation und Integration entstehende Integral

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)\, x^{-\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \log^n x\, (p+\gamma-\beta)^n\, dx = \int_a^{\infty} \varphi(x)\, x^{-\gamma-1}\, e^{\log x (p+\gamma-\beta)}\, dx$$
$$= \int_a^{\infty} \varphi(x)\, x^{-(\gamma-p)-1}\, dx;$$

d. h. das Integral (34) würde für $s = \beta - p$ konvergieren, und β wäre gar nicht der Grenzpunkt der Konvergenz auf der reellen Achse. Also führt die Annahme $\varphi(x) > \delta$ (für alle $x \geqq x_0$) zu einem Widerspruch.

Allgemein gesprochen, geht aus diesen Entwickelungen folgende Tatsache hervor:

Es erfülle eine Funktion $\varphi(x)$ für $x \geqq x_0$ (x_0 wird $\geqq 1$ angenommen) die Ungleichung

$$\varphi(x) \geqq 0;$$

es sei das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx$$

weder für alle reellen s, noch für kein reelles s konvergent, es gebe also ein bestimmtes β derart, daß das Integral für $s < \beta$ divergiert, für $s > \beta$ konvergiert. Dann ist $s = \beta$ eine singuläre Stelle der in der Halbebene $\Re(s) > \beta$ durch das Integral definierten analytischen Funktion.

Diese Tatsache führt auch mit Leichtigkeit zu einer Verschärfung des von Herrn Phragmén*) kürzlich bewiesenen Satzes:

*) Vergl. die auf S. 544, Anm. *) zitierte Arbeit.

Es sei $x_0 \geqq 1$, $\varphi(x)$ *eine reelle Funktion von* x, *und es konvergiere das Integral*

$$\int_{x_0}^{\infty} |\varphi(x)|\, x^{-s-1}\, dx \tag{35}$$

für $s > s_0$; *die alsdann für* $\Re(s) > s_0$ *durch das Integral*

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1}\, dx \tag{36}$$

definierte Funktion $\Phi(s)$ *sei im Kreise* $|s - s_0| < \varrho$ *regulär. Es sei* α *eine reelle Zahl* $> s_0 - \varrho$, k *eine ganze Zahl* $\left(\gtreqless 0\right)$ *und es werde zur Abkürzung*

$$\{u\} = \begin{cases} u & \text{für } u \geqq 0, \\ 0 & \text{für } u \leqq 0 \end{cases}$$

gesetzt; dann sind die Integrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\}\, x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k}\, dx \tag{37}$$

und

$$\int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\}\, x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k}\, dx \tag{38}$$

entweder beide konvergent oder beide divergent.

Die folgende Beweisanordnung setzt nur voraus, daß die Funktion $\Phi(s)$ auf der geradlinigen Strecke $s_0 \geqq s > s_0 - \varrho$ regulär ist, nicht, daß sie im ganzen Kreise $|s - s_0| < \varrho$ regulär ist.

Es sei etwa das Integral (37) für ein spezielles Wertepaar α, k konvergent; dann soll bewiesen werden, daß (38) konvergiert.

Durch k-malige Integration bezw. Differentiation des Integrals (36) ergibt sich, daß das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx$$

in der Halbebene $\Re(s) > s_0$ eine reguläre Funktion $\Psi(s)$ darstellt; dieselbe ist zufolge der Voraussetzung längs der Strecke $s_0 \geqq s \geqq \alpha$ fortsetzbar.*) Das Integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\}\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx$$

stellt wegen der Konvergenz von (35) für $\Re(s) > s_0$ gleichfalls eine reguläre Funktion dar, die wegen der Konvergenz von (37) für $s > \alpha$ regulär ist.

*) Falls $\alpha = s_0$ ist, heißt dies, daß die Funktion im Punkte s_0 regulär ist.

Da nun

$$\{-\varphi(x)\} = \{\varphi(x)\} - \varphi(x)$$

ist, so folgt aus dem vorigen: die für $\Re(s) > s_0$ durch das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \{-\varphi(x)\}\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx \tag{39}$$

definierte Funktion ist für reelle $s > \alpha$ regulär. Nach dem Satze auf S. 548 ist also der Grenzpunkt β der Konvergenz für das Integral (39) nicht größer als α, also entweder $-\infty$ oder endlich und $\leqq \alpha$. Falls $\beta = -\infty$ oder $\beta < \alpha$ ist, so ist (39) für $s = \alpha$ konvergent und die Behauptung ist bewiesen. Falls $\beta = \alpha$ ist, muß (39) auch für $s = \alpha$ konvergieren. Denn sonst würde das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \{-\varphi(x)\}\, x^{-\alpha-1} (\log x)^{-k}\, dx$$

gegen $+\infty$ divergieren; in der für $s > \alpha$ gültigen Gleichung

$$\Psi(s) = \int_{x_0}^{\infty} \{\varphi(x)\}\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx - \int_{x_0}^{\infty} \{-\varphi(x)\}\, x^{-s-1} (\log x)^{-k}\, dx$$

würde also bei Abnahme von s zu α das erste Integral gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren und das zweite gegen $+\infty$ divergieren, in Widerspruch damit, daß die Funktion $\Psi(s)$ im Punkte α regulär ist, also bei jeder Annäherung an diesen Punkt einen Grenzwert besitzt.

Berlin, den 6. Juni 1905.

Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen.

Von

G. Herglotz in Göttingen.

Zeichnet man in das ebene Gitter aller ganzen Zahlen (a, b) eine geschlossene, den Nullpunkt $O(0, 0)$ umgebende Kurve C ein, die durch jeden von O nach einem Gitterpunkte P hinlaufenden Halbstrahl nur in einem Punkte Q geschnitten wird, und bildet die für $R(s) > 1$ konvergente, über alle Gitterpunkte, $(0, 0)$ ausgenommen, zu erstreckende Summe:

$$M(s) = \sum_{a,b}{}' \left(\frac{r}{R}\right)^{2s}, \quad R = OP, \quad r = OQ, \tag{1}$$

so ist, wie Herr Minkowski*) in seiner Gedächtnisrede auf Dirichlet bemerkt, in den beiden von Dirichlet zur Ermittelung von

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum_{a,b}{}' (Aa^2 + 2Bab + Cb^2)^{-s}$$

verwandten Hilfssätzen**) der allgemeine Satz enthalten, daß

$$\lim_{s=1} (s-1) M(s) = F = \text{Flächeninhalt der Kurve } C \tag{2}$$

ist. Bezüglich dieser „makroskopischen Flächeninhaltsbestimmung" hat Herr Minkowski a. a. O. den weiteren Satz ausgesprochen, daß $M(s)$, analog dem Riemannschen $\zeta(s)$, eine in der ganzen Ebene, den Punkt $s = 1$ ausgenommen, reguläre Funktion ist, in $s = 1$ aber einen einfachen Pol besitzt, dessen Residuum dann nach (2) eben der Flächeninhalt von C ist.

Für den Fall einer durchaus analytischen Kurve C soll nun im folgenden ein Beweis der analytischen Fortsetzbarkeit von $M(s)$ angegeben werden, aus dem zugleich für $\lim_{s=1}\left[M(s) - \frac{F}{s-1}\right]$ ein Ausdruck resultiert, aus welchem der von Kronecker***) für die eben erwähnte spezielle Reihe gegebene als einfaches Korrolar folgt.

*) Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver., Bd. XIV, 1905, pg. 158—159.

**) Anwend. d. Inf. Anal. a. Zahlentheorie, § 1. Crelle 19.

***) Berliner Berichte 1863.

§ 1.

Über die analytische Fortsetzung von $M(s)$.

Von der Kurve C möge noch speziell vorausgesetzt werden, daß in ihrer Polargleichung:

$$r = f(\Theta) \tag{3}$$

$f(\Theta)$ eine Funktion der Periode 2π sei, die in einem schmalen die reelle Θ-Achse in sich enthaltenden Bande regulär sein soll.*) Da man nun wegen $r > 0$ voraussetzen darf, es liege auch in diesem Bande kein Nullpunkt von $f(\Theta)$, so wird gleiches auch von $r^{2s} = f^{2s}(\Theta)$ gelten, und daher für die Koeffizienten der Fourierentwicklung:

$$f^{2s}(\Theta) = \sum_0^\infty{}'' (A_n(s) \cos n\Theta + B_n(s) \sin n\Theta) \tag{4}$$

sein:

$$|A_n(s)| < \mathsf{M}\alpha^n, \quad |B_n(s)| < \mathsf{M}\alpha^n, \quad \alpha < 1, \tag{5}$$

wobei man betreffs der von n unabhängigen Größen M, α überdies annehmen kann, sie seien auch von s unabhängig, wofern dieses bloß auf irgend ein endliches Gebiet, etwa $|s| \leq S$, beschränkt wird. Denkt man nun bis auf weiteres noch $R(s) > 1$, so folgt aus:

$$M(s) = \sum_{a,b} \left[\frac{f\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^{2s}, \quad R(s) > 1 \tag{6}$$

durch Verwendung von (4) und Änderung der Summationsfolge

$$M(s) = \sum_n A_n(s)\, Z(s, n), \quad n = 0, 4, 8, 12, 16, \cdots \tag{7}$$

$$Z(s, n) = \sum_{a,b} \frac{\cos n \operatorname{arctg}\frac{b}{a}}{(a^2+b^2)^s}, \quad R(s) > 1 \tag{8}$$

indem alle Sinussummen identisch verschwinden, und von den Kosinussummen jene, in denen n durch 4 unteilbar ist. Von der Reihe (7) soll jetzt hinterher gezeigt werden, daß sie für alle $|s| < S$ gleichmäßig konvergiert, also die Fortsetzung von $M(s)$ liefert. Hierzu ist zunächst die Fortsetzbarkeit von $Z(s, n)$ festzustellen, und das Verhalten dieser Funktion bei unendlich wachsendem n zu ermitteln. Schreibt man die Summe (8) zunächst in der Form:

*) Hierfür genügt es, daß C überall analytisch ist und $\frac{dr}{d\Theta}$ eine endliche obere Grenze besitzt.

$$(9)\qquad Z(s,n) = 2\zeta(2s) + 2\sum_{1}^{\infty}{}_{a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{b}\frac{1}{(a+bi)^p(a-bi)^q},$$

$$p = s - \frac{n}{2}, \quad q = s + \frac{n}{2},$$

so wird die Integralformel:

$$(10)\qquad \int_1^\infty \left[(z+1)^p(z-1)^q + (z-1)^p(z+1)^q\right]\left[\frac{1}{(az+bi)^{p+q}} + \frac{1}{(az-bi)^{p+q}}\right]dz$$
$$= 2^{p+q-1}\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\left[\frac{1}{(a+bi)^p(a-bi)^q} + \frac{1}{(a-bi)^p(a+bi)^q}\right], \quad a>0$$

durch Summation über a, b offenbar einen Integralausdruck für $Z(s,n)$ liefern. Doch ist hierbei noch einige Vorsicht zu gebrauchen, weil die dann unter dem Integral auftretende Reihe für $z=\infty$ selbst nicht mehr konvergiert. Setzt man also zur Abkürzung:

$$(11)\qquad \chi(z,s) = \frac{\Gamma(2s)}{(2\pi)^{2s}}\sum_{1}^{\infty}{}_{a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{b}\frac{1}{(az+bi)^{2s}}, \quad R(s)>1, \quad R(z)\neq 0.$$

$$(12)\qquad g(z) = (z+1)^p(z-1)^q + (z-1)^p(z+1)^q,$$

so wird man aus (10) zunächst folgern:

$$(13)\qquad 2^{2s-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\sum_{1}^{\infty}{}_{a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{b}\frac{1}{(a+bi)^p(a-bi)^q} = \frac{(2\pi)^{2s}}{\Gamma(2s)}\int_1^\infty g(z)\chi(z,s)\,dz$$
$$+\lim_{m=\infty}\sum_{1}^{\infty}{}_{a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{b}\int_m^\infty \frac{g(z)}{(az+bi)^{2s}}\,dz.$$

Die Bestimmung des Grenzwertes rechts, welche hier wohl unterdrückt werden darf, ergibt: $\frac{2\pi}{2s-1}\zeta(2s-1)$, so daß man nach (9) und (13) erhält:

$$(14)\qquad Z(s,n) = 2\zeta(2s) + \frac{\pi}{2^{2s-3}}\frac{\Gamma(2s-1)\zeta(2s-1)}{\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{n}{2}\right)}$$
$$+\frac{4\pi^{2s}}{\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{n}{2}\right)}\int_1^\infty g(z)\chi(z,s)\,dz, \quad R(s)>1.$$

Um hier vorerst für $\chi(z,s)$ eine für alle s gültige Darstellung zu erlangen, kann man die Doppelsumme (11), die ja für ganzzahliges posi-

tives s eine bekannte Transzendente darstellt, etwa unter Zuhilfenahme der Γ-Funktion in eine einfache Summe verwandeln. Auf diese Weise erhält man:

$$\chi(z,s) = \sum_1^\infty \frac{\lambda^{2s-1}}{e^{2\pi\lambda z}-1}, \quad R(z) > 0 \tag{15}$$

oder

$$\chi(z,s) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\log\varphi(z,s), \tag{16}$$

$$\varphi(z,s) = \prod_1^\infty (1-e^{-2\lambda\pi z})^{\lambda^{2s-2}}, \quad R(z) > 0. \tag{17}$$

Die Formel (15) zeigt, daß $\chi(z,s)$ in der rechten z-Halbebene für alle Werte von s eine dort überall reguläre Funktion ist, welche wie $e^{-2\pi z}$ gegen Null herabsinkt, wenn z auf der reellen Achse nach $+\infty$ geht.

Um nunmehr in (14) auch für $Z(s,n)$ eine für alle s gültige Darstellung zu haben, hat man den von $z=1$ nach $z=+\infty$ gehenden Integrationsweg in bekannter Weise durch eine von $z=+\infty$ aus um $z=+1$ positiv herumgelegte Schleife zu ersetzen, deren beide geradlinigen Teile man mit der reellen z-Achse wird zusammenfallen lassen. So wird nach einer leicht zu ersehenden Umformung von $\Gamma\left(s-\frac{n}{2}\right)$ der endgültige Ausdruck für $Z(s,n)$ gefunden:

$$\begin{aligned} Z(s,n) = {} & 2\zeta(2s) + \frac{\sin\pi s}{2^{2s-3}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)}\Gamma(2s-1)\zeta(2s-1) \\ & - 2i\pi^{2s-1}e^{-\pi s i}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)}\int^{+}\chi(z,s)(z^2-1)^{s-1}\left[\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{n}{2}}+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{n}{2}}\right]dz. \end{aligned} \tag{18}$$

Aus demselben läßt sich sofort ablesen: für $n = 4, 8, 12, \cdots$ ist $Z(s,n)$ eine ganze transzendente Funktion von s, für $n=0$ dagegen ist $Z(s,0) - \frac{\pi}{s-1}$ eine solche.

Es folgt aus ihm aber noch weiter, daß für jedes $\beta > 1$:

$$\lim_{n=\infty}\beta^{-n}Z(s,n) = 0 \tag{19}$$

ist.

Bezüglich der beiden ersten Terme (18) leuchtet dies wegen

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)} = \left(\frac{n}{2}\right)^{1-2s}(1+\vartheta)$$

unmittelbar ein; um das gleiche bezüglich des dritten Termes zu erkennen, wähle man als krummlinigen Teil der Integrationsschleife den Kreis $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = \beta'$, wo β' der Ungleichung $\sqrt{\beta} > \beta' > 1$ genüge. Dann ist für den ganzen Integrationsweg sicher $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|^{\frac{n}{2}} + \left|\frac{z-1}{z+1}\right|^{\frac{n}{2}} < 2\beta'^{\frac{n}{2}}$, und da nach den Eigenschaften von $\chi(z, s)$ das Integral $\int |\chi(z, s)(z^2-1)^{s-1}dz|$ einen endlichen von n unabhängigen Wert besitzt, konvergiert der dritte Term in $\beta^{-n}Z(s, n)$ wie $\left(\frac{n}{2}\right)^{1-2s}\left(\frac{\beta'}{\sqrt{\beta}}\right)^{\frac{n}{2}}$ gegen Null.

Da nun, wie man sich leicht überzeugt, (19) gleichmäßig für alle $|s| \leq S$ statt hat, so wird zu jedem $\beta > 1$, n' so gewählt werden können, daß:

$$|Z(s, n)| < \beta^n, \quad n > n', \quad |s| \leq S \tag{20}$$

ist.

Wählt man β speziell so, daß $\alpha\beta < 1$, so folgt aus (5), daß die Reihe (7) tatsächlich für alle $|s| \leq S$ gleichmäßig konvergiert, und daher die analytische Fortsetzung von $M(s)$ liefert. Mit Rücksicht auf das Verhalten von $Z(s, n)$ ist also $M(s)$ überall, $s = 1$ ausgenommen, regulär, und hat für $s = 1$ einen einfachen Pol mit dem Residuum:

$$\pi A_0(1) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\Theta = F. \tag{21}$$

Noch sei nebenbei bemerkt, daß wegen:

$$A_0(0) = 1, \quad A_n(0) = 0, \quad n > 0, \quad Z(0, 0) = 2\zeta(0) = -1$$

folgt

$$M(0) = -1, \tag{22}$$

also unabhängig von der Ausgangskurve C ist.

§ 2.

Über die für $Z(s, n)$ geltende Funktionalgleichung.

Analog dem Riemannschen $\zeta(s)$ besteht auch zwischen $Z(s, n)$ und $Z(1-s, n)$ eine Beziehung, die man wohl am raschesten einer zweiten Integraldarstellung entnimmt. Um zu dieser zu gelangen, schreibe man $Z(s, n)$ in der Form:

$$Z(s, n) = \sum_{a, b} \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}+s}} \cdot (a+bi)^n \tag{23}$$

und benutze hier die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}+s}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+s}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)} \int_0^\infty e^{-(a^2+b^2)\pi x} x^{s+\frac{n}{2}-1}\, dx, \quad R\left(s+\frac{n}{2}\right)>0, \tag{24}$$

$$(a+bi)^n = \left[\frac{d^n e^{(a+bi)y}}{dy^n}\right]_{y=0}.$$

Hierdurch geht, wenn noch zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\Theta(x,y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2\pi x}\cos\lambda y, \tag{25}$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{d^n\Theta(x,y)\cdot\Theta(x,yi)}{dy^n}\right)_{y=0}, \quad n>0, \tag{26}$$

$$\psi_0(x) = \Theta(x,0)\cdot\Theta(x,0) - 1,$$

die Summe (23) über in:

$$Z(s,n) = \frac{\pi^{s+\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(s+\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \psi_n(x)\, x^{s+\frac{n}{2}-1}\, dx, \quad R\left(s+\frac{n}{2}\right)>0. \tag{27}$$

Nun ergibt aber die Transformation der ϑ-Funktionen, daß

$$\Theta\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)\Theta\left(\frac{1}{x}, \frac{yi}{x}\right) = x\Theta(x,y)\Theta(x,yi) \tag{28}$$

ist, und dies liefert nach (26) für $\psi_n(x)$ die Relation:

$$\psi_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n+1}\psi_n(x), \quad n>0 \tag{29}$$

$$\psi_0\left(\frac{1}{x}\right) = x\psi_0(x) + x - 1.$$

Zerlegt man daher jetzt das Integral in (27) in zwei, eines von 0 bis 1 und eines von 1 bis ∞, ersetzt im ersten x durch $\frac{1}{x}$ und wendet (29) an, so ergibt sich, $s = \frac{1}{2} + ti$ gesetzt, die für alle s gültige zweite Integraldarstellung von $Z(s,n)$:

$$Z(s,n)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+s}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)}\int_1^\infty x^{\frac{n-1}{2}}\psi_n(x)\cos(t\lg x)\,dx,\qquad n>0,$$

(30)

$$Z(s,0)=\frac{2\pi^s}{\Gamma(s)}\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}\psi_0(x)\cos(t\lg x)\,dx-\frac{\pi^s}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\Gamma(s)}.$$

Da hier die Integrale gerade Funktionen von t sind, so fließt hieraus die gesuchte Beziehung:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)}{\pi^s}Z(s,n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1-s\right)}{\pi^{1-s}}Z(1-s,n). \tag{31}$$

§ 3.

Über den Wert von $L=\lim_{s=1}\left(M(s)-\frac{F}{s-1}\right)$.

Aus der Darstellung (7) von $M(s)$ folgt, da für nahe an 1 liegende s-Werte: $A_0(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}r^{2s}\,d\Theta=\frac{1}{\pi}F+\frac{s-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}r^2\lg r^2\,d\Theta$ ist, zunächst:

$$L=\lim_{s=1}\left(M(s)-\frac{F}{s-1}\right)=\frac{F}{\pi}\lim_{s=1}\left(Z(s,0)-\frac{\pi}{s-1}\right)+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2\lg r^2\,d\Theta+ \tag{32}$$

$$+\sum_n A_n(1)\,Z(1,n),\qquad n=4,8,12,\cdots.$$

Diese Gleichung gestattet nun eine erhebliche Zusammenziehung, wenn man auf die speziellen Werte von $Z(s,n)$ Rücksicht nimmt. Vorab ergibt (18) für $n>0$, $s=1$:

$$Z(1,n)=\frac{\pi^2}{3}+\frac{2\pi}{n}+\frac{4\pi i}{n}\int\chi(z,1)\left[\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{n}{2}}+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{n}{2}}\right]dz. \tag{33}$$

Hier ist nun der Integrand eindeutig geworden, die Integrationsschleife kann also durch eine beliebige geschlossene, $z=1$ umlaufende Kurve ersetzt werden, und außerdem das Glied $\chi(z,1)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{n}{2}}$, als für $z=1$ regulär, gestrichen werden.

Aus der Produktdarstellung (17) von $\varphi(z, s)$ ersieht man, daß sich $\varphi(z, 1)$ im wesentlichen auf die Transzendente $\eta(\omega)$ der elliptischen Modulfunktionen*) reduziert:

$$\varphi(z, 1) = e^{\frac{\pi z}{12}} \eta(iz),$$
$$\chi(z, 1) = \frac{1}{24} + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \lg \eta(iz). \tag{34}$$

Führt man diese Werte in (33) ein, integriert partiell und ersetzt das zweite Glied $\frac{2\pi}{n}$ durch $\frac{1}{i} \int \frac{\lg(1+z)}{z^2-1} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{n}{2}} dz$, so resultiert für $Z(1, n)$ der einfache Ausdruck:

$$Z(1, n) = 2i \int \frac{\lg \sqrt{1+z}\, \eta(iz)}{z^2-1} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{n}{2}} dz, \qquad n > 0, \tag{35}$$

über eine geschlossene Kurve um $z = 1$ integriert. Statt desselben soll aber in (32) der für $n = 4, 8, \cdots$ gleichwertige Ausdruck:

$$Z(1,n) = 2i \int \frac{\lg \sqrt{1+z}\, \eta(iz)}{z^2-1} \left[\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{n}{2}} \right] dz, \qquad n > 0 \tag{35a}$$

verwandt werden, und, aus einem sofort ersichtlichen Grunde, als Integrationsweg der Kreis $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \varrho < 1$ gewählt werden, wo ϱ so fixiert sei, daß $\sum_n |A_n(1)| \left(\varrho^n + \frac{1}{\varrho^n}\right)$ konvergiert, was nach (5) möglich ist.

Analog findet man, unter $C = 0{\cdot}577 \cdots$ die Eulersche Konstante verstanden,

$$\lim_{s=1} \left(Z(s,0) - \frac{\pi}{s-1} \right) = \frac{\pi^2}{3} + 2\pi(C - \lg 2) - 4\pi\varphi(1,1) = 2\pi C - 4\pi \lg \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2}\pi^{\frac{3}{4}}}. \tag{36}$$

Bei Einführung von (35a) in (32) tritt nun unter dem Integralzeichen die Summe $\sum_n A_n(1) \left[\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{n}{2}} + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{n}{2}} \right]$, $n = 4, 8, \cdots$ auf, die für den ganzen Integrationsweg gleichmäßig konvergiert, und sich direkt durch die Funktion $f(\Theta)$ der Kurvengleichung ausdrückt. Setzt man nämlich:

$$\Psi(z) = f^2\left(\frac{1}{2i} \lg \frac{z+1}{z-1}\right) + f^2\left(\frac{1}{2i} \lg \frac{z+1}{z-1} + \pi\right), \tag{37}$$

*) Weber, Elliptische Funktionen, p. 63.

so ist $\Psi(z)$ den Voraussetzungen über $f(\Theta)$ zufolge in einem Gebiete $\frac{1}{\varrho'} > \left|\frac{z-1}{z+1}\right| > \varrho'$, $\varrho' < \varrho < 1$ eindeutig und regulär, und man verifiziert leicht, daß obige Summe gleich ist

$$\tfrac{1}{4}\left[\Psi(z) + \Psi(-z) + \Psi\left(\tfrac{1}{z}\right) + \Psi\left(-\tfrac{1}{z}\right)\right] - 2A_0(1).$$

Bemerkt man nun überdies, daß den Transformationseigenschaften von $\eta(\omega)$ zufolge gilt: $\sqrt{1+z}\,\eta(iz) = \sqrt{1+\frac{1}{z}}\,\eta\left(i\frac{1}{z}\right)$, so ergibt die Substitution von (35a) und (36) in (32) das schließliche Resultat:

$$L = \lim\left(M(s) - \frac{F}{s-1}\right)$$

(38)

$$= 2CF + \int_0^{2\pi} f^2(\Theta)\lg f(\Theta)\,d\Theta + i\int \lg\frac{\sqrt{1}+z}{z^2-1}\,\eta(iz)\,[\Psi(z)+\Psi(-z)]\,dz,$$

das Integral etwa über den Kreis $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \varrho$ erstreckt gedacht. —

Von dieser allgemeinen Beziehung möge sogleich eine Anwendung auf folgenden Spezialfall bemerkt werden:

Seien $P(a, b)$, $Q(a, b)$ zwei definite binäre Formen vom Grade $2m-2$ bezw. $2m$ und bilde man die über alle ganzen Zahlen a, b außer 0, 0 erstreckte Summe:

(39)
$$K(s) = \sum_{a,b}{}' \left(\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}\right)^s,$$

so geht diese offenbar aus $M(s)$ hervor, wenn als Kurve C genommen wird:

(40)
$$r = f(\Theta) = \sqrt{\frac{P(\cos\Theta, \sin\Theta)}{Q(\cos\Theta, \sin\Theta)}}.$$

Für diese ist aber nach (37): $\Psi(z) = 2(z^2-1)\frac{P(z,i)}{Q(z,i)}$ eine rationale Funktion, und das Integral in (38) kann nach dem Residuensatze sofort angegeben werden. So ergibt sich, unter V die Fläche der Kurve (40), unter W das Integral $\int_0^{2\pi} r^2 \lg r\,d\Theta$ verstanden, für die spezielle Funktion $K(s)$ das Resultat:

Sind $a_1, a_2, \cdots, a_m$ die in der oberen Halbebene gelegenen Nullstellen von $Q(x, 1)$, weiter $R_1, R_2, \cdots, R_m$ die zugehörigen Residuen von $\frac{P(x,1)}{Q(x,1)}$

und werden die konjugiert komplexen Größen durch einen Querstrich bezeichnet, so ist:

$$\lim_{s=1}\Big\{\sum_{a,b}\Big(\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}\Big)^{s}-\frac{V}{s-1}\Big\}=2CV+W-$$

$$-4\pi i\sum_{1}^{m}\{R_\lambda\log\sqrt{1+ia_\lambda}\,\eta(a_\lambda)-\bar{R}_\lambda\log\sqrt{1-i\bar{a}_\lambda}\,\eta(-\bar{a}_\lambda)\}. \tag{41}$$

Hieraus folgt dann die Kroneckersche Gleichung als Spezialfall für $m=1$

Göttingen, Juni 1905.

Berichtigungen.

Zu dem Aufsatze:

Felix Klein, Über die allgemeine Auflösung der Gleichungen fünften und sechsten Grades. (S. 50—71 dieses Bandes.)

In der Formel (3) auf S. 53 dieses Bandes muß es statt $q^{\frac{2}{5}}$ heißen $-q^{\frac{3}{5}}$, also

$$x=-q^{\frac{3}{5}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{2iK'\pi}{K},\,q^5\right)}{\vartheta_1\left(\frac{iK'\pi}{K},\,q^5\right)}.$$

Dieser Fehler findet sich bereits in meinen Vorlesungen über das Ikosaeder S. 132; in meinen früheren Publikationen, sowie in Klein-Fricke, Modulfunktionen (Bd. 2, S. 383) sind die Formeln richtig. Vergl. Scheibner: „Zur Auflösung der Ikosaedergleichung" in den Berichten d. math. phys. Klasse der K. sächsischen Gesellschaft d. W. vom 4. Dez. 1905. Klein.

Zu dem Aufsatze:

L. Fejér, Das Ostwaldsche Prinzip in der Mechanik. (S. 422—436 dieses Bandes.)

S. 422 Anm. ***) Zeile 3 v. u. muß lauten:

1903. G. Zemplén, Annalen der Physik, Bd. 10.

Die Eulersche Formel im Zusammenhang mit dem Inhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie.

Von

M. Dehn in Münster i./W.

Inhalt.

Seite

Einleitung 561

Abschnitt I.

Die Eulersche Formel für den R_3, R_4 und R_5.

§ 1. Einfache Zerlegung eines Drelecks in Dreiecke und die Eulersche Formel für den R_3 562

§ 2. Einfache Zerlegung eines Tetraeders in Tetraeder und die Eulersche Formel für den R_4 565

§ 3. Einfache Zerlegung eines Pentatetraeders in Pentatetraeder und die Eulersche Formel für den R_5 570

Abschnitt II.

Der Nicht-Euklidische Inhalt und die Legendreschen Sätze für den R_4. Eigenschaften der Größe $\mathfrak{Z} = W - 4\pi\mathfrak{W}_0 - 4\pi$.

§ 1. Die Größe $\mathfrak{Z}$ als Zerlegungsinvariante 577

§ 2. Das Verschwinden von $\mathfrak{Z}$ im Euklidischen R_4 581

§ 3. Die Größe $\mathfrak{Z}$ und der Inhalt im Nicht-Euklidischen R_4 582

Schlußbemerkungen.

I. Ausblick auf höhere Dimensionen 585

II. Das metrische Element in dem Beweis für die Eulersche Formel 586

Einleitung.

Ein enger Zusammenhang zwischen dem Inhalt sphärischer Dreiecke und der Eulerschen Polyederformel tritt zuerst zutage in einem Beweis, den Legendre, Geometrie VII, 25, für die Eulersche Formel gegeben hat. Die nachfolgende Untersuchung strebt eine erweiterte und vertiefte Einsicht in diesen Zusammenhang an. Der Weg, auf dem ich zu den vorliegenden

Resultaten gelangt bin, war der folgende: Zunächst sollte eine Verallgemeinerung der Legendreschen Methode für die Ableitung der Eulerschen Formeln für den Raum von vier Dimensionen (R_4) und den Raum von fünf Dimensionen (R_5) gesucht werden. Eine solche Verallgemeinerung hätte ja jedenfalls schon aus methodischen Gründen eine gewisse Bedeutung. Während nun aus der Eulerschen Formel für den R_3 (oder was dasselbe ist: aus der Dreieckzerlegungsformel) diejenige für den R_4 (resp. Zerlegung eines Tetraeders in Tetraeder) ebenfalls mittels einer einfachen Winkelbetrachtung sofort abgeleitet werden konnte, ergab sich bei der entsprechenden Anwendung der Eulerschen Formel für den R_4 auf den R_5 (oder was dasselbe ist: auf die Zerlegung eines Pentatetraeders in Pentatetraeder) überraschenderweise nicht die Eulersche Formel, sondern eine weitere lineare Relation zwischen der Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen und Räume einer bloß von Pentatetraedern begrenzten Mannigfaltigkeit, die ebenso wie die selbstverständliche Relation: Anzahl der begrenzenden R_3 gleich $\frac{5}{2}$ mal der Anzahl der begrenzenden R_4, bei der Verallgemeinerung auf eine beliebig begrenzte Mannigfaltigkeit in Wegfall kommt. Es mußte deshalb ein neuer Weg eingeschlagen werden. Dieser führte nun nicht bloß zu dem vorgenommenen Ziele, sondern eröffnete auch eigentümliche Einblicke in die Metrik des R_4: Mancher schon, der sich mit der Nicht-Euklidischen Geometrie im R_3 oder, wir können auch sagen, mit der Geometrie auf der Hypersphäre beschäftigt hat, wird es schmerzlich empfunden haben, daß eine Verallgemeinerung des so ungemein einfachen Ausdrucks für den Inhalt geradlinig begrenzter Figuren in der Nichteuklidischen Ebene (resp. sphärischen Polygone) mittels der Winkelsumme hier nicht möglich ist. Ich glaube nun zeigen zu können, daß diese Verallgemeinerung im R_4 möglich ist, und es wird sich hierbei gleichzeitig das einfache vierdimensionale Analogon zu den Legendreschen Sätzen über die Winkelsumme im Dreieck ergeben.

Abschnitt I.

Die Eulersche Formel für den R_3, R_4 und R_5.

§ 1.

Die Eulersche Formel für konvexe Figuren des R_3 (Zerlegung von Dreiecken in Dreiecke).

In diesem Abschnitt werden nur ganz bekannte Dinge abgeleitet, aber derart, daß die Methoden auch in höheren Dimensionen anwendungsfähig sind.

Definition. Wir wollen eine Zerlegung eines Dreiecks in Dreiecke dann eine *„einfache" Zerlegung* nennen, wenn keine Ecke eines Teildreiecks auf die Seite eines anderen Dreiecks oder auf eine Seite des großen Dreiecks fällt. (S. Fig. 1.)

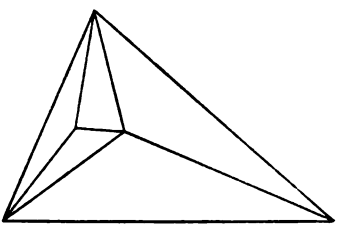


Fig. 1.

Wir bezeichnen die Anzahl der bei der einfachen Zerlegung eines Dreiecks auftretenden Teildreiecke mit M_2'', die Anzahl der Teileckpunkte mit M_0'' (für Fig. 1 ist $M_2''=5$, $M_0''=2$), ferner soll w_i die Summe der Winkel des i^{ten} Teildreiecks, W die Winkelsumme des großen Dreiecks bedeuten.

Dann ist, wie unmittelbar ersichtlich,

$$\text{(I)} \qquad \sum w_i = M_0'' 2\pi + W.$$

1. (Legendresche) Methode. (Benutzung von Sätzen über die Winkelsumme.)

Die Winkelsumme in jedem Dreieck ist gleich π, also:

$$\text{(II')} \qquad \sum w_i = M_2''\pi, \quad W = \pi$$

und aus (I) und (II') folgt

$$\text{(E'')} \qquad 2M_0'' + 1 = M_2''.$$

Die Formel (E'') enthält in gewissem Sinne den Kern der Eulerschen Formel. Wie man aus ihr die Formel selbst bekommt, wollen wir nach Auseinandersetzung der anderen Methode erörtern. Wir wollen an dieser Stelle nur noch den Fall behandeln, daß die Operationsebene nichteuklidisch, also etwa die Kugeloberfläche ist. Wir haben dann den Satz zu benutzen: die Summe der sphärischen Exzesse der Teildreiecke ist gleich dem sphärischen Exzeß des großen Dreiecks oder:

$$\text{(II)} \qquad W - \pi = \sum w_i - M_2''\pi.$$

Hieraus ergibt sich durch Kombination mit der von einer Voraussetzung über den Charakter der Operationsebene ganz unabhängigen Formel (I) wieder die Formel (E'').

Damit wir im folgenden vom Inneren und Äußeren von Dreiecken sprechen können, müssen wir uns im Hinblick auf die elliptischen Maßbestimmungen auf ein begrenztes Operationsgebiet beschränken (für die Kugel etwa auf ein Gebiet, das ganz innerhalb einer Halbkugel liegt).

2. Methode. (Zuhilfenahme der zentralen Zerlegung.)

Definition: Wir wollen ein Dreieck *„zentral" zerlegt* nennen, wenn es in drei Dreiecke mit gemeinsamem Scheitel in einem Punkte O, der außerhalb oder innerhalb des Dreiecks liegen kann, zerlegt ist. Dabei

werden diejenigen Teildreiecke, die ganz außerhalb des Hauptdreiecks liegen, negativ, die anderen positiv genannt

Wir suchen nun ein lineares Aggregat $\mathfrak{J}$ der Winkelsumme W eines Dreiecks und der Zahl π, das bei zentraler Zerlegung sich nicht verändert, d. i. es soll die Summe der Größen $\mathfrak{J}$ für die Teildreiecke, jede positiv oder negativ gerechnet, jenachdem das betreffende Dreieck ein positives oder negatives Teildreieck ist, gleich der Größe $\mathfrak{J}$ für das Hauptdreieck sein. Den gesuchten Ausdruck stellen wir in der Form $W+\nu\pi$ dar. Wir haben drei verschiedene Lagen von O zu unterscheiden: 1) O liegt innerhalb des Hauptdreiecks: drei positive Dreiecke, und es ist $\sum w_i = W+2\pi$; also haben wir die Gleichung:

(1) $$\mathfrak{J}' + \mathfrak{J}'' + \mathfrak{J}''' = W + 2\pi + 3\nu\pi = \mathfrak{J} = W + \nu\pi.$$

2) O liegt in einem Stück der Ebene, das von einer Seite und von zwei Seitenverlängerungen des Hauptdreiecks begrenzt wird: zwei positive und ein negatives Dreieck und $\sum w_i = W$. Daraus ergibt sich die Gleichung:

(2) $$\mathfrak{J}' + \mathfrak{J}'' - \mathfrak{J}''' = W + \nu\pi = \mathfrak{J} = W + \nu\pi.$$

3) O liegt in einem Gebiet, das von zwei Seitenverlängerungen umgeben wird: ein positives, zwei negative Dreiecke und $\sum w_i = W - 2\pi$; also:

(3) $$\mathfrak{J}' - \mathfrak{J}'' - \mathfrak{J}''' = W - 2\pi - \nu\pi = \mathfrak{J} = W + \nu\pi.$$

Die Gleichung (2) ist identisch erfüllt, (1) und (3) sind miteinander identisch. Allen drei Gleichungen wird durch $\nu = -1$ genügt. Wir haben also:

Hilfssatz 1: *Die Größe* $J = W - \pi$ bleibt bei zentraler Zerlegung ungeändert.

Daraus folgt aber sofort

Hilfssatz 2: Ist ein Dreieck irgendwie einfach in M_2'' Teildreiecke zerlegt, so ist die Summe der Größen $\mathfrak{J}_i$ aller Teildreiecke gleich der Größe $\mathfrak{J}$ für das Hauptdreieck oder

$$\sum w_i - M_2''\pi = W - \pi.$$

Denn nehmen wir einen Punkt O irgendwie in der Operationsebene an und zerlegen von ihm aus das Hauptdreieck und jedes Teildreieck zentral in die Dreiecke mit den zugehörigen Größen $\mathfrak{J}', \mathfrak{J}'', \mathfrak{J}'''$ resp. $\mathfrak{J}_i', \mathfrak{J}_i'', \mathfrak{J}_i'''$, so ist nach Hilfssatz 1:

$$\sum_1^{M_2''} \mathfrak{J}_i = \sum_1^{M_2''} \sum_1^3 \mathfrak{J}_i^{(k)},$$

aber die bei der zentralen Zerlegung entstehenden Dreiecke sind paarweise identisch, nur ist das eine immer positiv, das andere immer negativ,

mit Ausnahme der drei Teildreiecke, deren Grundlinien resp. die drei Seiten des Hauptdreiecks sind; die zu diesen Dreiecken gehörigen Größen sind mit $\mathfrak{Z}'$, resp. $\mathfrak{Z}''$, $\mathfrak{Z}'''$ auch dem Vorzeichen nach identisch und wir haben also

$$\sum \mathfrak{Z}_i - \mathfrak{Z},$$

was zu beweisen war. Damit sind wir aber in den Stand gesetzt, die erste Methode wieder anzuwenden, und es ist somit eine zweite Herleitung der Formel (E″) gegeben, bei der von dem Inhaltsbegriff oder dem Parallelenaxiom kein Gebrauch gemacht ist.

Es bleibt noch übrig, etwas über die Ableitung der eigentlichen Eulerschen Formel für Polyeder zu sagen. Diese Ableitung geschieht von dem einmal gewonnenen Ziele aus in zwei Schritten. 1) Man braucht zu den Teildreiecken und Teilecken nur noch das Hauptdreieck resp. dessen Ecken hinzuzufügen, und man hat in unserem geteilten Dreieck im Sinne der Analysis situs das Äquivalent für ein konvexes Polyeder, dessen Oberfläche bloß aus Dreiecken zusammengesetzt ist. Bezeichnen wir die Ecken und Flächen dieses Polyeders mit M_0' resp. M_1', so ist $M_0'' = M_0' - 3$, $M_2'' = M_2' - 1$; wir erhalten so aus (E″) die Gleichung

$$2M_0' - 4 = M_2'. \tag{E'}$$

Ein allgemeines konvexes oder einem konvexen Polyeder im Sinne der Analysis situs äquivalentes Polyeder sei begrenzt von lauter konvexen oder mit konvexen äquivalenten Polygonen. Dann läßt sich jede Begrenzungsfläche von einem Punkte in ihrem Inneren aus zentral in so viel Dreiecke zerlegen, wie sie Seiten hat. Waren die Ecken-, Kanten- und Flächenanzahlen des gegebenen Polyeders M_0, M_1, M_2, dann ist bei dem durch jene Teilung entstehenden, von lauter Dreiecken begrenzten Polyeder die Anzahl der Ecken gleich $M_0 + M_2$, die Anzahl der Flächen gleich $2M_1$. Es ergibt sich also, da für diese Anzahlen die Formel (E′) gilt,

$$M_0 + M_2 = M_1 + 2, \tag{E}$$

die Eulersche Polyederformel.

§ 2.

Die Eulersche Formel für konvexe Figuren des R_4 (Zerlegung eines Tetraeders in Tetraeder).

Definition: Eine Zerlegung eines Tetraeders in Tetraeder wird dann *einfach* genannt, wenn keine Ecke eines Teiltetraeders auf die Kante oder Fläche eines andern Teiltetraeders oder des Haupttetraeders fällt.

Bezeichnet man mit M_3'' die Anzahl der bei einer Zerlegung auftretenden Teiltetraeder, mit M_1'' die Anzahl der Teilkanten, mit M_0'' die

Anzahl der Teilecken, mit w_i die Flächenwinkel-Summe des i^{ten} Teiltetraeders, mit W die Flächenwinkel-Summe des Haupttetraeders, dann ist, wie unmittelbar ersichtlich,

$$M_1'' \cdot 2\pi + W = \sum w_i. \tag{I}$$

1. Methode (Anwendung der bei der Dreieckszerlegung gefundenen Resultate).

Aus der Formel (II) des vorigen Paragraphen folgt, daß die sphärischen Exzesse von sphärischen Dreiecken, die die Kugel einfach und lückenlos überdecken, sich zu 4π ergänzen. Denken wir nun um jede Teilecke und auch um die Ecken des Haupttetraeders Kugeln beschrieben, so schneiden die Teiltetraeder aus diesen Kugeln sphärische Dreiecke aus, deren sphärische Exzesse sich bei einer Teilecke zu 4π, bei einer Ecke des Haupttetraeders zu dem sphärischen Exzesse dieser Ecke ergänzen. Es ist aber die Summe der sphärischen Exzesse der Ecken eines Teiltetraeders resp. des Haupttetraeders gleich $2w_i - 4\pi$ resp. $2W - 4\pi$ und wir erhalten so die Gleichung

$$W - 2\pi + 2\pi M_0'' = \sum w_i - 2M_3''\pi. \tag{II}$$

Durch Kombination von (I) und (II) ergibt sich

$$-1 + M_0'' = M_1'' - M_3''. \tag{E''}$$

Für das Folgende haben wir, um von dem „Inneren" eines Tetraeders sprechen zu können, evtl. ein beschränktes Operationsgebiet anzunehmen.

2. Methode (Erweiterung der Methode 2. des vorigen Paragraphen).

Wir definieren *zentrale Zerlegung* genau entsprechend der Definition im vorigen Paragraphen und suchen jetzt ein lineares Aggregat $\mathfrak{Z}$ der Flächenwinkel-Summe W, der Summe der unten definierten *„Eckenzahlen"* $\mathfrak{M}_0$ und der Zahl π, das bei zentraler Zerlegung unverändert bleibt. Unter der Zahl einer Ecke verstehen wir folgendes: Legen wir um die Ecke als Mittelpunkt eine Kugel, so ist die Zahl der Ecke gleich dem Verhältnis des Inhalts des von ihr aus der Kugelfläche geschnittenen Dreiecks zu dem Gesamtinhalte der Kugelfläche. Die „Vollecke" hat also die Zahl 1.

Den gesuchten Ausdruck stellen wir dar in der Form $W + \varrho_0 \mathfrak{M}_0 + \nu\pi$. Wir haben vier verschiedene Lagen des Punktes O, von dem aus die Zerlegung geschieht, zu unterscheiden:

1) O liegt innerhalb des Haupttetraeders: vier positive Teiltetraeder, und es ist

$$W' + W'' + W''' + W^{(4)} = W + 8\pi, \quad \mathfrak{M}_0' + \mathfrak{M}_0'' + \mathfrak{M}_0''' + \mathfrak{M}_0^{(4)} = \mathfrak{M}_0 + 1.$$

Wir bekommen:

$$\mathfrak{Z}' + \mathfrak{Z}'' + \mathfrak{Z}''' + \mathfrak{Z}^{(4)} = W + 8\pi + \varrho_0 \mathfrak{M}_0 + \varrho_0 + 4\nu\pi = \mathfrak{Z} = W + \varrho_0 \mathfrak{M}_0 + \nu\pi.$$

Also:

$$8\pi + \varrho_0 + 3\nu\pi = 0.$$

2) O liegt in einem Gebiete, das von einer Seitenfläche des Haupttetraeders und drei Verlängerungen von Seitenflächen umgeben ist. (Wir kommen in das Gebiet aus dem Inneren durch Überschreitung einer Seitenfläche): drei positive und ein negatives Tetraeder, und es ist:

$$W' + W'' + W''' - W^{(4)} = W + 2\pi, \quad \mathfrak{M}_0' + \mathfrak{M}_0'' + \mathfrak{M}_0''' - \mathfrak{M}_0^{(4)} = \mathfrak{M}_0.$$

Wir erhalten also die Beziehung:

$$\mathfrak{Z}' + \mathfrak{Z}'' + \mathfrak{Z}''' - \mathfrak{Z}^{(4)} = W + 2\pi + \varrho_0\mathfrak{M}_0 + 2\nu\pi = \mathfrak{Z} = W + \varrho_0\mathfrak{M}_0 + \nu\pi.$$

Also:

$$2 + \nu = 0. \tag{2}$$

3) O liegt in einem Raum, der von vier Verlängerungen der Seitenflächen des Tetraeders umgeben ist. (Wir gelangen in ihn aus dem Inneren durch Überschreiten einer Kante): zwei positive und zwei negative Tetraeder, und es ist:

$$W' + W'' - W''' - W^{(4)} = W - 2\pi, \quad \mathfrak{M}_0' + \mathfrak{M}_0'' - \mathfrak{M}_0''' - \mathfrak{M}_0^{(4)} = \mathfrak{M}_0.$$

Wir erhalten so die Beziehung:

$$-2 = \nu. \tag{3}$$

4) O liegt in einem Raume, der von drei Verlängerungen von Seitenflächen umgeben ist. (Wir kommen in ihn durch Überschreiten einer Ecke): ein positives und drei negative Tetraeder, und es ist

$$W' - W'' - W''' - W^{(4)} = W - 8\pi, \quad \mathfrak{M}_0' - \mathfrak{M}_0'' - \mathfrak{M}_0''' - \mathfrak{M}_0^{(4)} = \mathfrak{M}_0 - 1,$$

und wir erhalten:

$$-\nu\pi - \varrho_0 - 3\nu\pi = 0. \tag{4}$$

(1) und (4), (3) und (2) sind identisch, und es ergibt sich: $\nu = -2$, $\varrho_0 = -2\pi$. Wir haben also

Hilfssatz 1. Die Größe $\mathfrak{Z} = W - 2\pi\mathfrak{M}_0 - 2\pi$ bleibt bei zentraler Zerlegung ungeändert.

Daraus erhalten wir aber ebenso wie im vorigen Paragraphen sofort:

Hilfssatz 2. Ist ein Tetraeder irgendwie einfach in Tetraeder zerlegt, so ist die Summe der Größen $\mathfrak{Z}_i$ aller Teiltetraeder gleich der Größe $\mathfrak{Z}$ für das Haupttetraeder, und wir erhalten demgemäß wieder die gesuchte Relation

$$W - 2\pi = \sum w_i - 2\pi M_3'' - 2\pi M_0''. \tag{II}$$

Wir wollen jetzt die Eulersche Formel für den R_4 aus der Kernformel (E″) herleiten. Fügen wir die Anzahl der Ecken und Kanten des Haupttetraeders und dieses selbst als Einheit zu den Anzahlen M_0'', M_1'' und M_3'' hinzu, dann erhalten wir aus (E″) eine Beziehung (E′)

zwischen der Anzahl der Ecken M_0, der Anzahl der Kanten M_1' und der Anzahl der begrenzenden Räume M_3' irgend einer bloß von Tetraedern begrenzten konvexen oder mit einer konvexen Mannigfaltigkeit äquivalenten Mannigfaltigkeit im R_4. Es ergibt sich

$$-1 + M_0' - 4 = M_1' - 6 - M_3' + 1,$$

$$M_0' - M_3' = M_1'. \tag{E'}$$

Um nun eine Formel für eine von beliebigen konvexen oder konvexen äquivalenten Polyedern begrenzte, konvexe Mannigfaltigkeit im R_4 zu erhalten, führen wir folgende Bezeichnung ein:

Definition: Unter dem Symbol Σ_i^k (i und k voneinander verschiedene, ganze, positive Zahlen) verstehen wir, wenn $k < i$ ist, die Anzahl der Begrenzungsmannigfaltigkeiten von i Dimensionen, jede so oft gezählt, wie die Anzahl der Mannigfaltigkeiten k^{ter} Dimension, die sie begrenzen, angibt; wenn $k > i$ ist, verstehen wir unter Σ_i^k die Anzahl der Begrenzungsmannigfaltigkeiten von i Dimensionen, jede so oft gezählt, wie sie zu der Begrenzung von Mannigfaltigkeiten von k Dimensionen gehört.

Zum Beispiel: Σ_3^0 ist gleich der Anzahl der Begrenzungsräume, jeder so oft gezählt als er Ecken hat; Σ_1^3 ist gleich der Anzahl der Kanten, jede so oft gezählt als Räume durch sie hindurchgehen.

Diese Symbole sind nun nicht voneinander unabhängig, sondern es gelten folgende Beziehungen zwischen ihnen:

$$\Sigma_i^k = \Sigma_k^i, \tag{1}$$

wie sich unmittelbar aus der Definition ergibt.

$$\Sigma_1^0 = 2M_1, \tag{2}$$

also gleich der doppelten Anzahl der Kanten, denn jede Kante wird von zwei Ecken begrenzt.

$$\Sigma_2^0 = \Sigma_2^1, \tag{3}$$

denn es ist die Anzahl der Ecken jeder Fläche gleich der Anzahl der sie begrenzenden Kanten.

$$\Sigma_3^0 + \Sigma_3^2 = \Sigma_3^1 + 2M_3. \tag{4}$$

Diese Formel folgt aus dem Eulerschen Polyedersatz, angewandt auf jede Begrenzungsmannigfaltigkeit von drei Dimensionen.

$$\Sigma_2^3 = 2M_2, \tag{3'}$$

an jeder Fläche hängen zwei Räume;

$$\Sigma_1^3 = \Sigma_1^2, \tag{2'}$$

an jeder Kante hängen so viel Räume wie Flächen.

$$\Sigma_0^1 + \Sigma_0^3 = \Sigma_0^2 + 2M_0. \tag{1'}$$

Dies folgt aus dem Eulerschen Polyedersatz für drei Dimensionen, angewandt auf das Gebilde, das aus der Begrenzungsmannigfaltigkeit einer um einen Eckpunkt gelegten Hypersphäre von den Begrenzungsmannigfaltigkeiten des gegebenen Gebildes ausgeschnitten wird.

Aus diesen Beziehungen ergibt sich, daß wir alle Symbole durch eins, etwa durch das Symbol Σ_0^2 und die Anzahlen M_0, M_1, M_2, M_3 ausdrücken können, und zwar erhalten wir:

$$\Sigma_0^1 = 2M_1, \quad \Sigma_0^2 = \Sigma_0^2, \quad \Sigma_0^3 = 2M_0 - 2M_1 + \Sigma_0^2,$$
$$\Sigma_1^2 = \Sigma_0^2, \quad \Sigma_1^3 = \Sigma_0^2, \quad \Sigma_2^3 = 2M_2.$$

Jetzt haben wir aber Formel (4) noch nicht benutzt. Diese kann geschrieben werden:

$$\Sigma_0^3 = 2M_3 - 2M_2 + \Sigma_0^2.$$

Ziehen wir diese Gleichung von der dritten der obigen Reihe ab, so ergibt sich unmittelbar:

(E) $$M_0 + M_2 = M_1 + M_3,$$

der Eulersche Polyedersatz für vier Dimensionen, den wir also abgeleitet haben, ohne die Formel (E′) zu benutzen.*) Wir wollen zeigen, daß (E′) in dem Nachweis der Eulerschen Formel die Beziehung (4) zwischen den Symbolen Σ_i^k ersetzen kann: Wir nehmen eine beliebige konvexe Mannigfaltigkeit V von vier Dimensionen an, die von M_3 Räumen, M_2 Flächen, M_1 Kanten und M_0 Ecken begrenzt wird. Alle diese Mannigfaltigkeiten sollen konvex sein. Wir zerlegen jede Begrenzungsfläche zentral von einem inneren Punkte aus. Das neue Gebilde $\overline{V}$, das als Begrenzungsflächen nur Dreiecke hat, möge von $\overline{M}_3$ Räumen, $\overline{M}_2$ Flächen, $\overline{M}_1$ Kanten und $\overline{M}_0$ Ecken begrenzt sein. Dann ist:

$$\overline{M}_3 = M_3, \quad \overline{M}_2 = \Sigma_2^0, \quad \overline{M}_1 = M_1 + \Sigma_2^0, \quad \overline{M}_0 = M_0 + M_2.$$

Wir zerlegen nun bei $\overline{V}$ jeden Begrenzungsraum von einem inneren Punkte aus zentral, und erhalten ein Polyeder V', das jetzt bloß von Tetraedern begrenzt wird. Die entsprechenden Begrenzungsanzahlen seien M_3', M_2', M_1', M_0'. Dann ist:

$$M_3' = \overline{\Sigma}_3^2, \quad M_2' = \overline{M}_2 + \overline{\Sigma}_3^1, \quad M_1' = \overline{M}_1 + \Sigma_3^0, \quad M_0' = \overline{M}_0 + \overline{M}_3'.$$

Es ist aber:

$$\overline{\Sigma}_3^2 = 2\overline{M}_2 = 2\Sigma_2^0, \quad \overline{\Sigma}_3^0 = \Sigma_3^0 + \Sigma_3^2.$$

Wir erhalten also:

$$M_3' = 2\Sigma_2^0, \quad M_1' = M_1 + \Sigma_2^0 + \Sigma_3^0 + \Sigma_3^2, \quad M_0' = M_0 + M_2 + M_3.$$

Auf V' können wir aber die Formel (E′) anwenden, und finden so:

$$M_0 + M_2 + M_3 + 2\Sigma_2^0 = M_1 + \Sigma_2^0 + \Sigma_3^0 + \Sigma_3^2.$$

*) Diese Ableitung findet sich bei Poincaré, Analysis situs, Journal de l'Éc. Polyt., IIe Série, Cah. 1, § 17.

Durch Einsetzen der obigen Formeln, aber ohne Benutzung von (4), ergibt sich wiederum:

(E) $$M_3 + M_1 = M_0 + M_2.$$

Diese Ableitung wäre ganz ohne Zweck, weil (E) ja viel einfacher direkt durch den Gebrauch der Beziehungen zwischen den Symbolen Σ_i^k folgt, wenn wir nicht gezwungen wären, für den R_5 die der zuletzt entwickelten analoge Methode zur Ableitung der Eulerschen Formel zu benutzen.

§ 3.

Die Eulersche Formel für konvexe Figuren des R_5 (Zerlegung eines Pentatetraeders*) in Pentatetraeder).

Definition: Eine Zerlegung eines Pentatetraeders in Pentatetraeder wird dann *einfach* genannt, wenn keine Ecke irgend einer Teilmannigfaltigkeit in das Innere einer Begrenzungsmannigfaltigkeit einer anderen Teilmannigfaltigkeit oder der Hauptmannigfaltigkeit fällt.

Bezeichnet man mit M_4'' die Anzahl der bei einer einfachen Zerlegung eines Pentatetraeders auftretenden Teilpentatetraeder, mit M_2'' die Anzahl der Teilflächen, mit M_1'' die der Teilkanten, mit M_0'' die der Teileckpunkte, mit w_i die Raumwinkelsumme des i^{ten} Teilpentatetraeders, mit W die Summe der Raumwinkel der geteilten Mannigfaltigkeit, dann gilt offenbar wieder die Beziehung:

(I) $$M_2'' \cdot 2\pi + W = \Sigma w_i.$$

1. Methode. (Anwendung der bei der Dreiecks- und Tetraederzerlegung gefundenen Resultate.)

Aus der Formel (2) des vorigen Paragraphen folgt in einfacher Weise (indem man den Außenraum des geteilten Tetraeders zu der Gesamtheit der Teiltetraeder mit hinzunimmt), daß, wenn das Begrenzungsgebilde einer Hypersphäre in eine Anzahl (sphärischer) Tetraeder mit den Flächenwinkelsummen $[w_1], \cdots [w_i] \cdots$ einfach zerlegt ist,

$$\Sigma([w_i] - 2\pi) = 2\pi[S]$$

ist. Hierbei ist die Summe über alle Tetraeder erstreckt und $[S]$ ist die Anzahl der Teileckpunkte.

Wir legen nun um jede Teilecke eine Hypersphäre, dann wird deren Begrenzungsgebilde ausgefüllt von Tetraedern, *deren Ecken den Kanten*, deren Kanten den Seitenflächen, deren Flächen den Seitenräumen der Teilpentatetraeder entsprechen. Die Anzahl $[S]$ ist also für die Teilung

*) Ein Pentatetraeder ist die von fünf Tetraedern, zehn Dreiecken, zehn Kanten *und fünf* Ecken begrenzte einfachste polyedrische Mannigfaltigkeit des R_4.

gleich der Anzahl der von der betreffenden Ecke ausgehenden Kanten. Berücksichtigen wir nun, daß das Pentatetraeder fünf Ecken hat und jedes Begrenzungsdreieck an drei Ecken stößt, und bilden wir den obigen Ausdruck bei allen Teileckpunkten und auch bei den Ecken der Hauptmannigfaltigkeit, so ergibt sich:

$$3W - 10\pi = \Sigma(3w_i) - 10\pi M_4'' - 4\pi M_1''. \tag{II}$$

Zu dieser Gleichung können wir vielleicht noch etwas einfacher auf einem anderen Wege gelangen: Wir legen um einen beliebigen Punkt jeder Kante als Zentrum in einem zu dieser Kante senkrechten Raume eine Kugel, auf dieser zeichnen die Teilmannigfaltigkeiten, die durch die betreffende Kante laufen, ein Netz sphärischer Dreiecke ein. Der Winkel zweier Dreiecksseiten in diesem Netze ist aber gleich dem Winkel der entsprechenden Räume. Wenn wir nun berücksichtigen, 1. daß die Summe der sphärischen Exzesse aller dieser Dreiecke gleich 4π ist, 2. daß jedes Pentatetraeder zehn Kanten hat und jede Seitenfläche durch drei Kanten läuft (jeder Raumwinkel also an drei Kanten auftritt), so ergibt sich wieder die Gleichung (II).

Kombinieren wir (I) und (II), so erhalten wir die *Nebenformel:*

$$2M_1'' + 5M_4'' = 3M_2'' + 5. \tag{N''}$$

Für das Folgende gilt wieder die Bemerkung über die Beschränkung des Operationsbereiches (s. S. 566).

2. Methode. (Erweiterung der Methode 2. für den R_4.)

Wir definieren wieder zentrale Zerlegung genau so, wie in den vorhergehenden Paragraphen.

Definition: Legen wir um eine Ecke einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit als Zentrum eine Hypersphäre, so schneidet die Ecke aus dieser Hypersphäre ein sphärisches Polyeder aus. Das Verhältnis des Inhalts dieses sphärischen Polyeders zu dem Gesamtinhalte des Begrenzungsgebildes der Hypersphäre nennen wir die *„Zahl der 4-dimensionalen Ecke"*.

Dieses Verhältnis ist, wie leicht ersichtlich, unabhängig von der Wahl des Radius der Hypersphäre.

Definition: Das von n Raumstücken und n Halbebenen, die durch eine Gerade hindurchlaufen, begrenzte Stück des R_4 nennen wir einen vierdimensionalen Keil. Legen wir eine Kugel durch einen Punkt dieser Geraden in einen zu dieser Geraden senkrechten Raum, so schneiden die Räume und Ebenen des Keils ein sphärisches Polygon auf der Kugel aus. Das Verhältnis des Inhalts dieses Polygons zu der ganzen Kugeloberfläche nennen wir die *„Zahl des Keils"*.

Wir suchen jetzt für ein Pentatetraeder ein lineares Aggregat $\mathfrak{J}$ der Raumwinkelsumme W, der Summe der Keilzahlen M_1, der Summe der

Eckenzahlen M_0 und der Zahl π, das bei zentraler Zerlegung ungeändert bleibt. Den gesuchten Ausdruck stellen wir dar in der Form

$$W + \varrho_1 M_1 + \varrho_0 M_0 + \nu\pi.$$

Je nach der Lage des die Zerlegung vermittelnden Punktes O haben wir fünf verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. O liegt im Innern der Hauptmannigfaltigkeit: fünf positive Teilmannigfaltigkeiten. Es ergibt sich die Gleichung:

$$20\pi + 5\varrho_1 + \varrho_0 + 4\nu\pi = 0. \tag{1}$$

2. O liegt in einem von einem Seitenraum und vier erweiterten Seitenräumen umgebenen Gebiet. (Wir gelangen in dasselbe aus dem Inneren durch Überschreitung eines Seitenraumes): Vier positive und ein negatives Pentatetraeder. Dieser Fall liefert uns die Bedingungsgleichung:

$$8\pi + \varrho_1 + 2\nu\pi = 0. \tag{2}$$

3. O liegt in einem Gebiet, das von fünf erweiterten Seitenränmen umgeben wird, unter der Begrenzung befindet sich eine Seitenfläche der Hauptmannigfaltigkeit. (Man gelangt aus dem Innern in diesen Raumteil durch Überschreiten einer Seitenfläche): Drei positive und zwei negative Pentatetraeder. Es ergibt sich keine weitere Bedingungsgleichung für $\Im$, sondern eine Identität.

4. O liegt in einem Gebiete, das ebenfalls von fünf erweiterten Seitenräumen umgeben wird; unter der Begrenzung befindet sich bloß eine Kante der Hauptmannigfaltigkeit. (Wir gelangen in diesen Raumteil durch Überschreiten einer Kante): Zwei positive und zwei negative Pentatetraeder. Es ergibt sich die Gleichung:

$$-8\pi - \varrho_1 - 2\nu\pi = 0. \tag{4}$$

5. O liegt in einem Gebiete, das von vier erweiterten Seitenräumen umgeben wird (Erreichung durch Überschreitung einer Ecke): Vier negative, ein positives Pentatetraeder. Wir haben hier:

$$-20\pi - 5\varrho_1 - \varrho_0 - 4\nu\pi = 0. \tag{5}$$

(1) und (4), (2) und (5) sind resp. miteinander identisch. Es brauchen also die drei Größen ϱ_1, ϱ_0 und ν nur zwei linearen Gleichungen zu genügen. Wir erhalten die zwei einfachsten voneinander unabhängigen Wertesysteme, wenn wir das eine Mal $\varrho_0 = 0$, das andere Mal $\varrho_1 = 0$ setzen. Wir erhalten im ersten Falle für ϱ_1 den Wert $-\frac{4\pi}{3}$, für ν den Wert $\frac{10}{3}$; im zweiten Falle für ϱ_0 den Wert -4π, für ν den Wert -4. Wir erhalten so zwei „Zerlegungsinvarianten“:

$$\Im = W - 4\pi M_0 - 4\pi,$$

$$\Im' = W - \tfrac{4\pi}{3} M_1 - \tfrac{10}{3}\pi.$$

Wir haben also:

Hilfssatz 1: Jeder Ausdruck von der Form

$$\frac{\mathfrak{J}+\lambda\mathfrak{J}'}{1+\lambda} = W - \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}_1\frac{\lambda}{1+\lambda} - 4\pi\mathfrak{M}_0\cdot\frac{1}{1+\lambda} - \frac{4+\frac{10}{3}\lambda}{1+\lambda}\pi,$$

wo λ einen willkürlichen Wert hat, bleibt unverändert bei zentraler Zerlegung.

Daraus folgt aber sofort durch denselben Ideengang wie an den entsprechenden Stellen in § 1 und § 2:

Hilfssatz 2: Ist ein Pentatetraeder irgendwie einfach in Pentatetraeder zerlegt, so ist die Summe der Größen $\frac{\mathfrak{J}_i+\lambda\mathfrak{J}_i'}{1+\lambda}$ aller Teilmannigfaltigkeiten gleich der Größe $\frac{\mathfrak{J}+\lambda\mathfrak{J}'}{1+\lambda}$ für die Hauptmannigfaltigkeit.

Aber es ergänzen sich die Zahlen $\mathfrak{M}_0$ um jede Ecke herum zu 1, die Größen $\mathfrak{M}_1$ um jede Kante herum ebenfalls zu 1, und wir haben deswegen:

$$\text{(III)}\quad W - \frac{4+\frac{10}{3}\lambda}{1+\lambda}\pi = \Sigma w_i - \frac{4\pi}{3}M_1''\frac{\lambda}{1+\lambda} - 4\pi M_0''\frac{1}{1+\lambda} - \frac{4+\frac{10}{3}\lambda}{1+\lambda}\pi M_4''.$$

Daraus erhalten wir durch Kombination mit (I)

$$\text{(G)}\qquad 2\lambda M_1'' + 6M_0'' + (6+5\lambda)M_4'' = (3+3\lambda)M_2'' + 6 + 5\lambda.$$

Setzen wir speziell $\lambda = 0$, so erhalten wir die Relation:

$$\text{(E'')}\qquad 2M_0'' + 2M_4'' = M_2'' + 2.$$

Setzen wir $\lambda = \infty$, so erhalten wir die bereits durch die erste Methode gewonnene Formel (N'').

Um nun den Zusammenhang von (E'') und (N'') mit der Eulerschen Formel zu erkennen, setzen wir

$$M_0' = M_0'' + 5,\quad M_1' = M_1'' + 10,\quad M_2' = M_2'' + 10,\quad M_4' = M_4'' + 1.$$

Dann ergeben sich für M_0' usw. aus (N'') und (E'') die Gleichungen:

$$\text{(N')}\qquad 2M_1' + 5M_4' = 3M_2',$$

$$\text{(E')}\qquad 2M_0' + 2M_4' = M_2' + 4.$$

Damit haben wir zwei lineare Beziehungen zwischen den Anzahlen der Begrenzungsmannigfaltigkeiten 0^{ter}, 1^{ter}, 2^{ter} und 4^{ter} Dimension für eine bloß von Pentatetraedern begrenzte konvexe Mannigfaltigkeit im R_5.

Betrachten wir nun eine beliebig begrenzte Mannigfaltigkeit V, so haben wir für die im vorigen Paragraphen eingeführten Symbole Σ_i^k hier folgende Beziehung:

(1) $$\Sigma_i^k = \Sigma_k^i$$

(2) $$\Sigma_0^1 = 2M_1$$

(3) $$\Sigma_2^0 = \Sigma_2^1$$

(4) $$\Sigma_3^0 + \Sigma_3^2 = \Sigma_3^1 + 2M_3$$

(5) $$\Sigma_4^0 + \Sigma_4^2 = \Sigma_4^1 + \Sigma_4^3,$$

dies folgt aus dem Eulerschen Polyedersatz für den R_4.

(4') $$\Sigma_3^4 = 2M_3:$$

an jedem begrenzenden R_3 hängen zwei begrenzende R_4.

(3') $$\Sigma_2^3 = \Sigma_2^4:$$

an jeder Fläche hängen soviele R_3 wie R_4.

(2') $$\Sigma_1^4 + \Sigma_1^2 = \Sigma_1^3 + 2M_1:$$

Anwendung des Eulerschen Polyedersatzes auf das Gebilde, das aus einer Hypersphäre senkrecht zu einer Kante ausgeschnitten wird.

(1') $$\Sigma_0^1 + \Sigma_0^3 = \Sigma_0^2 + \Sigma_0^4:$$

Anwendung der Eulerschen Formel auf das Gebilde, das auf einer Hypersphäre von vier Dimensionen mit dem Zentrum in einer Ecke ausgeschnitten wird.

Diese Gleichungen sind nicht alle voneinander unabhängig; vielmehr sind drei von den Größen noch voneinander unabhängig. Wir wählen Σ_1^2, Σ_1^3 und Σ_2^3. Dann folgt:

$$\Sigma_0^1 = 2M_1, \quad \Sigma_0^2 = \Sigma_1^2, \quad \Sigma_0^3 = \Sigma_1^3 - \Sigma_2^3 + 2M_3,$$
$$\Sigma_0^4 = 2M_1 + \Sigma_1^3 - \Sigma_2^3 + 2M_3 - \Sigma_1^2,$$
$$\Sigma_1^4 = 2M_1 + \Sigma_1^3 - \Sigma_1^2, \quad \Sigma_2^4 = \Sigma_2^3, \quad \Sigma_3^4 = 2M_3.$$

Zu der Definition des Symbols Σ_i^k fügen wir noch hinzu:

Definition: Unter dem Symbol $\Sigma_i^{k,l}$ verstehen wir die Anzahl der Begrenzungsmannigfaltigkeiten i^{ter} Dimension, jede so oft gezählt, wie Begrenzungsmannigfaltigkeiten von k Dimensionen auf ihr liegen (resp. durch sie hindurchgehen), aber jede von diesen wieder nicht einfach gezählt, sondern so oft, als die Zahl der Mannigfaltigkeiten l^{ter} Dimension angibt, die auf ihr liegen, resp. durch sie hindurchgehen.

Beispiel: $\Sigma_1^{2,3}$ bedeutet die Anzahl der Kanten, jede so oft gezählt, als sie auf verschiedenen Flächen liegt, wobei jede Fläche so oft gezählt wird, als sie in verschiedenen Räumen liegt. Es ist $\Sigma_1^{2,3} = \Sigma_3^{2,1}$, und wir wollen von diesem letzteren Symbol, das wir im nachfolgenden gebrauchen werden, zeigen, daß es auf die einfacheren Symbole zurückgeführt werden kann. Wir behaupten: es ist $\Sigma_1^{2,3} = 2\Sigma_1^3$.

Beweis: Wir legen um einen Punkt einer Kante in einem zu ihr senkrechten R_4 eine Hypersphäre; auf dieser werden die Flächen, die durch die Kanten hindurchgehen, die Eckpunkte, die Räume, die durch die Kante hindurchgehen, die Seiten eines polygonalen Netzes sein, das eine einer Kugel äquivalente Fläche der Hypersphäre einfach und lückenlos überdeckt. Es ist aber die Anzahl der Eckpunkte, jeder so oft gezählt, als Seiten durch ihn hindurchgehen, gerade gleich der doppelten Anzahl der Seiten überhaupt, denn jede der Seiten wird, da sie durch zwei Eckpunkte läuft, gerade doppelt gezählt. Damit ist die Relation $\Sigma_1^{2,3} = 2\Sigma_1^3$ nachgewiesen.

Wir nehmen nun eine beliebige Mannigfaltigkeit V von fünf Dimensionen an, die durch M_4 Mannigfaltigkeiten von vier Dimensionen, M_3 Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen, M_2 von zwei Dimensionen, M_1 von einer Dimension und M_0 Eckpunkten begrenzt wird. Dabei sollen jetzt alle Begrenzungsgebilde sowohl wie auch V selbst konvex oder einer konvexen Mannigfaltigkeit äquivalent sein. Unsere Aufgabe ist, durch drei schrittweise Zerlegungen diese Mannigfaltigkeit in eine nur von Pentatetradern begrenzte überzuführen.

Wir zerlegen zunächst jede *Seitenfläche* zentral und erhalten eine Mannigfaltigkeit $\overline{V}$ mit $\overline{M}_i$ Begrenzungsmannigfaltigkeiten i^{ter} Dimension, es ist:

$$\overline{M}_4 = M_4,\ \overline{M}_3 = M_3,\ \overline{M}_2 = \Sigma_2^0,\ \overline{M}_1 = M_1 + \Sigma_2^0,\ \overline{M}_0 = M_0 + M_2.$$

Darauf zerlegen wir jeden Begrenzungsraum zentral und erhalten aus $\overline{V}$ eine Mannigfaltigkeit V mit M_i Begrenzungsmannigfaltigkeiten i^{ter} Dimension. Es ist:

$$\overline{M}_4 = M_4,\ M_3 = \Sigma_3^{2,1},\ M_2 = \Sigma_2^0 + \Sigma_3^1 + \Sigma_3^{2,1},\ \overline{M}_1 = M_1 + \Sigma_2^0 + \Sigma_3^0 + \Sigma_3^2,$$
$$\overline{M}_0 = M_0 + M_2 + M_3.$$

Darauf zerlegen wir jede Begrenzungsmannigfaltigkeit von vier Dimensionen zentral und erhalten eine Mannigfaltigkeit V' mit M_i' Begrenzungsgebilden i^{ter} Dimension. Es ist:

$$M_4' = 2\Sigma_3^{2,1},\ M_2' = \Sigma_2^0 + \Sigma_3^1 + \Sigma_3^{2,1} + \Sigma_4^1 + \Sigma_4^{2,1} + 2\Sigma_3^0 + 2\Sigma_3^2,$$
$$M_1' = M_1 + \Sigma_2^0 + \Sigma_3^0 + \Sigma_3^2 + \Sigma_4^0 + \Sigma_4^2 + \Sigma_4^3,\ M_0' = M_0 + M_2 + M_3 + M_4.$$

V' ist aber eine Mannigfaltigkeit, die nur von Pentatetraedern begrenzt wird. Darum können wir auf ihre Begrenzungsanzahlen die Formeln (N') und (E') anwenden. Zunächst wollen wir das mit (N') tun.

Wir erhalten:

$$2M_1 + 2\Sigma_0^2 + 2\Sigma_0^3 + 2\Sigma_2^3 + 2\Sigma_0^4 + 2\Sigma_2^4 + 2\Sigma_3^4 + 10\Sigma_3^{2,1}$$
$$= 3\Sigma_0^2 + 3\Sigma_1^3 + 3\Sigma_3^{2,1} + 3\Sigma_1^4 + 3\Sigma_4^{2,1} + 6\Sigma_0^3 + 6\Sigma_2^3.$$

Es ist aber nach dem Obigen für Σ_3^{21} $2\Sigma_1^3$ zu setzen, und es ist weiter $\Sigma_4^{21} = \Sigma_1^{24} = \Sigma_1^{23}$ (denn durch einen Eckpunkt eines Polygonalnetzes gehen gerade so viel Polygone, wie Seiten des Netzes hindurch) $= 2\Sigma_1^3$. Wir haben also daraus:

$$2M_1 + 2\Sigma_0^4 + 2\Sigma_2^4 + 2\Sigma_3^4 + 5\Sigma_1^3 = \Sigma_0^2 + 3\Sigma_1^4 + 4\Sigma_0^3 + 4\Sigma_2^3.$$

Durch Anwendung der Formeln, die die Beziehungen zwischen den Symbolen Σ_i^k ausdrücken, erkennen wir, daß diese Gleichung identisch erfüllt ist: *Wir erhalten also aus* (N′) *für eine allgemeine Mannigfaltigkeit keine Beziehung.*

Wir gehen jetzt zur Formel (E′) über, die der Zerlegungsinvariante $\mathfrak{Z}$ entspricht. Setzen wir für M_0', M_4' und M_2' die oben gefundenen Werte, ausgedrückt in den Anzahlen für die Mannigfaltigkeit V, ein, so ergibt sich:

$$2M_0 + 2M_2 + 2M_3 + 2M_4 + 4\Sigma_3^{2,1} = \Sigma_0^2 + \Sigma_1^3 + \Sigma_3^{2,1} + \Sigma_1^4 + \Sigma_4^{2,1} + 2\Sigma_0^3 + \Sigma_2^3 + 4.$$

Durch die uns bekannten Vereinfachungen erhalten wir:

$$2M_0 + 2M_2 + 2M_3 + 2M_4 = \Sigma_0^2 - 3\Sigma_1^3 + \Sigma_1^4 + 2\Sigma_0^3 + \Sigma_2^3 + 4,$$

und daraus vermöge der Beziehungen zwischen den Größen Σ_i^k:

$$M_0 + M_2 + M_4 = M_1 + M_3 + 2. \tag{E}$$

Denken wir nun daran, daß für eine bloß von Pentatetraedern begrenzte Mannigfaltigkeit außer den Formeln (N′) und (E′) noch die unmittelbar einleuchtende Formel

$$M_3 = \frac{5}{2} M_4$$

besteht, so kann man folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. *In fünf Dimensionen gibt es drei lineare Beziehungen zwischen den Anzahlen der Begrenzungsmannigfaltigkeiten einer nur von Pentatetraedern begrenzten konvexen Mannigfaltigkeit. Für eine allgemein begrenzte konvexe Mannigfaltigkeit gibt es dagegen nur eine lineare Beziehung zwischen den Anzahlen, die Eulersche Formel* (E), *welche sich aus einer von jenen dreien* (*nämlich* (E′)) *vermittels der Eulerschen Formeln für den R_3 und den R_4 herleiten läßt.*

Abschnitt II.

Der Nicht-Euklidische Inhalt und die Legendreschen Sätze für den R_4. Eigenschaften der Größe $\mathfrak{Z} = W - 4\pi\mathfrak{M}_0 - 4\pi$.

Wir haben die Größe $\mathfrak{Z}$ konstruiert, um die Eulersche Formel für fünf Dimensionen abzuleiten. Es scheint jedoch der Mühe wert zu sein, näher auf ihre Eigenschaften einzugehen, die zeigen, daß $\mathfrak{Z}$ in jeder Beziehung ein Analogon zu dem Exzeß der Winkelsumme im Dreieck ist. Und zwar wollen wir im ersten Paragraphen dieses Abschnittes nachweisen, daß $\mathfrak{Z}$ nicht nur, wie wir früher gezeigt haben, bei zentraler Zerlegung, sondern bei jeder Zerlegung unverändert bleibt. Im zweiten Paragraphen soll nachgewiesen werden, daß $\mathfrak{Z}$ für jedes Pentatetraeder im Euklidischen R_4 gleich Null ist, endlich im dritten Paragraphen soll gezeigt werden, daß diese Eigenschaft für den Euklidischen Raum charakteristisch ist, und daß im Nicht-Euklidischen Raume $\mathfrak{Z}$, abgesehen von einer multiplikativen Konstante, gleich dem Inhalt des Pentatetraeders ist.

§ 1.

Die Größe $\mathfrak{Z}$ als Zerlegungsinvariante.

Die folgenden Entwicklungen gelten für einen Raum mit beliebiger Maßbestimmung. Zur Vermeidung von Wiederholungen derselben Schlüsse für verschiedene Dimensionen wollen wir einige allgemeine Definitionen vorausschicken.

Definition: Unter einem Simplex S_n im R_n verstehen wir eine von linearen Mannigfaltigkeiten begrenzte Mannigfaltigkeit („Polyeder" des R_n) von $n-1$ Dimensionen mit $n+1$ Eckpunkten.

Eine Strecke ist also ein S_1, ein Dreieck ein S_2, ein Tetraeder ein S_3 und ein Pentatetraeder ein S_4.

Definition: Liegt der Punkt B in der Kante A_1A_2 des Simplex $S_n \equiv A_1A_2\cdots A_{n+1}$, dann nennen wir S_n in die Simplexe $A_1BA_3\cdots A_{n+1}$ und $A_2BA_3\cdots A_{n+1}$ *„transversal"* zerlegt.

Satz 2. *Es sei jedem Simplex S_n eines R_n eine* (im allgemeinen bei einer Bewegung sich verändernde) *Größe* (Strecke, Zahl) $\mathfrak{Z}$ *zugeordnet: Bleibt diese Größe bei jeder transversalen Zerlegung jedes Simplexes ungeändert, so bleibt sie bei jeder Zerlegung jedes Simplexes ungeändert.*

Der Beweis erfolgt am besten mit Hilfe der vollständigen Induktion. Wir wollen also annehmen, der Satz, der für die Simplexe S_1 des R_1 selbstverständlich ist, gelte auch für den R_{n-1}; wir wollen dann seine Richtigkeit für den R_n nachweisen. Wir wollen A_{n+1} die Spitze, $A_1A_2\cdots A_n$ die Basis des Simplexes nennen. Wir betrachten die Gesamtheit der

Simplexe, deren gemeinsame Spitze A_{n+1} ist und deren Basen alle in demselben Raume R_b von $n-1$ Dimensionen liegen. Dann ist jedem Simplex S_{n-1} des Basisraumes eine bestimmte Zahl zugeordnet, nämlich die Zahl des zugehörigen Simplexes (S_{n-1}, A_{n+1}). Einer transversalen Zerlegung eines Simplexes S_n aus der betrachteten Gesamtheit, bei der keine der Kanten, deren eines Ende A_{n+1} ist, zerlegt wird, entspricht eine transversale Zerlegung der zugehörigen Basis und umgekehrt. Aus der Annahme der Gültigkeit unseres Satzes für $n-1$ Dimensionen folgt, daß die Größe $\mathfrak{Z}$ nicht nur bei transversaler Zerlegung des Simplexes unverändert bleibt, sondern bei jeder Zerlegung in Simplexe mit der gemeinsamen Spitze A_{n+1}. Wir wollen eine solche Zerlegung kurz als „pyramidale" Zerlegung bezeichnen. Wir zerlegen nun eine „Pyramide" P_n des R_n, deren Spitze A_{n+1} ist und deren Basis ein beliebiges Polyeder Π_{n-1} des R_{n-1} ist, in lauter Simplexe $S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, \cdots, S_n^{(k)}$ und ordnen P_n die Summe der Zahlen, die zu $S_n^{(1)}, \cdots, S_n^{(k)}$ gehören, zu. Es ist also:

$$\mathfrak{Z}(P_n) = \mathfrak{Z}(S_n^{(1)}) + \mathfrak{Z}(S_n^{(2)}) + \cdots + \mathfrak{Z}(S_n^{(k)}).$$

Es ist leicht nachzuweisen, daß diese Zahl unabhängig ist von der Art, wie die Zerlegung von P_n in Simplexe mit der Spitze A_{n+1} gemacht ist. Wir ergänzen P_n durch Hinzufügung von $S_n^{(k+1)} \cdots S_n^{(k+l)}$ mit gemeinsamer Spitze in A_{n+1} zu einem Simplex S_n. Dann ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}(S_n) &= \mathfrak{Z}(S_n^{(1)}) + \mathfrak{Z}(S_n^{(2)}) + \cdots + \mathfrak{Z}(S_n^{(k)}) + \mathfrak{Z}(S_n^{(k+1)}) + \cdots + \mathfrak{Z}(S_n^{(k+l)}) \\ &= \mathfrak{Z}(S_n^{(1')}) + \mathfrak{Z}(S_n^{(2')}) + \cdots + \mathfrak{Z}(S_n^{(k')}) + \mathfrak{Z}(S_n^{(k+1)}) + \cdots + \mathfrak{Z}(S_n^{(k+l)}),\end{aligned}$$

wenn P_n etwa das zweite Mal in die Simplexe $S_n^{(1')} \cdots S_n^{(k')}$ mit der Spitze A_{n+1} zerlegt ist. Denn wir haben oben die Invarianz von $\mathfrak{Z}(S_n)$ gegenüber irgend einer pyramidalen Zerlegung nachgewiesen. Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar die Unabhängigkeit der zu P_n gehörigen Zahl von der Wahl der Zerlegung von P_n in Simplexe.

Wir betrachten zweitens eine „zentrale" Zerlegung eines Simplexes die wir uns analog definiert denken, wie das in den §§ 1, 2, 3 des vorigen Abschnittes geschehen ist: Wir wollen beweisen, daß auch bei einer solchen Zerlegung $\mathfrak{Z}$ sich invariant verhält. Nehmen wir zunächst einmal an, das Zentrum C der Zerlegung liege innerhalb des vom Simplex begrenzten Raumstückes. Wir verbinden das Zentrum mit der Spitze A_{n+1} und verlängern die Verbindungsgerade über das Zentrum hinaus bis zum Schnitt mit der Basis in D. Dann verbinden wir C und D mit sämtlichen Ecken der Basis. Jeder der Simplexe $A_1 A_2 \cdots A_i D A_{i+2} \cdots A_{n+1}$ wird durch C transversal zerlegt, der Simplex $CA_1 A_2 \cdots A_n$ und der gegebene Simplex $A_1 \cdots A_{n+1}$ werden pyramidal zerlegt in lauter Simplexe mit der gemeinsamen Spite C resp. A_{n+1}. Dann folgt aus dem zuerst Bewiesenen, daß bei dieser zentralen Zerlegung $\mathfrak{Z}$ invariant bleibt. —

Liegt C nicht innerhalb des Simplexes, liegt aber eine der Ecken des Simplexes innerhalb eines der bei der zentralen Zerlegung entstehenden Teilsimplexe, so können wir die Betrachtungen für den ersten Fall hier unmittelbar, nur mit gehöriger Berücksichtigung der positiv oder negativ zu rechnenden Teilsimplexe, übertragen. Ist das dagegen nicht der Fall, so haben wir diese Betrachtungen in ziemlich selbstverständlicher Weise ein wenig zu modifizieren, wie es in der nebenstehenden Figur, die den kompliziertesten Fall für ein S_3 darstellt, angedeutet ist.*)

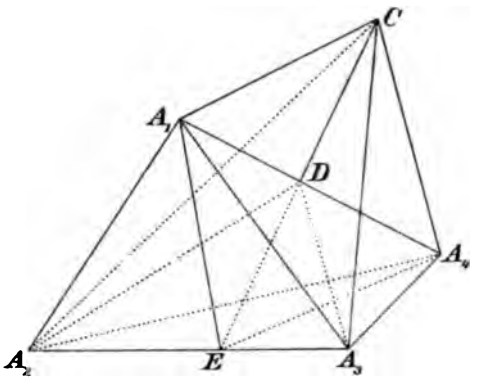


Fig. 2.

Es folgt also daraus, daß $\mathfrak{J}$ bei transversaler Zerlegung unverändert bleibt, jetzt auch, daß $\mathfrak{J}$ sich bei zentraler Zerlegung invariant verhält. Daraus folgern wir nun die Invarianz bei einer beliebigen Zerlegung durch folgende Überlegung, die eine Erweiterung der entsprechenden Überlegung in den §§ 1, 2, 3 des ersten Abschnittes darstellt:

Es sei eine beliebige Einteilung eines Simplexes S_n in Teilsimplexe vorgelegt. Diese letzteren werden begrenzt durch Simplexe S_{n-1}, die sich zu Polyedern Π_{n-1} zusammenordnen, welche doppelt von ihnen erfüllt werden. Nun nehmen wir einen Punkt C irgend wie im R_n an und zerlegen von ihm aus den Hauptsimplex und jeden Teilsimplex zentral in die Simplexe mit den Zahlen $\mathfrak{J}^{(1)}, \mathfrak{J}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{J}^{(n+1)}$ resp. $\mathfrak{J}_i^{(1)}, \mathfrak{J}_i^{(2)}, \cdots, \mathfrak{J}_i^{(n+1)}$. Dann ist nach dem oben Bewiesenen, wenn $\mathfrak{J}_i$ die zum i^{ten} Simplex gehörige Zahl ist:

$$\sum \mathfrak{J}_i = \sum \sum_1^{n+1} \mathfrak{J}_i^{(k)}.$$

Aber die bei der zentralen Zerlegung entstehenden Simplexe ordnen sich, nach dem oben Gesagten, zu Pyramiden zusammen, die paarweise

*) Beh.: $CA_1A_2A_3 + CA_4A_2A_3 = CA_2A_1A_4 + CA_3A_1A_4 + A_2A_3A_1A_4$ wo jedes Buchstabenquadrupel immer statt der zugehörigen Größe $\mathfrak{J}$ steht. Die Behauptung folgt, weil nach Voraussetzung

$CA_1A_2A_3 = CA_1EA_3 + CA_1EA_2 = CA_1DA_3 + EA_1DA_3 + CA_1DA_2 + EA_1DA_2$,

$CA_4A_2A_3 = CA_4EA_3 + CA_1EA_3 = CA_4DA_3 + EA_4DA_3 + CA_4DA_2 + EA_4DA_1$,

$CA_3A_1A_4 = CDA_3A_1 + CDA_3A_4$,

$CA_2A_1A_4 = CDA_2A_1 + CDA_2A_4$,

$A_1A_2A_3A_4 = A_1A_4E_2 + A_1A_4EA_3 = A_1DEA_2 + A_4DEA_2 + A_1DEA_3 + A_4DEA_3$.

identisch sind; nur ist die eine immer positiv, die andere negativ zu rechnen. Eine Ausnahme hiervon bilden nur die Teilsimplexe, deren Basen in den $n+1$ Begrenzungsräumen des gegebenen Simplexes liegen. Diese ordnen sich zu $n+1$ Simplexen zusammen, deren Zahlen auch dem Vorzeichen nach mit $\mathfrak{Z}^{(1)}, \mathfrak{Z}^{(2)}, \cdots, \mathfrak{Z}^{(n+1)}$ resp. identisch sind. Wir haben also:

$$\sum_{\cdot} \mathfrak{Z}_i = \sum_{1}^{n+1} \mathfrak{Z}^{(k)} = \mathfrak{Z},$$

wenn $\mathfrak{Z}$ die Zahl des Hauptsimplexes ist, womit unser Satz bewiesen ist.

Kehren wir nun wieder zu unserem speziellen Falle zurück, so ist es leicht zu sehen, daß die Größe $\mathfrak{Z} = W - 4\pi\mathfrak{M}_0 - 4\pi$ für das Pentatetraeder bei transversaler Zerlegung ungeändert bleibt: Es sei $ABCDE$ durch Teilung der Kante DE in F transversal zerlegt in zwei Pentatetraeder mit den Größen $\mathfrak{Z}'$, W', $\mathfrak{M}_0'$, resp. $\mathfrak{Z}''$, W'', $\mathfrak{M}_0''$. Den Raumwinkel an der Fläche ABC wollen wir kurz mit $\measuredangle ABC$ bezeichnen, und die entsprechende Bezeichnung für die anderen Raumwinkel einführen. Es bedeute ferner τ die Keilzahl, die zu dem vierdimensionalen Keil an der Kante DE gehört. Es ist dann (s. Fig. 3*))

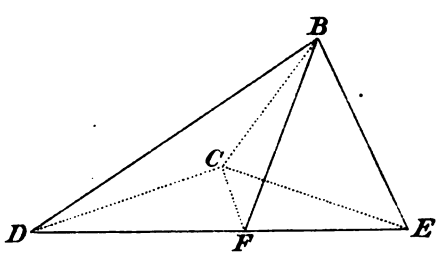


Fig. 3.

$$W' + W'' = W + \measuredangle DEA + \measuredangle DEB + \measuredangle DEC + 3\pi,$$
$$\mathfrak{M}_0' + \mathfrak{M}_0'' = \mathfrak{M}_0 + \tau.$$

Es ist aber τ gleich dem Verhältnis des Inhalts des sphärischen Dreiecks mit den drei Winkeln DEA, DEB und DEC auf einer Kugeloberfläche zu dem Gesamtinhalt dieser Kugelfläche. Dieses Verhältnis ist aber gleich dem Verhältnis des sphärischen Exzesses der Summe dieser Winkel zu 4π. Wir haben also:

$$\tau = \frac{\measuredangle DEA + \measuredangle DEB + \measuredangle DEC - \pi}{4\pi}.$$

Also:

$$\mathfrak{Z}' + \mathfrak{Z}'' = \measuredangle DEA + \measuredangle DEB + \measuredangle DEC + 3\pi$$
$$- \left(\mathfrak{M}_0 + \frac{\measuredangle DEA + \measuredangle DEB + \measuredangle DFC - \pi}{4\pi}\right) 4\pi - 8\pi$$
$$= W - \mathfrak{M}_0 4\pi - 4\pi = \mathfrak{Z}.$$

Wir haben also den

Satz 3: *Die Größe* $\mathfrak{Z} = W - \mathfrak{M}_0 4\pi - 4\pi$, *wo* W *die Winkelsumme und* $\mathfrak{M}_0$ *die Summe der Eckenzahlen des Pentatetraeders bedeutet, bleibt bei beliebiger Zerlegung des Pentatetraeders ungeändert.*

*) Es ist nur die transversal geteilte Basis $BCDE$ gezeichnet.

§ 2.

Die Größe $\mathfrak{Z}$ im Euklidischen R_4.

Um zu beweisen, daß $\mathfrak{Z}$ für den Euklidischen Raum verschwindet, lassen wir eine Ecke des Pentatetraeders $ABCDE$, etwa die mit dem Scheitel E, ungeändert und verschieben den gegenüberliegenden Raum $ABCD$ parallel mit sich gegen E hin. Bei dieser Verschiebung werden weder die Winkel noch die Eckenzahlen eine Änderung erfahren. Endlich lassen wir den Raum durch den Eckpunkt E selbst hindurch gehen und konstruieren eine Hypersphäre mit dem Zentrum in E. Dann werden sämtliche Räume des Pentatetraeders in ihrer gegenseitigen Lage auf das Begrenzungsgebilde dieser Hypersphäre abgebildet. Die Einzelheiten dieser Abbildung können wir uns folgendermaßen veranschaulichen (s. Fig. 4).

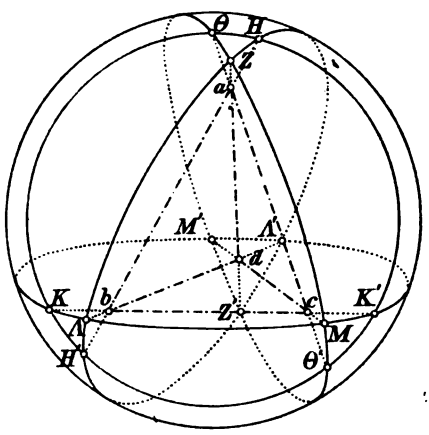


Fig. 4.

Eine zweidimensionale Kugelfläche (eine größte Kugel auf der Hypersphäre) stellt den zu $ABCD$ parallelen Raum dar, ein innerhalb derselben liegendes Tetraeder $abcd$ ist das Abbild der Ecke mit dem Scheitel E. Verlängern wir jetzt die Kanten dieses Tetraeders bis zum Schnitt mit der Kugelfläche in Z, Z', resp. H, H'; Θ, Θ'; K, K'; Λ, Λ'; M, M', dann sind die vier Tetraeder (deren eine Seitenfläche stets ein Stück der Kugeloberfläche ist) $a\mathsf{Z}\mathsf{H}\Theta$, $b\mathsf{H}'\mathsf{K}\Lambda$, $c\Theta'\mathsf{K}'\mathsf{M}$, $dZ'\mathsf{M}'\Lambda'$ die Bilder der vier Ecken des Pentatetraeders mit den Scheiteln A, B, C, D. Es ist ferner nach unserer Definition die Eckenzahl jedes dieser Tetraeder gleich dem Verhältnis einer Seite zu dem Gesamtinhalt des Kugelraumes, also gleich $\frac{T(e)}{V}$ resp. $\frac{T(a)}{V}$, $\frac{T(b)}{V}$, $\frac{T(c)}{V}$, $\frac{T(d)}{V}$, wenn $T(a)$ usw. den Inhalt des Tetraeders, das der Ecke mit Scheitel A usw. entspricht, bedeutet, wenn ferner V der Gesamtinhalt des Hypersphärenraumes oder, was dasselbe ist, der doppelte Inhalt des von der Kugelfläche begrenzten Raumstückes ist. Wir haben jetzt den Ausdruck zu bilden:

$$\mathfrak{Z} = W - \frac{4\pi}{V} \Sigma T - 4\pi.$$

Es ist dann:

$$\frac{\mathfrak{Z}}{4\pi} \cdot V = \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{2\pi} \cdot V - \Sigma T - V.$$

Man wird aber unschwer erkennen: Wenn ζ den Flächenwinkel des Tetraeders $abcd$ an der Kante ZZ' bedeutet (der gleich dem Raumwinkel an der Fläche ABE ist), dann ist $\frac{\zeta}{2\pi} V$ gleich dem Inhalt s_ζ desjenigen Raumstückes, das von den beiden Ebenen, welche den Flächenwinkel bilden, aus dem Kugelinnern herausgeschnitten wird, und zwar ist derjenige Teil dieses Raumes zu nehmen, in dem $abcd$ enthalten ist und der sich auf die Oberfläche der Kugel mit zwei Zweiecken mit gemeinsamen Scheiteln stützt. Das Entsprechende gilt für die entsprechend bezeichneten Größen $\eta, \vartheta, \varkappa, \lambda, \mu$ und $s_\eta, s_\vartheta, s_\varkappa, s_\lambda, s_\mu$. Bedeutet α den Raumwinkel des gegebenen Pentatetraeders an der Fläche BCD, dann ist $\frac{\alpha}{2\pi} V$ gleich dem Inhalt s_α desjenigen der beiden Raumstücke, die aus dem Inneren der Kugelfläche durch die Ebene durch c, b und d ausgeschnitten wird, in dem das Tetraeder $abcd$ nicht liegt, und das Entsprechende gilt für die entsprechend bezeichneten Winkel β, γ, δ. — Wir haben also jetzt den Ausdruck zu untersuchen:

$$\frac{\mathfrak{J}}{4\pi} V = \frac{1}{2}(s_\zeta + s_\eta + s_\vartheta + s_\varkappa + s_\lambda + s_\mu + s_\alpha + s_\beta + s_\gamma + s_\delta) - \Sigma T' - V.$$

Wir haben in unserer Konfiguration vier verschiedene Gebiete: 1. das Innere des Tetraeders $abcd$, 2. das Innere der vier „Scheitelräume" $aZH\Theta$ usw., 3. die vier abgestumpften Pyramiden $cbdZ'H'\Theta'$ usw., 4. die sechs dachförmigen Räume, die den sechs Kanten des Tetraeders $abcd$ entsprechen, wie z. B. $adH\Theta\Lambda'M'$. Es werden nun die Räume der zwei ersten Gruppen von den zehn s-Räumen gerade sechsfach überdeckt, die Räume der zwei letzten Gruppen vierfach; ΣT ist definitionsgemäß der Inhalt der Räume der beiden ersten Gruppen. Wir haben demnach das Resultat, daß die Größe:

$$\frac{1}{2}(s_\zeta + \cdots + s_\alpha + \cdots) - \Sigma T$$

gerade gleich dem doppelten Inhalte der Kugel, also gleich V ist. Und damit ist bewiesen:

Satz 4. *Im Euklidischen Raume von vier Dimensionen ist die Größe* $\mathfrak{J} = W - 4\pi\mathfrak{M}_0 - 4\pi$ *stets gleich Null; d. i.: Es ist die um* 4π *verminderte Winkelsumme gleich der Summe der Eckenzahlen multipliziert mit* 4π.

§ 3.

Die Größe $\mathfrak{J}$ und der Inhalt im Nicht-Euklidischen R_4.

Zunächst werden wir zeigen, daß $\mathfrak{J}$ im Nicht-Euklidischen R_4 nicht *immer* verschwindet. Dazu ist es nötig, besondere Pentatetraeder sowohl in einem R_4 mit negativem als auch in einem R_4 mit positivem Krümmungsmaß zu finden, für die $\mathfrak{J}$ von Null verschieden ist:

1. Im Raume mit negativer Krümmung — im „hyperbolischen" Raume — betrachten wir ein Pentatetraeder mit lauter gleichen Raumwinkeln, deren sämtliche Ecken im „Unendlichen" auf dem die Maßbestimmung vermittelnden absoluten Gebilde liegen. Dann ist die zu jeder Ecke gehörige Zahl gleich Null, jeder Raumwinkel aber gleich dem Flächenwinkel des regulären Euklidischen Tetraeders, also gleich $\arccos \frac{1}{3}$. Es ist also:

$$\Im = 10 \arccos \frac{1}{3} - 4\pi < 0.$$

2. Raum mit positiver Krümmung: Wir wählen ein Pentatetraeder, deren sämtliche Kanten gleich einem Quadranten sind. Dann ist die Zahl jeder Ecke gleich $\frac{1}{16}$ und jeder Raumwinkel gleich $\frac{\pi}{2}$. Es ist also:

$$\Im = 10 \cdot \frac{\pi}{2} - 5 \cdot \frac{1}{10} \cdot 4\pi - 4\pi = -\frac{\pi}{4} < 0.$$

Wir können also schon jetzt das Resultat aussprechen: *Daß $\Im$ für jedes Pentatetraeder verschwindet, ist eine charakteristische Eigenschaft des Euklidischen R_4.* Wir wollen nun aber beweisen, daß $\Im$ *für alle Pentatetraeder des R_4 mit nicht verschwindender Krümmung negativ ist,* indem wir zeigen, daß $\Im$ *eine einfache geometrische Bedeutung hat,* daß $\Im$ *nämlich gleich dem Inhalt des zugehörigen Pentatetraeders ist,* wenn der Inhalt des ganzen Raumes gleich 8π gesetzt wird. Dieser Beweis wird für den R_4 mit positiver Krümmung ganz genau entsprechend dem altbekannten Beweis geführt, der das Resultat liefert, daß der Inhalt des sphärischen Dreiecks gleich dem sphärischen Exzeß ist, wenn der Inhalt der ganzen Kugeloberfläche gleich 4π angenommen wird. Sei nämlich das Pentatetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ vorgelegt. Der Einfachheit halberneh men wir an, daß diese Mannigfaltigkeit ganz innerhalb eines der beiden Teile fällt, in die eine „größte" Hypersphäre H (linearer Raum unserer Maßbestimmung) den ganzen Raum teilt. Nennen wir kurz diesen Teil „das Innere" von H. Dann verlängern wir die zehn Kanten nach beiden Seiten bis zum Schnitt mit H und betrachten folgende zwei Gattungen von Räumen, die das Innere von H durchsetzen: 1) Die fünf Räume, die von H und je vier Geraden (Verlängerungen von Kanten) gebildet werden, die durch eine Ecke hindurchgehen (Tetraederstrahlraum); 2) die zehn Räume, die von H sowie von je zwei Räumen (Verlängerungen von Seitenräumen des Pentatetraeders) gebildet werden, die durch eine Seitenfläche des gegebenen Pentatetraeders hindurchgehen (Doppelkeilraum). Nehmen wir den Inhalt des ganzen Raumes als 8π an, also den Inhalt D von H als 4π, so haben wir: der Inhalt jedes der fünf Räume der ersten Kategorie $(T_1, \cdots, T_5)$ ist gleich der zugehörigen Eckenzahl, multipliziert mi 8π; der Inhalt jedes der zehn Räume der zweiten Kategorie $(K_1, \cdots K_{10})$

ist gleich dem Verhältnis des zugehörigen Raumwinkels zu 2π, multipliziert mit 8π. Es ist dann einerseits:

$$\sum K_i - 2\sum T_i = \frac{W \cdot 8\pi}{2\pi} - 2\mathfrak{M}_0 \cdot 8\pi = 4\mathfrak{Z} + 16\pi = 4\mathfrak{Z} + 4D.$$

Andererseits kann man sich aber durch sorgfältiges Studium der entstehenden Figur ohne wesentliche Schwierigkeiten überzeugen, daß die Räume der beiden Kategorien, die der zweiten einfach positiv gerechnet, die der ersten doppelt negativ gerechnet, das Innere von H mit Ausnahme des Inneren des Pentatetraeders gerade viermal positiv überdecken, das Innere des Pentatetraeders selbst aber gerade 0-mal überdecken, so daß wir haben

$$\sum K_i - 2\sum T_i = 4D - 4J,$$

wenn J der Inhalt des betrachteten Pentatetraeders ist. Daraus folgt aber

$$J = -\mathfrak{Z},$$

was bewiesen werden sollte. Wir haben also den Satz:

Satz 5: *In einem Raume von vier Dimensionen positiver Krümmung (Hypersphärischer Raum) ist die Größe* $\mathfrak{Z} = W - 4\pi\mathfrak{M}_0 - 4\pi$ (d. i.: die Summe der Raumwinkel vermindert um 4π mal der Summe der Eckenzahlen, vermindert um 4π) *stets* < 0 *und es ist* $\mathfrak{Z}$ *gleich dem negativen Inhalt des zugehörigen Pentatetraeders, wenn der Inhalt des ganzen Raumes gleich* 8π *gesetzt ist.*

Bedenken wir nun die Möglichkeit, Sätze aus Räumen mit positiver Krümmung unmittelbar auf Räume mit negativer Krümmung zu übertragen, erinnern wir uns ferner daran, daß $\mathfrak{Z}$ auch im hyperbolischen Raume in einem Falle als negativ nachgewiesen werde, so folgt der Satz:

Satz 6: *In einem Raume von vier Dimensionen und negativer Krümmung (Hyperpseudosphärischer Raum) ist die Größe* $\mathfrak{Z} = W - 4\pi\mathfrak{M}_0 - 4\pi$ *stets* < 0, *und es ist* $\mathfrak{Z}$, *abgesehen von einer negativen multiplikativen Konstante, gleich dem Inhalt des zugehörigen Pentatetraeders.*

Wir sehen also: die Größe $\mathfrak{Z}$ für vier Dimensionen ist das genaue Analogon zu der von uns betrachteten Größe $\mathfrak{Z}$ im R_2, d. i. dem Winkelsummenexzeß in der Ebene. Nur tritt uns hier der bemerkenswerte Unterschied entgegen, daß $\mathfrak{Z}$ für jeden Raum, der eine von Null verschiedene Krümmung hat, dasselbe Vorzeichen hat.

Satz 7. *Ist für irgend ein Pentatetraeder die Zerlegungsinvariante* $\mathfrak{Z}$ *gleich Null, so ist sie für jedes Pentatetraeder gleich Null. — Ist* $\mathfrak{Z}$ *für irgend ein Pentatetraeder von Null verschieden, so ist sie für jedes* < 0.

So lautet das Analogon zu den Legendreschen Sätzen im R_4. In drei Dimensionen dagegen gibt es nichts derartiges: Die von uns aufgestellte Größe $\mathfrak{Z}$, das bis auf einen konstanten Faktor einzige lineare

Aggregat der Winkelsumme und der Summe der Eckenzahlen, das sich invariant verhält bei einer Zerlegung des Tetraeders, ist für jedes Tetraeder einer beliebigen Maßbestimmung gleich Null. Dasselbe trifft auf die Größe $\mathfrak{Z}'$ für den R_4 zu (siehe § 3 des ersten Abschnittes).

Schlußbemerkungen.

I. Ausblick auf höhere Dimensionen.

Soweit ich es bis jetzt übersehen kann, gestalten sich die Verhältnisse in höheren Räumen ganz entsprechend, so daß ich folgende Resultate, allerdings bloß vorläufig, aussprechen möchte:

1) In einem R_n gibt es $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ Beziehungen zwischen den Anzahlen der Begrenzungsmannigfaltigkeiten einer nur von Simplexen begrenzten Mannigfaltigkeit.

2) Die Eulersche Formel für den R_{2n+2} folgt direkt aus den Eulerschen Formeln für die niedrigeren Räume, für den R_{2n+1} dagegen mittels Konstruktion einer neuen Zerlegungsinvariante für den R_{2n}.

3) In Räumen von gerader Dimensionenzahl gibt es eine Zerlegungsinvariante $\mathfrak{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Sie ist ein lineares Aggregat der Eckenzahlen, Keilzahlen, etc. endlich der Summe der Raumwinkel des Simplex.

b) Ihr Verschwinden für jeden Simplex ist charakteristisch für den Euklidischen Raum, im Nicht-Euklidischen Raume ist sie dagegen, abgesehen von einer multiplikativen Konstanten, gleich dem Inhalt des Simplex.

c) Es kann also der Inhalt eines Simplex im R_{2n}, wenn der Inhalt für Simplexe niederer Räume als bekannt vorausgesetzt wird, in einfachster Weise „konstruktiv" gefunden werden, was nicht zutrifft für den Inhalt im R_{2n+1} (z. B. für den R_3).

d) Für den R_{4n} hat $\mathfrak{Z}$ stets dasselbe Vorzeichen, ob der Raum positiv oder negativ gekrümmt ist, für einen R_{4n+2} hat $\mathfrak{Z}$, jenachdem der Raum positiv oder negativ gekrümmt ist, verschiedenes Vorzeichen.

Man weiß, daß der Inhalt des Nicht-Euklidischen Tetraeders als Funktion der Flächenwinkel desselben sich, abgesehen von elementaren Funktionen, durch Integrallogarithmen ausdrücken läßt. Es wäre vielleicht nicht ohne Interesse, die Funktionen der Raumwinkel aufzustellen, von denen der Inhalt des Simplex in fünf Dimensionen abhängt, um so das dritte Glied in der Kette der Funktionen: lineare Funktion, Integrallogarithmus, etc. zu bekommen. Denn diese Funktionen genügen, weil sie Zerlegungsinvarianten sind, recht einfachen Funktionalgleichungen.

II. Das metrische Hilfsmittel zur Ableitung der Eulerschen Formel.

Es mag vielleicht etwas unsystematisch erscheinen, daß wir uns zur Ableitung der Eulerschen Formeln metrischer Vorstellungen bedient haben. Wir haben das allein deswegen getan, um uns den Beweis für einen Satz aus der Analysis situs zu erleichtern (oder ganz zu ersparen), der für die Ebene folgendermaßen lautet: Ist ein Dreieck irgendwie einfach in Teildreiecke zerlegt, so kann man jeder Ecke jedes Teildreiecks eine solche Zahl zuordnen, daß diese Zahlen um jede Teilecke herum sich zu einer bestimmten von der Teilung unabhängigen Zahl, und ebenso an jeder Ecke des Hauptdreiecks sich zu einer von der Teilung unabhängigen Zahl ergänzen. Und entsprechende Sätze über Zahlen an Ecken und Kanten eines Tetraeders, resp. über Zahlen an Ecken, Kanten und Flächen eines Pentatetraeders haben wir für die Ableitung der Eulerschen Formel für den R_4 resp. den R_5 benutzt. Die *Beweise* dieser Sätze, die in einer Geometrie, in der die Winkelkongruenzaxiome gelten, evident sind, bilden das einzige metrische Element in unsern Beweisen für die Eulersche Formel (abgesehen natürlich von der Methode 1 des § 1). Die Sätze selbst gehören durchaus dem Gebiete der Analysis situs an. Dasselbe metrische Element steckt in den Auseinandersetzungen des § 1 des 2. Abschnitts. Es scheint mir übrigens die dort auseinandergesetzte Methode, bezw. der Beweis des Satzes 2 für zwei resp. drei Dimensionen der einfachste Weg zu sein, um zu zeigen, daß die Größe „Grundlinie und Höhe", resp. „Grundfläche und Höhe" Zerlegungsinvariante für das Dreieck resp. für das Tetraeder im Euklidischen Raume ist.

Über Dreieckskonstruktionen in der Nichteuklidischen Geometrie.

(Auszug aus einem Briefe an Herrn F. Klein.)

Von

Max Simon in Straßburg i./E.

In dem Werk: H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Sammlung Schubert 49 ist nicht erwähnt, daß die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks aus den Winkeln, samt dem „abgeleiteten" Dreieck sich in den Annalen schon Oktober 1896 findet. Die Konstruktion des beliebigen Dreiecks folgt daraus mittels der polaren Formel zum Kosinussatz so einfach, daß ich sie in meiner Vorlesung den Hörern überließ. Ich habe l. c. auch nicht gelesen, daß die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen beide Katheten gleich der Paralleldistanz zu 45^0 sind, die Distanz zu 30^0 ist, während die Höhe dieses Dreiecks die Distanz zu 60^0 ist. Also auch in der N. E. G. läßt sich der rechte Winkel mit Zirkel und Lineal dritteln.

Ferner: Wird bei einer Distanz x die abgeleitete s und ihr Parallelwinkel δ_1 genannt (Crelle 109), so ist die hyperbolische Tangente von $\frac{1}{2}x$ gleich der zyklischen von $\frac{1}{2}(90-\delta_1)$.

Ich hatte in Crelle 107 p. 84 einen elementaren Beweis der ersten Lobatschefskischen Konstruktion des Parallelwinkels gegeben, der in dem Falle a) einem Einwand unterliegt, der unschwer zu beseitigen ist, eigentlich schon dadurch, daß auf dem Strahl außer seinem Zentrum kein ausgezeichneter Punkt liegt. Dieselbe Beweismethode gilt genau für die Engelsche Konstruktion, nur ist sie noch einfacher durchzuführen. Es ist dann nur zu zeigen, daß auf jedem schneidenden Strahl ein Punkt liegt, für welchen die Strecke des Strahls größer ist als die Basis und für die Nichtschneidende umgekehrt. Das erstere ist für den Schnittpunkt und alle hinter ihm liegenden Punkte selbstverständlich; das zweite kann

allgemein bewiesen werden wie folgt. (Fig. 1.) Bx sei parallel g, BG sei Paralleldistanz zu η, dann ist *jede* Nichtschneidende von g eine Schneidende von $G\infty$ und für den Schnittpunkt S sicher $BS < A\infty$. Will man die

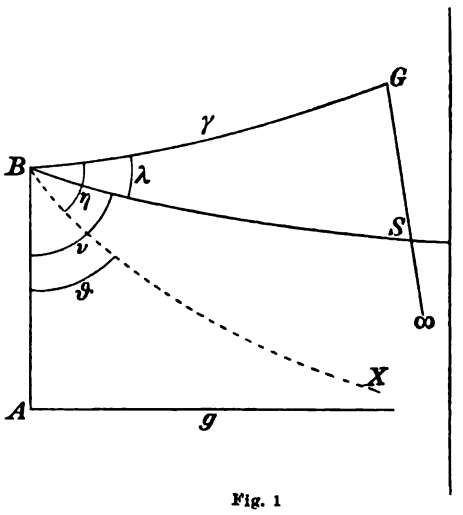


Fig. 1

Einführung der Distanz zu η bemängeln, so muß man spezialisieren; da ist nur der eine Fall interessant, wo die Nichtschneidende von g durch P und ihre Symmetrische durch A zu γ sich vor ihrer resp. kürzesten Entfernung auf der Symmetrieachse schneiden. Es ist zu zeigen (Fig. 2), daß

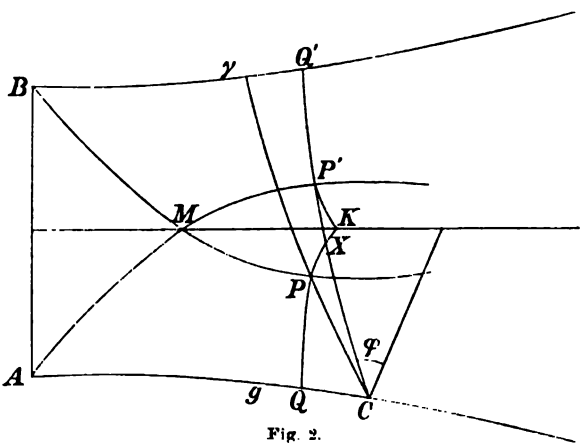


Fig. 2.

$BP < AC$ oder $AC > AP'$ oder $\sphericalangle AP'C > ACP'$. Es ist aber $AP'C = 90 - \delta$, $(\delta = xP'K)$ und $P'CA = 90 - \varphi$. Es ist $\varphi > QXC$ und QXC oder $P'XK > \delta$, weil XK als Teil von PK kleiner als $P'K$ ist.

Straßburg i./E., 7. Aug. 1905.

Neuester Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra**, 2 Teile, red. von W. Fr. Meyer.
I. Teil. [XXXVIII u. 764 S.] geb. ℳ 17 —, in Halbfranz geb. ℳ 20.—
II. Teil. [X u. S. 765—1197.] geh. ℳ 13.—, in Halbfranz geb. ℳ 16.—

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von H. Burkhardt und W. Wirtinger.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1898. ℳ 4.80; 2/3. [340 S.] 1900. ℳ 7.60; 4. [130 S.] ℳ 4.40. 5. [120 S.] 1904. ℳ 6.—
II. Teil. Heft: 1. [176 S.] 1901. ℳ 5.40

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von W. Fr. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.60
II. Teil. Heft: 2. [96 S.] 1904. ℳ 2.40.
III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1906. ℳ 5.40
——— Heft: 2/3. [456 S.] 1906. ℳ 9.60.

IV. **Mechanik**, 3 Teile, red. von F. Klein u. C. H. Müller.
I. Teil. 1. Abt. Heft: 1. [121 S.] 1901. ℳ 3.60
2. [166 S.] 1902. ℳ 4.40. 3. [104 S.] 1903. ℳ 4.60
——— II. Abt. Heft: 1. [152 S.] 1904. ℳ 4.40.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [121 S.] 1903. ℳ 3.80

V. **Physik**, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
I. Teil. Heft: 1. [103 S.] 1903. ℳ 3.60
——— Heft: 2. [120 S.] 1905. ℳ 4.80.
II. Teil. Heft: 1. [208 S.] 1904. ℳ 6.—

VI. 2: **Astronomie**, red. von K. Schwarzschild.
Heft: 1. [102 S.] 1905. ℳ 3.60

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie und Geophysik**, red. von Ph. Furtwängler und E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VII **Historische, philosophische und didaktische Fragen** behandelnd, sowie **Generalregister**.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, professeur à l'université de Nancy. En sept tomes. Tome I: vol 1, fasc. 1. [160 pag.] gr. 8. 1904. n. ℳ 4.—

Abraham, Dr. M., Privatdozent an der Universität Göttingen, **Theorie der Elektrizität.** I. Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. Zweite, umgearbeitete Auflage von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 448 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 12 —.
II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 10 —

Ahrens, Dr. W., in Magdeburg, **Scherz und Ernst in der Mathematik.** Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 8 —
——— **mathematische Unterhaltungen und Spiele.** [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt n. ℳ 10.—

Bachmann, Dr. **Paul**, Professor in Weimar, **Zahlentheorie.** Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. Fünfter Teil. Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. [XXII u. 548 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 16 —, in Leinw. geb. n. ℳ 17.—

Bolyai de Bolya, **Wolfgang**, **tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici.** Editio secunda. Tomus II: Elementa geometriae et appendices. Mandato Academiae Scientiarum Hungaricae suis adnotationibus adiectis ediderunt Josephus Kürschák, Maximilian Radai, Béla Törökv de Zárándrásk, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. 2 partt. 4. 1904. Pars I. Textus. [LXIII u. 437 S.] Pars II. Figurae. [VIII u. 82 lithogr. Tafeln.] In Halbkalbleder geb. n. ℳ 40. —

Brunn, Dr. **Heinrich**, Professor der Astronomie an der Universität zu Leipzig. **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre.** [VIII u. 310 S. u. Anhang 18 S.] gr. 8. 1906. geb. n. ℳ 7,80, in Leinw. geb. n. ℳ 9.40.

Bucherer, Dr. **A. H.**, Privatdozent an der Universität Bonn, **mathematische Einführung in die Elektronentheorie.** Mit 13 Figuren im Text. [IV u. 118 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 3.20.
——— **Elemente der Vektoranalysis.** Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Auflage. [VIII u. 103 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 2.40.

Cesàro, **Ernesto**, Professor der Mathematik an der Königl. Universität zu Neapel, **elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung.** Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript d. Verf. deutsch hrsg. von Dr. G. Kowalewski, Professor an der Universität Greifswald. *Mit 97 Figuren im Text.* [VI u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 20 —

Czuber, Hofrat **Emanuel**, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, **Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung.** 2 Bände. gr. 8.
I. Band. 2. sorgfältig durchgesehene Auflage. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 540 S.] In Leinw. geb.
II. — 2(4) 78 Figuren im Text. [IX u. 439 S.] In Leinw. n. ℳ 10.—

Festschrift Adolph Wüllner gewidmet zum siebzigsten Geburtstage 13. Juni 1905 von der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen, ihrem früheren und jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnis A. Wüllners in Heliogravüre, 8 Tafeln und 91 Figuren im Text. [VIII u. 264 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 8.—, geb. n. ℳ 9.—

Fisher, Dr. phil. **Irving**, Professor der Nationalökonomie an der Yale Universität, **kurze Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung).** Aus der durch mehrere Verbesserungen des Verfassers vervollständigten dritten englischen Ausgabe übersetzt von *N. Powys*. Mit 11 Figuren im Text. [VI u. 72 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 1.80.

Fleming, **J. A.**, Professor der Elektrotechnik am University College zu London, **elektrische Wellen-Telegraphie.** 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Professor Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbild. [IV u. 186 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 4.20, in Leinw. geb. n. ℳ 5.—

Föppl, Dr. **Aug.**, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, **Vorlesungen über technische Mechanik.** In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—
I. Band. Einführung i. d. Mechanik. 2. Aufl. M. 150 Fig. i. Text. [XVI u. 423 S.] 1905. geb. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. 2. Aufl. Mit 176 Fig. im Text. [XII u. 471 S.] 1907. geb. n. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. 3. Aufl. Mit 83 Fig. im Text. [XVI u. 454 S.] 1905. geb. n. ℳ 10.—
IV. — Dynamik. 2. Aufl. Mit 60 Fig. im Text. [XV u. 506 S.] 1901. geb. n. ℳ 12.—

Gans, Dr. **Richard**, Privatdozent an der Universität Tübingen, **Einführung in die Vektoranalysis.** Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 2.80.

Haffter, Dr. **L.**, Professor an der Universität Kiel, und Dr. **C. Koehler**, Professor an der Universität Heidelberg, **Lehrbuch der analytischen Geometrie.** 1. Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 126 Figuren im Text. [XVI u. 528 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 14.—

Jahnke, Dr. **E.**, etatsmäßiger Professor an der Königl. Bergakademie zu Berlin, **Vorlesungen über die Vektorenrechnung.** Mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren im Text. [XII u. 285 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 5.60.

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.**, und Dr. **E. Riecke**, Professor an der Universität Göttingen, **neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen.** Vorträge, gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904. Enthaltend Beiträge der Herren O. Behrendsen, E. Boss, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild. gr. 8. 1904. Teil I. Mit 6 Figuren im Text. [VIII u. 190 S.] geh. n. ℳ 3.60. Teil II. Mit 151 Figuren und 5 Doppeltafeln. [VI u. 198 S.] geh. n. ℳ 4.60, geb. n. ℳ 5.— Beide Teile in einem Band geb. n. ℳ 8.60.

Kohlrausch, Wirkl. Geh. Oberregierungsrat, Prof. Dr. **F.**, in Marburg, **Lehrbuch der praktischen Physik.** Zehnte, vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlr. Figuren im Text. [XXVIII u. 656 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Netto, Dr. **Eugen**, Professor an der Universität Gießen, **elementare Algebra.** Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren im Text. [VIII u. 300 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 4.40.

Nielsen, Dr. **Niels**, Dozent der reinen Mathematik an der Universität Kopenhagen, Inspektor des mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, **Handbuch der Theorie der Gammafunktion.** [X u. 326 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

———— **Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen.** [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 14.—

Poincaré, **Henri**, Membre de l'Institut, **Wissenschaft und Hypothese.** Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 4.80. (2. Auflage unter der Presse.)

———— **der Wert der Wissenschaft.** Autorisierte deutsche Ausgabe von *E. Weber*. Mit Anmerkungen von H. Weber in Straßburg i. E. [ca. 180 S.] 8. In Leinw. geb. (Erscheint im Februar 1906.)

Schüssler, Dr. **Rudolf**, Professor an der Technischen Hochschule zu Graz, orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. [VIII u. 170 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 7.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. 3 Bände. gr. 8. [Von der 3. Aufl. an hat Prof. G. Scheffers in Darmstadt die Neubearbeitung übernommen.]

Einzeln:

I. Band: Differentialrechnung. 5. Aufl. besorgt von Dr. G. Scheffers, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit Figuren im Text. [ca. 600 S.] geh. ca. n. ℳ 10.—, in Leinw. geb. ca. n. ℳ 11.— [Erscheint im Frühjahr 1906.]

II. Band: Integralrechnung. 2. durchgesehene Auflage, mit Unterstützung von H. Liebmann und E. Zermelo herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin. [XII u. 425 S.] 1899. geh. n. ℳ 6.—, in Leinw. geb. n. ℳ 9.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 2. durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Professor in Berlin, und E. Zermelo, Privatdozent an der Universität Göttingen. Mit 33 Fig. im Text. [XII u. 480 S.] 1904. geh. n. ℳ 9.—, in Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Starke, Dr. **H.**, Privatdozent in Berlin, experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse dargestellt. Mit 275 in den Text gedr. Abb. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Stolz, Dr. **Otto**, weil. Professor an der Universität Innsbruck, und Dr. **J. Anton Gmeiner**, Professor an der deutschen Universität Prag, Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „Theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. Mit 21 Figuren im Text. [X u. 596 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 16.—

Auch in 2 Abteilungen:

1. Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

II. — Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. S. 243—612.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Thomae, J., Geheimer Hofrat und Professor an der Universität Jena, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. [IV u. 44 S.] 4. 1905. kart. n. ℳ 2.80.

———— Grundriß einer analytischen Geometrie der Ebene. Mit 8 Figuren im Text. [X u. 168 S.] 8. 1906. In Leinw. geb. ℳ 3.60.

Thomson, J. J., D. Sc. Lld. Ph. D. Er. S. Fellow etc., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. In 3 Lieferungen. gr. 8. I. Lfg. Mit 54 Textfiguren. [S. 1—216.] 1905. geh. n. ℳ 6.— II. Lfg. Mit 63 Textfiguren. [S. 217—438.] 1906. geh.

[Die 3. (Schluß-) Lieferung erscheint im Februar 1906.]

Wallentin, Dr. J., Regierungsrat und Landesschulinspektor in Wien, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. Mit 81 Figuren im Text. [X u. 444 S.] gr. 8. 1904. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Weber, Dr. **H.**, Professor in Straßburg, und Dr. **J. Wellstein**, Professor in Straßburg, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. I. Band: Elementare Algebra und Analysis. 2. Auflage. Mit 58 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. In Leinw. geb. n. ℳ 9.60. II. Band: Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 280 Textfiguren. [XII u. 604 S.] 1905. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—. (Bd. III. Anwendung der Elementarmathematik. Unter d. Presse.)

Wien, Dr. **W.**, Professor an der Universität Würzburg, über Elektronen. Vortrag gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. [28 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 1.—

Mathematische Annalen Band 51 und Folge in der ganzen Serie oder einzeln zu kaufen gesucht. Gefällige Anerbieten unter N. 100 an die Verlagsbuchhandlung **B. G. Teubner** in **Leipzig** erbeten.

INHALT.

	Seite
Die partiellen Differentialgleichungen des Variationsproblems. Von Paul Gordan in Erlangen	453
Über einen Satz von Tschebyscheff. Von Edmund Landau in Berlin	527
Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen. Von G. Herglotz in Göttingen	551
Die Eulersche Formel im Zusammenhang mit dem Inhalt in der Nicht-Euklidischen Geometrie. Von M. Dehn in Münster i/W. (Mit 4 Figuren im Text)	561
Über Dreieckskonstruktionen in der Nichteuklidischen Geometrie. Von Max Simon in Straßburg i/E. (Mit 2 Figuren im Text)	587
Berichtigungen von Herrn Klein und Herrn Fejér	566

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich scheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortl. Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. München, Hildegardstr. 1½. **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-We

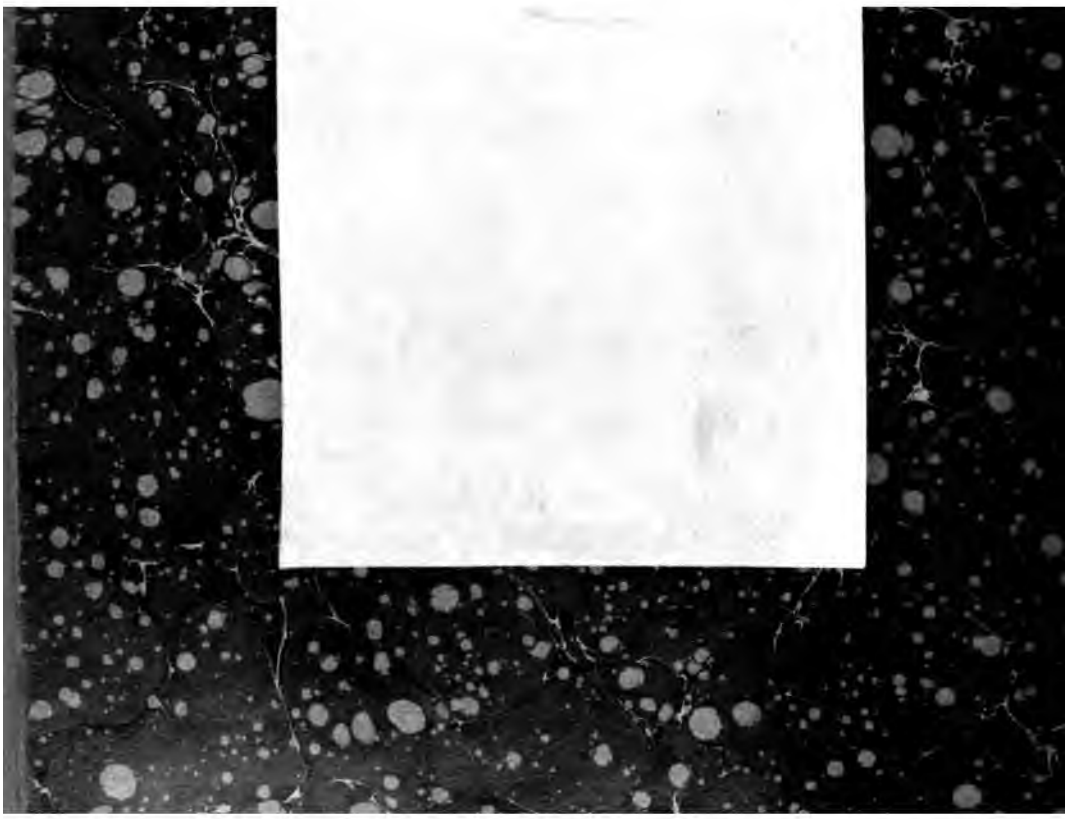
Zusendungen sind zu richten an die Mitglieder der auf der Titelseite genannten Gesamtredaktion oder an Professor **Otto Blumenthal**, Aachen, Vincenzstraße 7.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

MATHEMATICS-STATIS
LIBRARY

STORAGE AREA

510.5
M 426 Mathemati
NAME
Ronald Baffi
W. Shriver 2181
C. E. Smith 2181
E. Zagustin 2181
MAY 29 1955
JUN 10 1955
NOV 13 1958
JUN 9
MAY 2 1963
85206
510.
M42
v.61
1905



510.5
M 426 Mathemati
NAME
JUN 6
MAR 1 9 1955
MAY 2 9 1955
Ronald Baffi
W. Stiver 2181
C. E. Smith 2181
E. Zagustin 2181
JUN 10 1955
NOV 13 1958
JUN 9
MAY 8 1968
85206
510.5
M42L
v.61
1905